



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน รหัสวิชา ค 32102

ภาคเรียนที่ 2

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ลำดับและอนุกรม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เรื่อง การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

เวลา 7 ชั่วโมง

1. มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

ค 1.3 ม.5/1 เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับดอกเบี้ยและมูลค่าของเงินในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

- การคิดดอกเบี้ยทบต้น เป็นการคิดดอกเบี้ยโดยนำดอกเบี้ยจากงวดก่อนรวมกับเงินต้นของงวดต่อไป และจะมีการคิดดอกเบี้ยจากเงินต้นงวดใหม่ ซึ่งสามารถคำนวณหาเงินรวมทั้งหมดและดอกเบี้ยที่ได้รับหรืออัตราดอกเบี้ยจากดอกเบี้ยทั้งสองแบบ

- มูลค่าอนาคต เป็นมูลค่าของเงินในอนาคตภายใต้ช่วงเวลา หรืออัตราดอกเบี้ยที่กำหนดไว้ โดยมีกระบวนการเริ่มจากจำนวนเงินจำนวนหนึ่ง ณ ปัจจุบัน มีค่าเพิ่มมากขึ้นในอนาคต จะเรียกว่า การทบต้นของค่าเงินด้วยดอกเบี้ยที่ได้รับ

- มูลค่าปัจจุบัน คือ มูลค่าของเงิน ณ ปัจจุบัน ที่เกิดขึ้นในอนาคต และมีค่าเท่ากับจำนวนเงินจำนวนหนึ่ง ณ ปัจจุบัน ซึ่งการหาค่าเงินปัจจุบันมีกระบวนการคิดตรงกันข้ามกับการคิดทบต้น โดยจะเป็นการคำนวณเอาดอกเบี้ยออกไปเพื่อให้เหลือเงินเริ่มต้น จะเรียกว่า การคิดลดค่าเงิน

- ค่างวด เป็นการจ่ายเงินหรือฝากเงินเป็นงวดติดต่อกันหลายงวด โดยการจ่ายเงินแต่ละงวดมีระยะห่างเท่า ๆ กัน

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับดอกเบี้ยทบต้นได้อย่างถูกต้อง

4.1.2 มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับมูลค่าของเงินได้อย่างถูกต้อง

4.1.3 มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับค่างวดได้อย่างถูกต้อง

4.1.4 นำการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

4.1.5 นำมูลค่าของเงินใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

4.1.6 นำค่างวดไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น
ได้

4.2.2 ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การ
คิดดอกเบี้ยทบต้นได้

4.2.3 ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่าของเงินได้

4.2.4 ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่า
ของเงินได้

4.2.5 ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่างวดได้

4.2.6 ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่างวด
ได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์

4.3.2 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.3 มีวินัย

4.3.4 ใฝ่เรียนรู้

4.3.5 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.3.6 อยู่อย่างพอเพียง

4.3.7 มีจิตสาธารณะ

4.3.8 รักความเป็นไทย

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

4.4.1 ใช้เทคโนโลยีในการทบทวนความรู้การประยุกต์ลำดับและอนุกรมใช้แก้
สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

4.4.2 สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้

5. เนื้อหา/สาระ

ดอกเบี้ยทบต้น

การหาเงินรวมจากการฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี ซึ่งเมื่อสิ้นปีที่ n จะได้ เงินรวม $P(1 + r)^n$ บาท โดยที่ $r = \frac{i}{100}$ ในกรณีที่มีการคิดดอกเบี้ยทบต้นมากกว่าปีละครั้ง เช่น ธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นสำหรับเงินฝากในบัญชีออมทรัพย์ทุก 6 เดือน จะสามารถคำนวณเงินรวมได้ $P(1 + r)^n$ เมื่อ P แทนเงินต้น n แทนจำนวนงวด และ r แทนอัตราดอกเบี้ยที่คิดแบบทบต้นต่องวด ในทางปฏิบัติ อัตราดอกเบี้ยที่ระบุจะเป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปี ดังนั้น ในการคำนวณจะต้องแปลงให้เป็นอัตราต่องวดเสียก่อน เช่น อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดทบต้นทุก 3 เดือน แสดงว่าใน 1 ปี จะคิดดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้ง จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6\%}{4} = 1.5\%$ หรือ 0.015

ตัวอย่างที่ 1 ฝากเงิน 50,000 บาท ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสามเดือน เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี จะมีเงินรวมเท่าใด โดยที่ไม่มีการฝากและถอนในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6\%}{4} = 1.5\%$ หรือ 0.015

จำนวนงวดทั้งหมดเท่ากับ $5(4) = 20$ งวด

ให้ a_i แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ i

$$\text{จะได้ } a_1 = 50,000 + 50,000(0.015) = 50,000(1.015)$$

$$a_2 = a_1 + a_1(0.015) = a_1(1.015) = 50,000(1.015)^2$$

$$a_3 = a_2 + a_2(0.015) = a_2(1.015) = 50,000(1.015)^3$$

.

.

.

$$a_{20} = a_{19} + a_{19}(0.015) = a_{19}(1.015) = 50,000(1.015)^{20}$$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อครบ 5 ปี $50,000(1.015)^{20}$ หรือประมาณ 67,342.75 บาท

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 1 จะเห็นว่า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น 1.015

สามารถสรุปวิธีหาเงินรวมที่ได้จากการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี จะได้ เงินรวม $P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

ตัวอย่างที่ 2 ฝากเงิน 20,000 บาท กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งที่ให้อัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ 2 ครั้ง จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี โดยไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $P = 20,000$ บาท, $k = 2$, $n = 10$ และ $r = 0.04$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned}\text{จำนวนเงินรวม คือ } 20,000\left(1 + \frac{0.04}{2}\right)^{2(10)} &= 20,000\left(1 + \frac{0.04}{2}\right)^{20} \\ &= 20,000(1 + 0.02)^{20} \\ &= 20,000(1.02)^{20}\end{aligned}$$

หรือประมาณ 29,718.95 บาท

ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี จะมีเงินประมาณ 29,718.95 บาท

ตัวอย่างที่ 3 ฝากเงิน 50,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งให้อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี โดยไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $P = 50,000$ บาท, $k = 4$, $n = 10$ และ $r = 0.06$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned}\text{จำนวนเงินรวม คือ } 50,000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{4(10)} &= 50,000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{40} \\ &= 50,000(1 + 0.015)^{40} \\ &= 50,000(1.015)^{40}\end{aligned}$$

หรือประมาณ 90,700.92 บาท

ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี จะมีเงินประมาณ 90,700.92 บาท

ตัวอย่างที่ 4 ฝากเงิน 10,000 บาท กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่ง โดยสถาบันการเงินคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน เมื่อสิ้นปีที่ 3 สถาบันการเงินแจ้งว่ามีเงินในบัญชีประมาณ 12,518 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปีที่สถาบันการเงินกำหนด

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $P = 10,000$ บาท, $k = 4$ และ $n = 3$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned}
\text{จำนวนเงินรวม คือ } 10,000\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4(3)} &= 12,518 \\
10,000\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{12} &= 12,518 \\
\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{12} &= 1.2518 \\
1 + \frac{r}{4} &= \sqrt[12]{1.2518} \\
r &= 4\left(\sqrt[12]{1.2518} - 1\right) \\
&\approx 0.075556
\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยต่อปีที่สถาบันการเงินกำหนดประมาณ 7.56% ต่อปี

มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

สมมติว่าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 1,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละครั้ง เมื่อฝากครบ 2 ปี จะได้เงินรวม $1,000(1 + 0.05)^2$ หรือ 1,102.5 บาท ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเงิน 1,102.5 เป็นมูลค่าอนาคต ส่วนเงิน 1,000 เป็นมูลค่าเงินปัจจุบัน

ถ้าลงทุน P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง เป็นเวลา n ปี กำหนดให้ $r = \frac{i}{100}$ แล้วเมื่อครบ n ปี เงินรวมที่ได้คือ

$$S = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

เรียก S ว่ามูลค่าเงินอนาคตของเงินต้น P ในทางกลับกัน จะเรียก P ว่ามูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S ดังนั้น มูลค่าเงินปัจจุบัน P ของเงินรวม S คือ

$$P = S\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn}$$

ตัวอย่างที่ 5 ไก่ต้องการฝากเงินกับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน ถ้าไก่ต้องการให้มีเงินในบัญชีประมาณ 15,000 บาท เมื่อสิ้นสุดปีที่ 3 เขาจะต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยเท่าใด

วิธีทำ ในที่นี้ $S = 15,000$, $k = 12$, $n = 3$ และ $r = 0.03$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 15,000 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn} \\ &= 15,000 \left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{-36} \\ &= 15,000 (1 + 0.0025)^{-36} \\ &= 15,000 (1.0025)^{-36} \\ &\approx 13,710.51 \end{aligned}$$

ดังนั้น ไม้จะต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อย 13,710.51 บาท

นั่นคือจากตัวอย่างที่ 5 จะกล่าวว่า **13,710.51 บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบันของเงิน 15,000 บาท**

ตัวอย่างที่ 6 ปลาได้รับเงินออม 12,359.35 บาท จากการฝากเงินจำนวนหนึ่งกับสถาบันการเงินเมื่อ 15 ปีที่แล้ว โดยไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้ ถ้าสถาบันการเงินคงอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาเงินต้นที่ปลาฝากไว้เมื่อ 15 ปีก่อน

วิธีทำ ในที่นี้ $S = 12,359.35$, $k = 2$, $n = 15$ และ $r = 0.03$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 12,359.35 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn} \\ &= 12,359.35 \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^{-30} \\ &= 12,359.35 (1 + 0.015)^{-30} \\ &= 12,359.35 (1.015)^{-30} \\ &\approx 7,907.05 \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อ 15 ปีปลาฝากเงินต้นไว้ 7,907.05 บาท

นั่นคือจากตัวอย่างที่ 6 จะกล่าวว่า **7,907.05 บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบันของเงิน 12,359.35 บาท**

ตัวอย่างที่ 7 นกกู้เงินจากแมว โดยกำหนดชำระหนี้ทั้งหมดในอีก 3 ปีข้างหน้า เป็นเงิน 47,532.42 บาท ถ้าแมวกำหนดดอกเบี้ย 10% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี จงหาจำนวนเงินที่นกกู้จากแมว

วิธีทำ ในที่นี้ $S = 47,532.42$, $k = 1$, $n = 3$ และ $r = 0.10$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 47,532.42 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn} \\ &= 47,532.42 \left(1 + \frac{0.10}{1}\right)^{-3} \end{aligned}$$

$$= 47,532.42(1 + 0.10)^{-3}$$

$$= 47,532.42(1.10)^{-3}$$

$$\approx 35,711.81$$

ดังนั้น จำนวนเงินที่นักกู้จากแมวประมาณ 35,11.81 บาท

นั่นคือจากตัวอย่างที่ 7 จะกล่าวว่า **35,11.81 บาท** เป็นมูลค่าเงินปัจจุบันของเงิน 47,532.42 บาท

ค่างวด

ในชีวิตปัจจุบัน นักเรียนคงได้เห็นการรับหรือจ่ายเงินเป็นงวด ๆ เช่น

- การฝากเงินในธนาคารเป็นประจำทุกเดือน
- การซื้อสินค้าแบบผ่อนส่ง
- การจ่ายค่าซื้อบ้าน
- การจ่ายค่าเบี้ยประกันชีวิตรายปี
- การรับเงินเดือนทุกเดือน

ซึ่งจะเรียกการรับหรือจ่ายเงินลักษณะนี้ว่า การรับหรือจ่ายค่างวด

การรับหรือจ่ายค่างวด มีลักษณะ 3 ประการ ดังนี้

1. รับหรือจ่ายเท่ากันทุกงวด
2. รับหรือจ่ายติดต่อกันทุกงวด
3. รับหรือจ่ายต้นงวดหรือสิ้นงวด

ตัวอย่างการรับหรือจ่ายค่างวด เช่น

- การนำเงินไปฝากธนาคารทุกต้นปี ปีละ 30,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี
- การซื้อรถยนต์แบบผ่อนส่ง โดยทำสัญญากับผู้จำหน่ายรถยนต์ว่าจะผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน เดือนละ 7,500 บาท เป็นเวลา 5 ปี
- การจ่ายเบี้ยประกันชีวิต โดยจ่ายเบี้ยประกันทุกเดือนเดือนละ 2,500 บาท เป็นเวลา 10 ปี

การหาเงินรวมของค่างวดทั้งหมด

เมื่อมีการรับหรือจ่ายค่างวดติดต่อกันเป็นระยะเวลาหนึ่ง โดยกำหนดอัตราดอกเบี้ยคงที่ตลอด

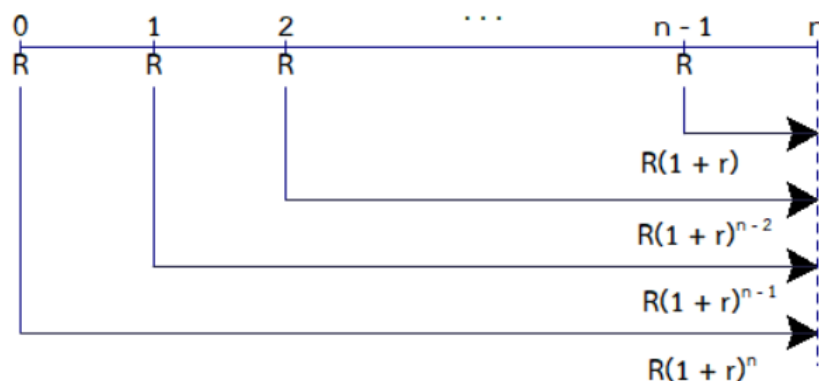
ระยะเวลาดังกล่าว เมื่อสิ้นสุดระยะเวลาที่กำหนด เงินรวมของค่างวดทั้งหมดจะเท่ากับผลบวกของ

มูลค่าเงินอนาคตของค่างวดแต่ละงวด การคำนวณหาเงินรวมทั้งหมดจะแบ่งเป็น 2 กรณี คือ ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวดและค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนต้นเป็นงวดรวมทั้งหมด n งวด อัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

ให้ $r = \frac{i}{100}$ จะได้แผนภาพแสดงค่างวด ดังนี้



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R(1+r) + R(1+r)^2 + \dots + R(1+r)^n$

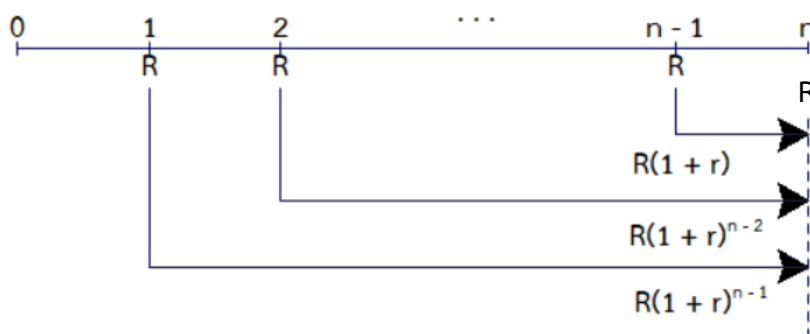
จึงเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ n พจน์แรก คือ $R(1+r)$ และอัตราส่วนร่วมคือ $1+r$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ

$$\frac{R(1+r)(1-(1+r)^n)}{1-(1+r)} \text{ ซึ่งเท่ากับ } \frac{R(1+r)((1+r)^n - 1)}{r}$$

ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

พิจารณาการรับจ่ายเงินแต่ละงวด โดยแต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนสิ้นงวดรวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R + R(1+r) + (1+r)^2 + \dots + R(1+r)^{n-1}$
 จึงเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ n พจน์แรก คือ R และอัตราส่วนร่วมคือ $1+r$
 ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ

$$\frac{R(1-(1+r)^n)}{1-(1+r)} \text{ ซึ่งเท่ากับ } \frac{R((1+r)^n-1)}{r}$$

ตัวอย่างที่ 8 เพ็ญฝากเงิน 100 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือนเป็นเวลา 2 ปี ได้อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปีโดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 เพ็ญได้เงินรวมเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์เพ็ญฝากเงินหรือจ่ายค่างวดตอนต้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

$$\text{ในที่นี้ } R = 100, n = 24, i = \frac{6}{12} = 0.5 \text{ และ } r = \frac{0.5}{100} = 0.005$$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เงินรวมของเพ็ญ คือ

$$100(1.005) + 100(1.005)^2 + \dots + 100(1.005)^{24}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ พจน์แรกคือ $100(1.005)$

และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

$$\text{จะได้ เงินรวม } \frac{100(1.005)(1-(1.005)^{24})}{1-1.005} = \frac{100(1.005)((1.005)^{24}-1)}{1.005-1}$$

หรือประมาณ 2,555.91 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เพ็ญจะได้ประมาณ 2,555.91 บาท

ตัวอย่างที่ 9 สายฟ้าฝากเงิน 100 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 2 ปี ได้อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปีโดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 เพ็ญได้เงินรวมเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์สายฟ้าฝากเงินหรือจ่ายค่างวดตอนสิ้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

$$\text{ในที่นี้ } R = 100, n = 24, i = \frac{6}{12} = 0.5 \text{ และ } r = \frac{0.5}{100} = 0.005$$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เงินรวมของสายฟ้า คือ

$$100 + 100(1.005) + 100(1.005)^2 + \dots + 100(1.005)^{23}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ พจน์แรกคือ 100

และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

$$\text{จะได้ เงินรวม } \frac{100(1-(1.005)^{24})}{1-1.005} = \frac{100((1.005)^{24}-1)}{1.005-1}$$

หรือประมาณ 2,543.20 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 สายฟ้าจะได้ประมาณ 2,543.20 บาท

ตัวอย่างที่ 10 น้ำทิพย์ซื้อเครื่องซักผ้าราคา 20,000 บาท โดยตกลงจ่ายเงินเดวาร์ 5,000 บาท และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินที่เท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 6 เดือน โดยชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน น้ำทิพย์จะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด

วิธีทำ ให้ R แทน ค่างวดที่น้ำทิพย์จะต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

$$\text{ในที่นี้ } i = \frac{12}{12} = 1 \text{ และ } r = \frac{1}{100} = 0.01$$

เนื่องจากน้ำทิพย์จ่ายเงินเดวาร์ 5,000 บาท ทำให้เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 15,000 บาท

โดยน้ำทิพย์จะผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 6

เดือน ดังนั้น จะต้องหามูลค่าเงินปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1, 2, 3, ..., 6 คือ

$$R(1.01)^{-1} + R(1.01)^{-2} + \dots + R(1.01)^{-6}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 6 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1.01)^{-1}$

และอัตราส่วนร่วม คือ $(1.01)^{-1}$

ดังนั้น ผลรวมของมูลค่าเงินปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งหมดคือ $\frac{R(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-6})}{1-(1.01)^{-1}}$

เนื่องจากน้ำทิพย์เหลือเงินที่ต้องชำระ 15,000 บาท จะได้ว่า

$$15,000 = \frac{R(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-6})}{1-(1.01)^{-1}}$$

$$R = \frac{15,000(1-(1.01)^{-1})}{(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-6})}$$

$$\approx 2,588.23$$

ดังนั้น น้ำทิพย์จะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 2,588.23 บาท

6. การวัดและการประเมินผล

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | วิธีการ | เครื่องมือ | เกณฑ์การผ่าน |
|---|--|---|--|
| ด้านความรู้ มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับดอกเบี้ยยทบต้นได้อย่างถูกต้อง | - ตรวจสอบเอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี้ยทบต้น” | - เอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี้ยทบต้น” - แบบประเมินผลด้านความรู้ | - เอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี้ยทบต้น” ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 |
| มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับมูลค่าของเงินได้อย่างถูกต้อง | - ตรวจสอบเอกสารแนะแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” | - เอกสารแนะแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” - แบบประเมินผลด้านความรู้ | - ทำเอกสารแนะแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 |
| มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับค่างวดได้อย่างถูกต้อง | - ตรวจสอบเอกสารแนะแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างวด” | - เอกสารแนะแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างวด” - แบบประเมินผลด้านความรู้ | - ทำเอกสารแนะแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างวด” ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 |
| นำการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | - ตรวจสอบแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ข้อ 1 - ข้อ 3 - การทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 ข้อ 1 - ข้อ 4 | - แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 - แบบประเมินผลด้านความรู้ | - ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ข้อ 1 - ข้อ 3 ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 ข้อ 1 - ข้อ 4 ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 |
| นำมูลค่าของเงินไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | - ตรวจสอบแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ข้อ 4 - ข้อ 5 | - แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” | - ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ข้อ 4 - ข้อ 5 ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 |

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | วิธีการ | เครื่องมือ | เกณฑ์การผ่าน |
|---|--|---|---|
| | <ul style="list-style-type: none"> - การทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 ข้อ 5 - ข้อ 7 | <ul style="list-style-type: none"> - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 - แบบประเมินผลด้านความรู้ | แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 ข้อ 5 - ข้อ 7 ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 |
| นำค่าวงไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | <ul style="list-style-type: none"> - ตรวจแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ข้อ 6 - ข้อ 8 - การทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 ข้อ 8 - ข้อ 10 | <ul style="list-style-type: none"> - แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 - แบบประเมินผลด้านความรู้ | <ul style="list-style-type: none"> - ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ข้อ 6 - ข้อ 8 ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 ข้อ 8 - ข้อ 10 ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 |
| ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นได้ | ตรวจใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี้ยทบต้น” | <ul style="list-style-type: none"> - ใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี้ยทบต้น” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป |
| ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การคิดดอกเบี้ยทบต้นได้ | ตรวจทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี้ยทบต้น” | <ul style="list-style-type: none"> - ทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี้ยทบต้น” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การคิดดอกเบี้ยทบต้นได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป |

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | วิธีการ | เครื่องมือ | เกณฑ์การผ่าน |
|--|---|---|---|
| ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่าของเงินได้ | ตรวจใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” | - ใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่าของเงินได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป |
| ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่าของเงินได้ | ตรวจใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” | - ใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่าของเงินได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป |
| ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่างวดได้ | ตรวจใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” | - ใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่างวดได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป |
| ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่างวดได้ | ตรวจใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” | - ใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่างวดได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป |

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | วิธีการ | เครื่องมือ | เกณฑ์การผ่าน |
|--|---|---|---|
| ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ | ตรวจการร่วม กิจกรรมวันสำคัญ เกี่ยวกับ รักชาติ ศาสนา กษัตริย์ | - บันทึกการร่วม กิจกรรมวันสำคัญ เกี่ยวกับ รักชาติ ศาสนา กษัตริย์ | นักเรียนมีความรัก ชาติ ศาสน์ กษัตริย์ อยู่ในระดับดีขึ้นไป |
| ข้อสัถยสุจริต | การทำแบบทดสอบ เก็บคะแนนหลังเรียน ครั้งที่ 7 | - แบบทดสอบเก็บ คะแนนหลังเรียนครั้ง ที่ 7 - แบบประเมินผล ด้านคุณลักษณะที่พึง ประสงค์ | นักเรียนมีความ ข้อสัถยสุจริต อยู่ใน ระดับดีขึ้นไป |
| มีวินัย | บันทึกการแต่งกาย | - แบบบันทึกการแต่ง กาย - แบบประเมินผล ด้านคุณลักษณะที่พึง ประสงค์ | นักเรียนมีวินัย อยู่ใน ระดับดีขึ้นไป |
| ใฝ่เรียนรู้ | บันทึกการเข้าเรียน | - แบบบันทึกการเข้า เรียน - แบบประเมินผล ด้านคุณลักษณะที่พึง ประสงค์ | นักเรียนใฝ่เรียนรู้ อยู่ ในระดับดีขึ้นไป |
| มุ่งมั่นในการทำงาน | - การส่งแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” | - แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับ และอนุกรม” - แบบประเมินผล ด้านคุณลักษณะที่พึง ประสงค์ | นักเรียนมุ่งมั่นในการ ทำงานอยู่ในระดับดี ขึ้นไป |
| มีจิตสาธารณะ | ตรวจการทำกิจกรรม สาธารณะประโยชน์ | - แบบบันทึกการทำ กิจกรรมสาธารณะ ประโยชน์ - แบบประเมินผล ด้านคุณลักษณะที่พึง ประสงค์ | นักเรียนมีจิต สาธารณะอยู่ในระดับ ดีขึ้นไป |

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | วิธีการ | เครื่องมือ | เกณฑ์การผ่าน |
|--|--|--|--|
| รักความเป็นไทย | ตรวจร่วมกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับประเพณี ศิลปะ และวัฒนธรรมไทย | <ul style="list-style-type: none"> - บันทึกการร่วมกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับประเพณี ศิลปะ และวัฒนธรรมไทย - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ | นักเรียนรักความเป็นไทยอยู่ในระดับดีขึ้นไป |
| อยู่อย่างพอเพียง | ตรวจสอบสมุดแบบฝึกหัดชิ้นงาน | <ul style="list-style-type: none"> - สมุดแบบฝึกหัดชิ้นงาน - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ | นักเรียนอยู่อย่างพอเพียงอยู่ในระดับดีขึ้นไป |
| ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน ใช้เทคโนโลยีในการทบทวนความรู้ การประยุกต์ลำดับและอนุกรมใช้แก้ สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | <ul style="list-style-type: none"> - ตรวจการใช้สื่อ Power point เรื่อง “ลำดับ” และเรื่อง “อนุกรม” | <ul style="list-style-type: none"> - ใช้สื่อ Power point เรื่อง “ลำดับ” และเรื่อง “อนุกรม” - แบบประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน | นักเรียนสามารถใช้เทคโนโลยีในการทบทวนความรู้การประยุกต์ลำดับและอนุกรมใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป |
| สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำ กิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้ | ตรวจการทำงานกลุ่ม | <ul style="list-style-type: none"> - แบบบันทึกการทำงานกลุ่ม - แบบประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน | นักเรียนสามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป |

7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ให้นักเรียนจัดกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกันและทบทวนเรื่อง อนุกรมเรขาคณิต ใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม” (ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.2 ครูพูดเกริ่นนำเกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง “ดอกเบี๋ย” กับนักเรียน โดย

ให้นักเรียนยกตัวอย่างในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องกับเรื่อง “ดอกเบี๋ย” โดยการสนทนากลุ่มตอบระหว่างครู(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ตัวอย่างคำตอบ

- อัตราดอกเบี๋ยเงินกู้
- ดอกเบี๋ยเงินฝากกับธนาคารหรือสถาบันการเงิน
- ดอกเบี๋ยการผ่อนชำระสินค้าต่าง ๆ

ขั้นสอน

7.3 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบต้น” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันทำพร้อมให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 7 เรื่อง “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ประกอบการทำเอกสารแนะแนวทาง ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.4 ครูสุ่มให้นักเรียนนำเสนอคำตอบจากการทำเอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบต้น” ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติมหรือให้นักเรียนกลุ่มอื่นร่วมกันเฉลย(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.5 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบต้น” และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ภายในกลุ่มและนอกกลุ่ม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.6 ครูสุ่มให้นักเรียนนำเสนอคำตอบจากการทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบต้น” ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติมหรือให้นักเรียนกลุ่มอื่นร่วมกันเฉลย(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นเปรียบเทียบหรือวิเคราะห์

7.7 ครูเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบต้น” ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.8 ครูเฉลยใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทนต์” ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.9 ครูยกตัวอย่างอื่น ๆ เพิ่มเติม โดยใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม”(ดอกเบี๋ยทนต์) หน้าที่ 33 – 38 (ครูเลือกตัวอย่างตามความเหมาะสมของเวลา) ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 20 นาที)

ขั้นสรุป

7.10 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันสรุปเรื่อง “ดอกเบี๋ยทนต์” โดยการใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน อาจใช้การสุ่มนักเรียนบางคนเพื่อสรุป(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ขั้นนำไปใช้

7.11 ครูมอบหมายให้นักเรียนแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” (ใช้เวลาประมาณ 10 นาที) ข้อ 1 - ข้อ 3 ถ้าไม่เสร็จให้ทำต่อเป็นการบ้าน ทำชิ้นงานนำเสนอการประยุกต์ลำดับและอนุกรมใช้แก่สถานการณ์ในชีวิตประจำวัน นำเสนอเป็นภาพโปสเตอร์จากวัสดุเหลือใช้

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นเตรียม

7.12 ให้นักเรียนจัดกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกันและทบทวนเรื่อง “ดอกเบี๋ยทนต์” ใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” (ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.13 ครูพูดเกริ่นนำเกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” กับนักเรียน โดย

ให้นักเรียนยกตัวอย่างหรือแสดงความคิดเห็น “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ในความคิดเห็นของนักเรียนเป็นอย่างไร โดยการใช้การสนทนาถามตอบระหว่างครู(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ตัวอย่างคำตอบ

- มูลค่าเงินปัจจุบันคือเงินที่ฝากกับธนาคารหรือสถาบันการเงินในปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคตคือเงินที่เกิดขึ้นจากเงินจากดอกเบี้ยของการฝากเงินกับเงินที่ฝาก
- มูลค่าเงินปัจจุบัน คือ มูลค่าเงิน ณ ปัจจุบันที่เกิดขึ้นในอนาคต

- มูลค่าเงินอนาคต คือ มูลค่าเงินในอนาคตในช่วงเวลาหนึ่ง เป็นต้น

ชั้นสอน

7.14 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต”ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันทำพร้อมให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 7 เรื่อง “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ประกอบการทำเอกสารแนะแนวทาง ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.15 ครูครูสุ่มให้นักเรียนนำเสนอคำตอบจากการทำเอกสารแนะแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติมหรือให้นักเรียนกลุ่มอื่นร่วมกันเฉลย(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.16 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ภายในกลุ่มและนอกกลุ่ม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.17 ครูสุ่มให้นักเรียนนำเสนอคำตอบจากการทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติมหรือให้นักเรียนกลุ่มอื่นร่วมกันเฉลย(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ชั่วโมงที่ 4

ชั้นเปรียบเทียบหรือวิเคราะห์

7.18 ครูเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต”ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.19 ครูเฉลยใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต”ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.20 ครูยกตัวอย่างอื่น ๆ เพิ่มเติม โดยใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม”(มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต) หน้าที่ 39 – 42 (ครูเลือกตัวอย่างตามความเหมาะสมของเวลา) ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 20 นาที)

ขั้นสรุป

7.21 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันสรุปเรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน อาจใช้การสุ่มนักเรียนบางคนเพื่อสรุป(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ขั้นนำไปใช้

7.22 ครูมอบหมายให้นักเรียนแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” (ใช้เวลาประมาณ 10 นาที) ข้อ 4 - ข้อ 5 ถ้าไม่เสร็จให้ทำต่อเป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 5

ขั้นเตรียม

7.23 ให้นักเรียนจัดกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกันและทบทวนเรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” (ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.24 ครูพูดเกริ่นนำเกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง “ค่างวด” กับนักเรียน โดย

ให้นักเรียนยกตัวอย่างหรือแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับ “ค่างวด” โดยการสนทนาถามตอบระหว่างครู(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ตัวอย่างคำตอบ

- เงินที่ผ่อนชำระค่าสินค้า ได้แก่ ผ่อนรถ ผ่อนบ้าน เป็นต้น
- เงินฝากประจำกับธนาคารหรือสถาบันการเงิน
- เงินค่าประกันชีวิต

ขั้นสอน

7.25 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างวด” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันทำ พร้อมให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 7 เรื่อง “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ประกอบการทำเอกสารแนะแนวทาง ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.26 ครูสุ่มให้นักเรียนนำเสนอคำตอบจากการทำเอกสารแนะแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างวด” ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติมหรือให้นักเรียนกลุ่มอื่นร่วมกันเฉลย(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.27 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” และแลกเปลี่ยนเรียนรู้ภายในกลุ่มและนอกกลุ่ม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.28 ครูสุ่มให้นักเรียนนำเสนอคำตอบจากการทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติมหรือให้นักเรียนกลุ่มอื่นร่วมกันเฉลย(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ชั่วโมงที่ 6

ขั้นเปรียบเทียบหรือวิเคราะห์

7.29 ครูเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างด” ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.30 ครูเฉลยใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างด” ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.31 ครูยกตัวอย่างอื่น ๆ เพิ่มเติม โดยใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม”(ค่างด) หน้าที่ 43 – 46 (ครูเลือกตัวอย่างตามความเหมาะสมของเวลา) ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 20 นาที)

ขั้นสรุป

7.32 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันสรุปเรื่อง “ค่างด” โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน อาจใช้การสุ่มนักเรียนบางคนเพื่อสรุป(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ขั้นนำไปใช้

7.33 ครูมอบหมายให้นักเรียนแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” (ใช้เวลาประมาณ 10 นาที) ข้อ 6 – ข้อ 8 ถ้าไม่เสร็จให้ทำต่อเป็นการบ้าน

ชั่วโมงที่ 7

7.34 ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” โดยการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ของนักเรียนภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่ม

7.35 ให้นักเรียนออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน ครูคอยแนะนำเพิ่มเติม(ใช้เวลาประมาณ 30 นาที)

7.36 นักเรียนทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 (ใช้เวลาประมาณ 30 นาที)

7.37 มอบหมายให้นักเรียนทบทวนความรู้ เรื่อง “ลำดับ” และ “อนุกรม” โดยใช้สื่อโปรแกรม Power Point “ลำดับ” และ “อนุกรม”

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

| สื่อเอกสาร | สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี | แหล่งการเรียนรู้ | สื่ออื่น ๆ |
|--|--|------------------|------------|
| <ul style="list-style-type: none"> - เอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี้ยทบต้น” - เอกสารแนะแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” - เอกสารแนะแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างวด” - ใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี้ยทบต้น” - ใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” - ใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” - ใบความรู้ที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” - แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” | <ul style="list-style-type: none"> - สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม”(การประยุกต์ลำดับและอนุกรม) | - | - |

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | นักเรียนที่ผ่าน | | นักเรียนที่ไม่ผ่าน | |
|--|-----------------|--------|--------------------|--------|
| | จำนวน (คน) | ร้อยละ | จำนวน (คน) | ร้อยละ |
| ด้านความรู้ | | | | |
| มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับดอกเบี้ยทบต้นได้อย่างถูกต้อง | | | | |
| มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับมูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคตได้อย่างถูกต้อง | | | | |
| มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับค่างวดได้อย่างถูกต้อง | | | | |
| นำการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | | | | |
| นำมูลค่าของเงินใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | | | | |
| นำค่างวดไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | | | | |
| ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | | | | |
| ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นได้ | | | | |
| ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การคิดดอกเบี้ยทบต้นได้ | | | | |
| ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่าของเงินได้ | | | | |
| ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่าของเงินได้ | | | | |
| ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่างวดได้ | | | | |
| ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่างวดได้ | | | | |
| ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ | | | | |
| รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ | | | | |
| มีวินัย | | | | |
| ใฝ่เรียนรู้ | | | | |
| มุ่งมั่นในการทำงาน | | | | |
| ซื่อสัตย์สุจริต | | | | |
| มีจิตสาธารณะ | | | | |

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | นักเรียนที่ผ่าน | | นักเรียนที่ไม่ผ่าน | |
|---|-----------------|--------|--------------------|--------|
| | จำนวน (คน) | ร้อยละ | จำนวน (คน) | ร้อยละ |
| รักความเป็นไทย | | | | |
| อยู่อย่างพอเพียง | | | | |
| ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้ | | | | |
| ใช้เทคโนโลยีในการทบทวนความรู้การประยุกต์ลำดับและ อนุกรมใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | | | | |

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางวาสนา ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา



ใบความรู้ที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

- มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับดอกเบี้ยทบต้นได้อย่างถูกต้อง
- มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับมูลค่าของเงินได้อย่างถูกต้อง
- มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับค่ารายงวดได้อย่างถูกต้อง
- นำการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้
- นำมูลค่าของเงินไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้
- นำค่ารายงวดไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

ดอกเบี้ยทบต้น

การหาเงินรวมจากการฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี ซึ่งเมื่อสิ้นปีที่ n จะได้ เงินรวม $P(1 + r)^n$ บาท โดยที่ $r = \frac{i}{100}$

ในกรณีที่มีการคิดดอกเบี้ยทบต้นมากกว่าปีละครั้ง เช่น ธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นสำหรับเงินฝากในบัญชีออมทรัพย์ทุก 6 เดือน จะสามารถคำนวณเงินรวมได้ $P(1 + r)^n$ เมื่อ P แทนเงินต้น n แทนจำนวนงวด และ r แทนอัตราดอกเบี้ยที่คิดแบบทบต้นต่องวด

ในทางปฏิบัติ อัตราดอกเบี้ยที่ระบุจะเป็นอัตราดอกเบี้ยต่อปี ดังนั้น ในการคำนวณจะต้องแปลงให้เป็นอัตราต่องวดเสียก่อน เช่น อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดทบต้นทุก 3 เดือน แสดงว่าใน 1 ปี จะคิดดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้ง จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6\%}{4} = 1.5\%$ หรือ 0.015

ตัวอย่างที่ 1 ฝากเงิน 50,000 บาท ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสามเดือน เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี จะมีเงินรวมเท่าใด โดยที่ไม่มีการฝากและถอนในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6\%}{4} = 1.5\%$ หรือ 0.015

จำนวนงวดทั้งหมดเท่ากับ $5(4) = 20$ งวด

ให้ a_i แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ i

$$\text{จะได้ } a_1 = 50,000 + 50,000(0.015) = 50,000(1.015)$$

$$a_2 = a_1 + a_1(0.015) = a_1(1.015) = 50,000(1.015)^2$$

$$a_3 = a_2 + a_2(0.015) = a_2(1.015) = 50,000(1.015)^3$$

$$a_{20} = a_{19} + a_{19}(0.015) = a_{19}(1.015) = 50,000(1.015)^{20}$$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อครบ 5 ปี $50,000(1.015)^{20}$ หรือประมาณ 67,342.75 บาท

หมายเหตุจากตัวอย่างที่ 1 จะเห็นว่า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น 1.015

สามารถสรุปวิธีหาเงินรวมที่ได้จากการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี จะได้ เงินรวม $P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

ตัวอย่างที่ 2 ฝากเงิน 20,000 บาท กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งที่ให้อัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ 2 ครั้ง จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี โดยไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $P = 20,000$ บาท, $k = 2$, $n = 10$ และ $r = 0.04$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned} \text{จำนวนเงินรวม คือ } 20,000\left(1 + \frac{0.04}{2}\right)^{2(10)} &= 20,000\left(1 + \frac{0.04}{2}\right)^{20} \\ &= 20,000(1 + 0.02)^{20} \\ &= 20,000(1.02)^{20} \end{aligned}$$

หรือประมาณ 29,718.95 บาท

ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี จะมีเงินประมาณ 29,718.95 บาท

ตัวอย่างที่ 3 ฝากเงิน 50,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งที่ให้อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี โดยไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $P = 50,000$ บาท, $k = 4$, $n = 10$ และ $r = 0.06$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned} \text{จำนวนเงินรวม คือ } 50,000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{4(10)} &= 50,000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{40} \\ &= 50,000(1 + 0.015)^{40} \end{aligned}$$

$$= 50,000(1.015)^{40}$$

หรือประมาณ 90,700.92 บาท

ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี จะมีเงินประมาณ 90,700.92 บาท

ตัวอย่างที่ 4 ฝากเงิน 10,000 บาท กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่ง โดยสถาบันการเงินคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน เมื่อสิ้นปีที่ 3 สถาบันการเงินแจ้งว่ามีเงินในบัญชีประมาณ 12,518 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปีที่สถาบันการเงินกำหนด

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ $P = 10,000$ บาท, $k = 4$ และ $n = 3$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\text{จำนวนเงินรวม คือ } 10,000 \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4(3)} = 12,518$$

$$10,000 \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{12} = 12,518$$

$$\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{12} = 1.2518$$

$$1 + \frac{r}{4} = \sqrt[12]{1.2518}$$

$$r = 4 \left(\sqrt[12]{1.2518} - 1 \right)$$

$$\approx 0.075556$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยต่อปีที่สถาบันการเงินกำหนดประมาณ 7.56% ต่อปี

มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

สมมติว่าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 1,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละครั้ง เมื่อฝากครบ 2 ปี จะได้เงินรวม $1,000(1 + 0.05)^2$ หรือ 1,102.5 บาท ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าเงิน 1,102.5 เป็นมูลค่าอนาคต ส่วนเงิน 1,000 เป็นมูลค่าเงินปัจจุบัน

ถ้าลงทุน P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง เป็นเวลา n ปี

กำหนดให้ $r = \frac{i}{100}$ แล้วเมื่อครบ n ปีเงินรวมที่ได้คือ

$$S = P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

เรียก S ว่ามูลค่าเงินอนาคตของเงินต้น P ในทางกลับกัน จะเรียก P ว่ามูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S ดังนั้น มูลค่าเงินปัจจุบัน P ของเงินรวม S คือ

$$P = S \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{-kn}$$

ตัวอย่างที่ 5 ไก่ต้องการฝากเงินกับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน ถ้าไก่ต้องการให้มีเงินในบัญชีประมาณ 15,000 บาท เมื่อสิ้นสุดปีที่ 3 เขาจะต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อยเท่าใด

วิธีทำ ในที่นี้ $S = 15,000$, $k = 12$, $n = 3$ และ $r = 0.03$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 15,000 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= S \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{-kn} \\ &= 15,000 \left(1 + \frac{0.03}{12} \right)^{-36} \\ &= 15,000 (1 + 0.0025)^{-36} \\ &= 15,000 (1.0025)^{-36} \\ &\approx 13,710.51 \end{aligned}$$

ดังนั้น ไก่จะต้องฝากเงินต้นไว้อย่างน้อย 13,710.51 บาท

นั่นคือจากตัวอย่างที่ 5 จะกล่าวว่า **13,710.51 บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบันของเงิน 15,000 บาท**

ตัวอย่างที่ 6 ปลาได้รับเงินออม 12,359.35 บาท จากการฝากเงินจำนวนหนึ่งกับสถาบันการเงินเมื่อ 15 ปีที่แล้ว โดยไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้ ถ้าสถาบันการเงินคงอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาเงินต้นที่ปลาฝากไว้เมื่อ 15 ปีก่อน

วิธีทำ ในที่นี้ $S = 12,359.35$, $k = 2$, $n = 15$ และ $r = 0.03$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 12,359.35 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= S \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{-kn} \\ &= 12,359.35 \left(1 + \frac{0.03}{2} \right)^{-30} \\ &= 12,359.35 (1 + 0.015)^{-30} \\ &= 12,359.35 (1.015)^{-30} \end{aligned}$$

$$\approx 7,907.05$$

ดังนั้น เมื่อ 15 ปีปลาฝากเงินต้นไว้ 7,907.05 บาท

นั่นคือจากตัวอย่างที่ 6 จะกล่าวว่า **7,907.05 บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบันของเงิน 12,359.35 บาท**

ตัวอย่างที่ 7 นกูกู้เงินจากแมว โดยกำหนดชำระหนี้ทั้งหมดในอีก 3 ปีข้างหน้า เป็นเงิน 47,532.42 บาท ถ้าแมวกำหนดดอกเบี้ย 10% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี จงหาจำนวนเงินที่นกูกู้จากแมว

วิธีทำ ในที่นี้ $S = 47,532.42$, $k = 1$, $n = 3$ และ $r = 0.10$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 47,532.42 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn} \\ &= 47,532.42 \left(1 + \frac{0.10}{1}\right)^{-3} \\ &= 47,532.42 (1 + 0.10)^{-3} \\ &= 47,532.42 (1.10)^{-3} \\ &\approx 35,711.81 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเงินที่นกูกู้จากแมวประมาณ 35,11.81 บาท

นั่นคือจากตัวอย่างที่ 7 จะกล่าวว่า **35,11.81 บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบันของเงิน 47,532.42 บาท**

ค่างวด

ในชีวิตปัจจุบัน นักเรียนคงได้เห็นการรับหรือจ่ายเงินเป็นงวด ๆ เช่น

- การฝากเงินในธนาคารเป็นประจำทุกเดือน
- การซื้อสินค้าแบบผ่อนส่ง
- การจ่ายค่าซื้อบ้าน
- การจ่ายค่าเบี้ยประกันชีวิตรายปี
- การรับเงินเดือนทุกเดือน

ซึ่งจะเรียกการรับหรือจ่ายเงินลักษณะนี้ว่า การรับหรือจ่ายค่างวด

การรับหรือจ่ายค่างวด มีลักษณะ 3 ประการ ดังนี้

4. รับหรือจ่ายเท่ากันทุกงวด
5. รับหรือจ่ายติดต่อกันทุกงวด
6. รับหรือจ่ายต้นงวดหรือสิ้นงวด

ตัวอย่างการรับหรือจ่ายค่างวด เช่น

- การนำเงินไปฝากธนาคารทุกต้นปี ปีละ 30,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี
- การซื้อรถยนต์แบบผ่อนส่ง โดยทำสัญญากับผู้จำหน่ายรถยนต์ว่าจะผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน เดือนละ 7,500 บาท เป็นเวลา 5 ปี
- การจ่ายเบี้ยประกันชีวิต โดยจ่ายเบี้ยประกันทุกเดือนเดือนละ 2,500 บาท เป็นเวลา 10 ปี

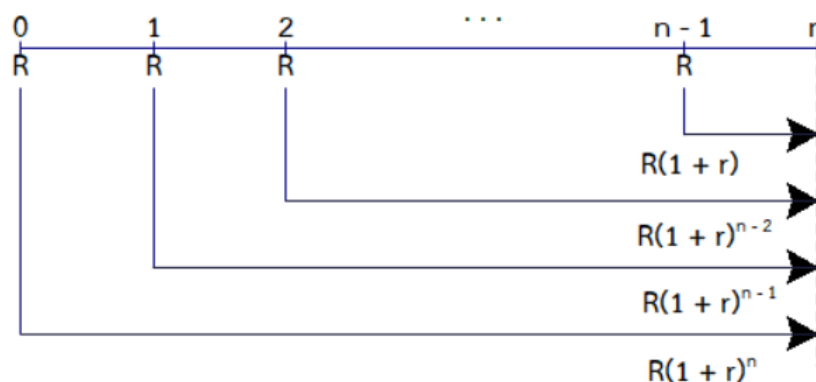
การหาเงินรวมของค่างวดทั้งหมด

เมื่อมีการรับหรือจ่ายค่างวดติดต่อกันเป็นระยะเวลาหนึ่ง โดยกำหนดอัตราดอกเบี้ยคงที่ตลอด ระยะเวลาดังกล่าว เมื่อสิ้นสุดระยะเวลาที่กำหนด เงินรวมของค่างวดทั้งหมดจะเท่ากับผลบวกของ มูลค่าเงินอนาคตของค่างวดแต่ละงวด การคำนวณหาเงินรวมทั้งหมดจะแบ่งเป็น 2 กรณี คือ ค่างวดที่ รับหรือจ่ายตอนต้นงวดและค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนต้น เป็นงวดรวมทั้งหมด n งวด อัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

ให้ $r = \frac{i}{100}$ จะได้แผนภาพแสดงค่างวด ดังนี้



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R(1+r) + R(1+r)^2 + \dots + R(1+r)^n$

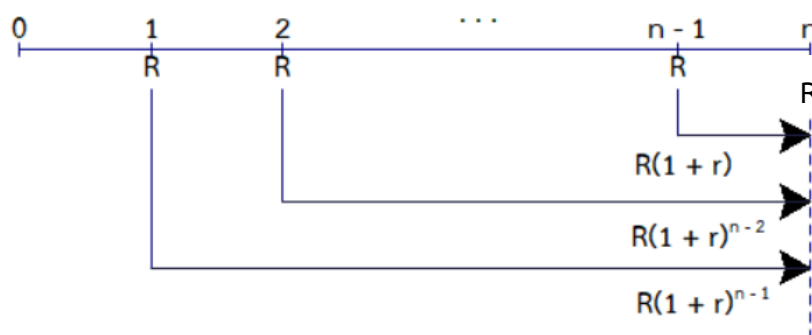
จึงเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ n พจน์แรก คือ $R(1+r)$ และอัตราส่วนร่วมคือ $1+r$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ

$$\frac{R(1+r)(1-(1+r)^n)}{1-(1+r)} \text{ ซึ่งเท่ากับ } \frac{R(1+r)((1+r)^n-1)}{r}$$

ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

พิจารณาการรับจ่ายเงินแต่ละงวด โดยแต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนสิ้นงวด รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$



จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R + R(1+r) + R(1+r)^2 + \dots + R(1+r)^{n-1}$

จึงเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ n พจน์แรก คือ R และอัตราส่วนร่วมคือ $1+r$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ

$$\frac{R(1-(1+r)^n)}{1-(1+r)} \text{ ซึ่งเท่ากับ } \frac{R((1+r)^n-1)}{r}$$

ตัวอย่างที่ 8 เพ็ญฝากเงิน 100 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือนเป็นเวลา 2 ปี ได้อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปีโดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 เพ็ญได้เงินรวมเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์เพ็ญฝากเงินหรือจ่ายค่างวดตอนต้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

$$\text{ในที่นี้ } R = 100, n = 24, i = \frac{6}{12} = 0.5 \text{ และ } r = \frac{0.5}{100} = 0.005$$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เงินรวมของเพ็ญ คือ

$$100(1.005) + 100(1.005)^2 + \dots + 100(1.005)^{24}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ พจน์แรกคือ $100(1.005)$

และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

$$\text{จะได้ เงินรวม } \frac{100(1.005)(1-(1.005)^{24})}{1-1.005} = \frac{100(1.005)((1.005)^{24}-1)}{1.005-1}$$

หรือประมาณ 2,555.91 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เพ็ญจะได้ประมาณ 2,555.91 บาท

ตัวอย่างที่ 9 สายฟ้าฝากเงิน 100 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 2 ปี ได้อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปีโดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 2 เพ็ญได้เงินรวมเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์สายฟ้าฝากเงินหรือจ่ายค่างวดตอนสิ้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 2 ปี

$$\text{ในที่นี้ } R = 100, n = 24, i = \frac{6}{12} = 0.5 \text{ และ } r = \frac{0.5}{100} = 0.005$$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 เงินรวมของสายฟ้า คือ

$$100 + 100(1.005) + 100(1.005)^2 + \dots + 100(1.005)^{23}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 24 พจน์ พจน์แรกคือ 100

และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

$$\text{จะได้ เงินรวม } \frac{100(1-(1.005)^{24})}{1-1.005} = \frac{100((1.005)^{24}-1)}{1.005-1}$$

หรือประมาณ 2,543.20 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 2 สายฟ้าจะได้ประมาณ 2,543.20 บาท

ตัวอย่างที่ 10 น้าทิพย์ซื้อเครื่องซักผ้าราคา 20,000 บาท โดยตกลงจ่ายเงินเดวาร์ 5,000 บาท และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นจำนวนเงินที่เท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 6 เดือน โดยชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน น้าทิพย์จะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด

วิธีทำ ให้ R แทน ค่างวดที่น้าทิพย์จะต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

$$\text{ในที่นี้ } i = \frac{12}{12} = 1 \text{ และ } r = \frac{1}{100} = 0.01$$

เนื่องจากน้าทิพย์จ่ายเงินเดวาร์ 5,000 บาท ทำให้เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 15,000 บาท

โดยน้าทิพย์จะผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 6

เดือน ดังนั้น จะต้องหามูลค่าเงินปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1, 2, 3, ..., 6 คือ

$$R(1.01)^{-1} + R(1.01)^{-2} + \dots + R(1.01)^{-6}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 6 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1.01)^{-1}$

และอัตราส่วนร่วม คือ $(1.01)^{-1}$

ดังนั้น ผลรวมของมูลค่าเงินปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งหมดคือ $\frac{R(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-6})}{1-(1.01)^{-1}}$

เนื่องจากน้าทิพย์เหลือเงินที่ต้องชำระ 15,000 บาท จะได้ว่า

$$15,000 = \frac{R(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-6})}{1-(1.01)^{-1}}$$

$$R = \frac{15,000(1-(1.01)^{-1})}{(1.01)^{-1}(1-(1.01)^{-6})}$$
$$\approx 2,588.23$$

ดังนั้น น้ำทิพย์จะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 2,588.23 บาท



เอกสารแนะแนวทางที่ 11 “ดอกเบี้ยทบต้น”

จุดประสงค์การเรียนรู้

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับดอกเบี้ยทบต้นได้อย่างถูกต้อง

คำชี้แจง

ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1. ฝากเงิน 40,000 บาท ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสามเดือน เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี จะมีเงินรวมเท่าใด โดยไม่มีการฝากและถอนในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{8\%}{4} = 2\%$ หรือ 0.02

จำนวนงวดทั้งหมดเท่ากับ $5(4) = 20$ งวด

ให้ a_i แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ i

$$\text{จะได้ } a_1 = 40,000 + 40,000(0.02) = 40,000(1.02)$$

$$a_2 = a_1 + a_1(0.02) = a_1(1.02) = 40,000(1.02)^2$$

$$a_3 = a_2 + a_2(0.02) = a_2(1.02) = 40,000(1.02)^3$$

.

.

.

$$a_{20} = a_{19} + a_{19}(0.02) = a_{19}(1.02) = 40,000(1.02)^{20}$$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อครบ 5 ปี $40,000(1.02)^{20}$ (หรือประมาณ 67,342.75 บาท)

หมายเหตุ จากข้อที่ 1 จะเห็นว่า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น 1.02

ข้อสังเกต

$$40,000(1.02)^{20} = 40,000(1 + 0.02)^{4(5)} = 40,000\left(1 + \frac{8\%}{4}\right)^{4(5)}$$

2. ฝากเงิน 60,000 บาท ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกหกเดือน เมื่อเวลาผ่านไป 8 ปี จะมีเงินรวมเท่าใด โดยไม่มีการฝากและถอนในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6\%}{2} = 3\%$ หรือ 0.03

จำนวนงวดทั้งหมดเท่ากับ $8(2) = 16$ งวด

ให้ a_i แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ i

$$\text{จะได้ } a_1 = 60,000 + 60,000(0.03) = 60,000(1.03)$$

$$a_2 = \dots + \dots (\dots) = \dots (\dots) = \dots (\dots)$$

$$a_3 = \dots + \dots (\dots) = \dots (\dots) = \dots (\dots)$$

.

.

.

$$a_{\dots} = \dots + \dots (\dots) = \dots (\dots) = \dots (\dots)$$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อครบ ปี หรือประมาณ บาท

หมายเหตุจากข้อที่ 2 จะเห็นว่า เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วม
เป็น

ข้อสังเกต $\dots (\dots) = \dots (\dots + \dots) = \dots (\dots + \dots) = \dots (\dots)$

สามารถสรุปวิธีหาเงินรวมที่ได้จากการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นได้ดังนี้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 11 “ดอกเบี้ยทบต้น”

1. ฝากเงิน 40,000 บาท ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสามเดือน เมื่อเวลาผ่านไป 5 ปี จะมีเงินรวมเท่าใด โดยไม่มีการฝากและถอนในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{8\%}{4} = 2\%$ หรือ 0.02

จำนวนงวดทั้งหมดเท่ากับ $5(4) = 20$ งวด

ให้ a_i แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ i

$$\text{จะได้ } a_1 = 40,000 + 40,000(0.02) = 40,000(1.02)$$

$$a_2 = a_1 + a_1(0.02) = a_1(1.02) = 40,000(1.02)^2$$

$$a_3 = a_2 + a_2(0.02) = a_2(1.02) = 40,000(1.02)^3$$

.

.

.

$$a_{20} = a_{19} + a_{19}(0.02) = a_{19}(1.02) = 40,000(1.02)^{20}$$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อครบ 5 ปี $40,000(1.02)^{20}$ (หรือประมาณ 67,342.75 บาท)

หมายเหตุ จากข้อที่ 1 จะเห็นว่า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น 1.02

ข้อสังเกต

$$40,000(1.02)^{20} = 40,000(1 + 0.02)^{4(5)} = 40,000\left(1 + \frac{8\%}{4}\right)^{4(5)}$$

2. ฝากเงิน 60,000 บาท ถ้าธนาคารให้ดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกหกเดือน เมื่อเวลาผ่านไป 8 ปี จะมีเงินรวมเท่าใด โดยไม่มีการฝากและถอนในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ อัตราดอกเบี้ยต่องวด คือ $\frac{6\%}{2} = 3\%$ หรือ 0.03

จำนวนงวดทั้งหมดเท่ากับ $8(2) = 16$ งวด

ให้ a_i แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ i

$$\text{จะได้ } a_1 = 60,000 + 60,000(0.03) = 60,000(1.03)$$

$$a_2 = a_1 + a_1(0.03) = a_1(1.03) = 60,000(1.03)^2$$

$$a_3 = a_2 + a_2(0.03) = a_2(1.03) = 60,000(1.03)^3$$

.

.

$$a_{16} = a_{15} + a_{15}(0.03) = a_{15}(1.03) = 60,000(1.03)^{16}$$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อครบ 8 ปี $60,000(1.03)^{16}$ หรือประมาณ 96,282.39 บาท

หมายเหตุจากข้อที่ 2 จะเห็นว่า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{16}$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น 1.03

ข้อสังเกต

$$60,000(1.03)^{16} = 60,000(1 + 0.03)^{2(8)} = 60,000\left(1 + \frac{6\%}{2}\right)^{2(8)}$$

สามารถสรุปวิธีหาเงินรวมที่ได้จากการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นได้ดังนี้

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี จะได้ เงินรวม $P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$



เอกสารแนะแนวทางที่ 12

“มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต”

จุดประสงค์การเรียนรู้

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับมูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคตได้อย่างถูกต้อง

คำชี้แจง

ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

จากทฤษฎีบท 1

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี

โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี จะได้ เงินรวม $P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$ บาท

เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

1. ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 1,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี

โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ 1 ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี

จะได้ เงินรวม $1,000\left(1 + \frac{0.05}{1}\right)^{(1)(2)}$ บาท เป็นมูลค่าเงินอนาคต

ส่วน 1,000 บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบัน

2. ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 2,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี

โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ 3 ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ 5 ปี

จะได้ เงินรวม $\left(1 + \frac{\text{.....}}{\text{.....}}\right)^{(\text{.....})(\text{.....})}$ บาท เป็นมูลค่าเงินอนาคต

ส่วน บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบัน

3. ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 10,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี

โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ 4 ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ 3 ปี

จะได้ เงินรวม $\left(1 + \frac{\text{.....}}{\text{.....}}\right)^{(\text{.....})(\text{.....})}$ บาท เป็น.....

ส่วน บาท เป็น.....

4. ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี

โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

จะได้ เงินรวม(S) $\left(1 + \frac{\dots}{\dots}\right)^{(\dots)(\dots)}$ บาท เป็นมูลค่าเงินอนาคต

ส่วน บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบัน

นั่นคือ เงินรวมที่ได้ คือ

$$\dots = \dots \left(1 + \frac{\dots}{\dots}\right)^{(\dots)(\dots)}$$

เรียก ว่า ของเงินต้น.....

ในทางกลับกัน จะเรียก.....ว่า ของเงินรวม.....

ดังนั้น คือ

$$\dots = \dots \left(1 + \frac{\dots}{\dots}\right)^{-(\dots)(\dots)}$$

เฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 12 “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต”

1. ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 1,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี
โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ 1 ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ 2 ปี

จะได้ เงินรวม $1,000\left(1 + \frac{0.05}{1}\right)^{(1)(2)}$ บาท เป็นมูลค่าเงินอนาคต

ส่วน 1,000 บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบัน

2. ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 2,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี
โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ 3 ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ 5 ปี

จะได้ เงินรวม $2,000\left(1 + \frac{0.06}{3}\right)^{(3)(5)}$ บาท เป็นมูลค่าเงินอนาคต

ส่วน 2,000 บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบัน

3. ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 10,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี
โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ 4 ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ 3 ปี

จะได้ เงินรวม $10,000\left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{(4)(3)}$ บาท เป็นมูลค่าเงินอนาคต

ส่วน 10,000 บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบัน

4. ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย i% ต่อปี

โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

จะได้ เงินรวม(S) $P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{(k)(n)}$ บาท เป็นมูลค่าเงินอนาคต

ส่วน P บาท เป็นมูลค่าเงินปัจจุบัน

นั่นคือ เงินรวมที่ได้ คือ

$$S = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{(k)(n)}$$

เรียก S ว่า มูลค่าเงินอนาคตของเงินต้น P

ในทางกลับกัน จะเรียก P ว่า มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม S

ดังนั้น มูลค่าปัจจุบัน P ของเงินรวม S คือ

$$P = S\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-(k)(n)}$$



เอกสารแนะแนวทางที่ 13 “ค่างวด”

จุดประสงค์การเรียนรู้

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับค่างวดได้อย่างถูกต้อง

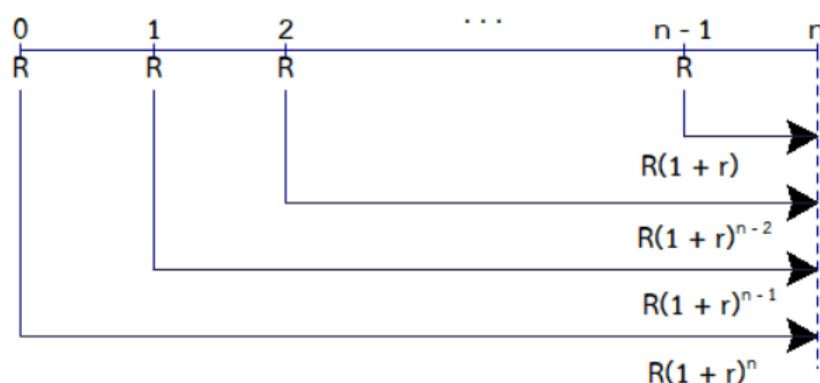
คำชี้แจง

ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1. ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนต้นเป็นงวดรวมทั้งหมด n งวด อัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

ให้ $r = \frac{i}{100}$ จะได้แผนภาพแสดงค่างวด ดังนี้



จากแผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวดสามารถสรุป ได้ดังนี้

จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ คือ + + + ... +

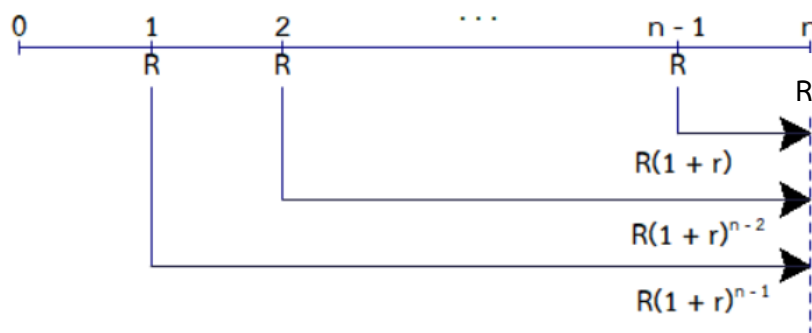
จึงเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ พจน์แรก คือ และอัตราส่วนร่วมคือ

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ

..... ซึ่งเท่ากับ

2. ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

พิจารณาการรับจ่ายเงินแต่ละงวด โดยแต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนสิ้นงวด
รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$



จากแผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวดสามารถสรุป ได้ดังนี้

จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ คือ + + + ... +

จึงเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ พจน์แรก คือ และอัตราส่วนร่วมคือ

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ

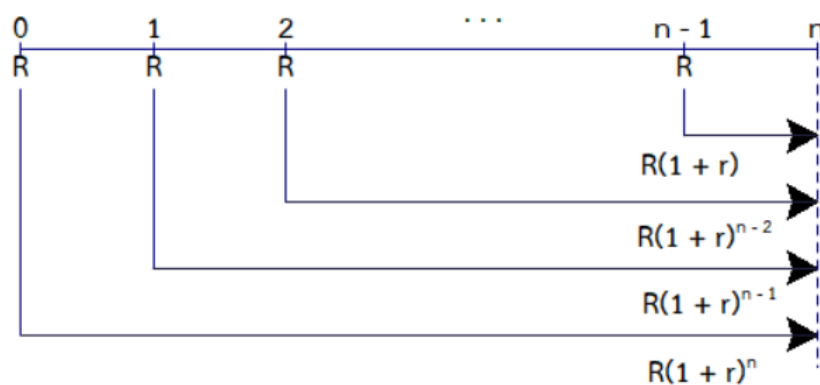
..... ซึ่งเท่ากับ

เฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 13 “ค่างวด”

1. ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

พิจารณาการรับหรือจ่ายเงินแต่ละงวด โดยที่แต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนต้นเป็นงวดรวมทั้งหมด n งวด อัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$

ให้ $r = \frac{i}{100}$ จะได้แผนภาพแสดงค่างวด ดังนี้



จากแผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวดสามารถสรุป ได้ดังนี้

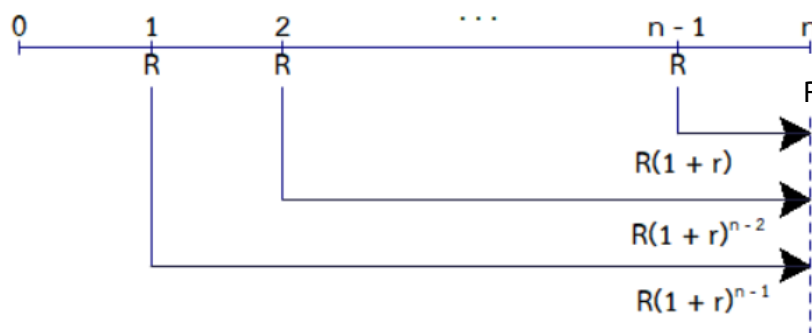
จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R(1+r) + R(1+r)^2 + R(1+r)^3 + \dots + R(1+r)^n$

จึงเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ n พจน์แรก คือ $R(1+r)$ และอัตราส่วนร่วมคือ $1+r$ ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ

$$\frac{R(1+r)(1-(1+r)^n)}{1-(1+r)} \text{ ซึ่งเท่ากับ } \frac{R(1+r)((1+r)^n - 1)}{r}$$

2. ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนสิ้นงวด

พิจารณาการรับจ่ายเงินแต่ละงวด โดยแต่ละงวดเป็นเงิน R บาท ซึ่งเริ่มรับหรือจ่ายเงินตอนสิ้นงวด รวมทั้งหมด n งวด และอัตราดอกเบี้ยต่องวดเป็น $i\%$



จากแผนภาพแสดงค่างวดแต่ละงวดสามารถสรุป ได้ดังนี้

จะได้ เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $R + R(1+r) + R(1+r)^2 + \dots + R(1+r)^{n-1}$

จึงเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ n พจน์แรก คือ R และอัตราส่วนร่วมคือ $1+r$

ดังนั้น เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ

$$\frac{R(1-(1+r)^n)}{1-(1+r)} \text{ ซึ่งเท่ากับ } \frac{R((1+r)^n-1)}{r}$$



ใบงานที่ 10
“ดอกเบี๋ยทบตัน”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นได้
- ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การคิดดอกเบี้ย

ทบทวนได้

คำชี้แจง

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้ถูกต้อง
2. ให้ตัวแทนกลุ่มออกนำเสนอการแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้และสมาชิกในกลุ่มที่เหลือร่วมแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม

1) บัณฑิตกู้เงิน 50,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งให้อัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาเงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 10 ปี โดยไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

[illegible]

เฉลยใบงานที่ 10 “ดอกเบี้ยทบต้น”

- 1) จากโจทย์ จะได้ $P = 50,000$ บาท, $k = 2$, $n = 5$ และ $r = 0.08$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned}\text{จำนวนเงินรวม คือ } 50,000 \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{2(5)} &= 50,000 \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{10} \\ &= 50,000 (1 + 0.04)^{10} \\ &= 50,000 (1.04)^{10}\end{aligned}$$

หรือประมาณ 74,012.21 บาท

ดังนั้น เงินรวมเมื่อฝากเงินครบ 5 ปี จะมีเงินประมาณ 74,012.21 บาท

- 2) จากโจทย์ จะได้จำนวนเงินพร้อมดอกเบี้ย = 92,610 บาท, $k = 1$, $n = 3$ และ $r = 0.05$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned}\text{จำนวนเงินรวม คือ } 92,610 &= P \left(1 + \frac{0.05}{1}\right)^3 \\ \text{จะได้ } P &= \frac{92,610}{\left(1 + \frac{0.05}{1}\right)^3} \\ &= \frac{92,610}{(1.05)^3} \\ &= \frac{92,610}{1.157625} \\ &= 80,000\end{aligned}$$

ดังนั้น บัวขาวฝากเงินไว้กับธนาคารเป็นเงินจำนวน 80,000 บาท

- 3) จากโจทย์ จะได้ $P = 20,000$ บาท, $k = 3$ และ $n = 3$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned}\text{จำนวนเงินรวม คือ } 20,000 \left(1 + \frac{r}{3}\right)^{3(3)} &= 25,630 \\ 20,000 \left(1 + \frac{r}{3}\right)^9 &= 25,630 \\ \left(1 + \frac{r}{3}\right)^9 &= 1.2815 \\ 1 + \frac{r}{3} &= \sqrt[9]{1.2815}\end{aligned}$$

$$r = 3\left(\sqrt[3]{1.2815} - 1\right)$$
$$\approx 0.0838$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยต่อปีที่สถาบันการเงินกำหนดประมาณ 8.38% ต่อปี



ใบงานที่ 11

“มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่าของเงินได้

ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่าของเงินได้

คำชี้แจง

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้ถูกต้อง
2. ให้ตัวแทนกลุ่มออกนำเสนอการแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้และสมาชิกในกลุ่มที่เหลือร่วมแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม

1) ขวดฝากเงิน 10,000 บาทไว้ในบัญชีออมทรัพย์กับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งซึ่งจ่ายดอกเบี้ย 10% ต่อปี โดยไม่มีการฝากหรือถอนเงินในระหว่างนี้และคิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 6 เดือน จงหามูลค่าในอนาคต ณ สิ้นปีที่ 3 จะเป็นเท่าไร

[illegible]

2) แก้วจะต้องฝากเงินออมเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งเป็นจำนวนเงินเท่าไรเพื่อให้ได้รับเงิน 15,000 บาท ในอีก 5 ปีข้างหน้า โดยฝากทุก 6 เดือนและอัตราดอกเบี้ยเงินฝากเป็น 6% ต่อปี โดยไม่มีการฝากหรือถอนเงินในระหว่างนี้

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

3) นำฝากเงินไว้กับธนาคารแห่งหนึ่งเป็นจำนวนเงิน 50,000 บาท ทุก ๆ สิ้นปีเป็นระยะเวลา 5 ปี
ธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ยที่ 8% ต่อปี แล้วเมื่อสิ้นปีที่ 5 น้ำจะมีเงินเท่าไร

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

เฉลยใบงานที่ 11 “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต”

1. จากโจทย์ จะได้ $P = 10,000$ บาท, $k = 2$, $n = 3$ และ $r = 0.10$

จาก มูลค่าเงินอนาคตของเงิน 10,000 บาท คือ

$$\begin{aligned} S &= P \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{kn} \\ &= 10,000 (1 + 0.10)^{2(3)} \\ &= 10,000 (1.10)^6 \\ &\approx 10,000 (1.772) \\ &\approx 17,720 \quad \text{บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น มูลค่าในอนาคต ณ สิ้นปีที่ 3 จะมีเงินประมาณ 17,720 บาท

2. ในที่นี้ $S = 15,000$, $k = 2$, $n = 5$ และ $r = 0.06$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 15,000 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= S \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{-kn} \\ &= 15,000 \left(1 + \frac{0.06}{2} \right)^{-10} \\ &= 15,000 (1 + 0.03)^{-10} \\ &= 15,000 (1.03)^{-10} \\ &\approx 11,161.41 \quad \text{บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น แก้วจะต้องฝากเงินออมเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งเป็นจำนวนเงินประมาณ 11,161.41 บาท

3. จากโจทย์ จะได้ $P = 50,000$ บาท, $k = 1$, $n = 5$ และ $r = 0.08$

จาก มูลค่าเงินอนาคตของเงิน 50,000 บาท คือ

$$\begin{aligned} S &= P \left(1 + \frac{r}{k} \right)^{kn} \\ &= 50,000 (1 + 0.08)^{1(5)} \\ &= 50,000 (1.08)^5 \\ &\approx 50,000 (1.469) \\ &\approx 73,450 \quad \text{บาท} \end{aligned}$$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 5 น้ำจะมีเงินจะมีเงินประมาณ 73,450 บาท



ใบงานที่ 12

“ค่าคง”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่าวงตัวได้
- ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่าวงตัวได้

คำชี้แจง

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้ถูกต้อง
2. ให้ตัวแทนกลุ่มออกนำเสนอการแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้และสมาชิกในกลุ่มที่เหลือร่วมแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม

- 1) ชำนาญวางแผนเก็บเงินเพื่อให้เงินจำนวน 500,000 บาท ในอีก 3 ปีข้างหน้า โดยฝากธนาคารทุกเดือน ทางธนาคารจะให้ดอกเบี้ย 6% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ในทุกปลายงวด อยากทราบว่า ชำนาญควรฝากเงินกับธนาคารเดือนละเท่าไร เพื่อให้มีเงินครบตามจำนวนที่ต้องการ

[illegible]

2) มະนาวฝากเงินประจำทุกเดือน เดือนละ 2,000 บาท ต่อเนื่องกันเป็นระยะเวลา 6 ปี และธนาคารจะให้ดอกเบี้ย 12% ต่อปี โดยจะคิดทบต้นให้ทุกต้นงวด อยากทราบว่า เมื่อครบกำหนดเวลา 6 ปี มະนาวจะได้รับเงินพร้อมดอกเบี้ยเป็นจำนวนเท่าใด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

1)..... 2).....

3)..... 4).....

คะแนนเต็ม 10 คะแนน ได้.....คะแนน

เฉลยใบงานที่ 12 “ค่างวด”

- 1) จากโจทย์ขมื่นเก็บเงินปลายงวดทุกเดือนเป็นเวลา 3 ปี
 ในที่นี้ ขมื่นวางแผนเก็บเงินเพื่อได้เงินจำนวน 500,000 บาท, $n = 36$, $i = \frac{6}{12} = 0.5$
 และ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$
 ดังนั้น เมื่อครบปีที่ 3 เงินรวมของขมื่นมีเงินจำนวน 500,000 บาท คือ
 $R + R(1.005) + R(1.005)^2 + \dots + R(1.005)^{36}$
 ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 36 พจน์ พจน์แรกคือ R
 และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

$$\text{จะได้ เงินรวม } 500,000 = \frac{R((1.005)^{36} - 1)}{1.005 - 1}$$

$$500,000 \approx \frac{R((0.1967))}{0.005}$$

$$500,000 \approx R(39.34)$$

$$R \approx 12,709.71$$

 หรือประมาณ 12,709.71 บาท
 ดังนั้น ขมื่นควรฝากเงินกับธนาคารเดือนละประมาณ 12,709.71 บาท
- 2) ในที่นี้ $R = 2,000$, $n = 72$, $i = \frac{12}{12} = 1.0$ และ $r = \frac{1.0}{100} = 0.01$
 ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 6 เงินรวมของมะนาว คือ
 $2,000(1.01) + 2,000(1.01)^2 + \dots + 2,000(1.01)^{72}$
 ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 72 พจน์ พจน์แรกคือ 2,000 (1.01)
 และอัตราส่วนร่วม คือ 1.01

$$\text{จะได้ เงินรวม } \frac{2,000(1.01)(1 - (1.01)^{72})}{1 - 1.01} = \frac{2,000(1.01)((1.01)^{72} - 1)}{1.01 - 1}$$

 หรือประมาณ 211,514.06 บาท
 ดังนั้น เมื่อครบกำหนดเวลา 6 ปี มะนาวจะได้รับเงินพร้อมดอกเบี้ยเป็นจำนวน
 ประมาณ 211,514.06 บาท



แบบฝึกหัดที่ 7
“การประยุกต์ลำดับและอนุกรม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- นำการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้
- นำมูลค่าของเงินใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้
- นำค่างวดไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

1. มะขามเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น 100,000 บาท โดยไม่มีการฝากหรือถอนในระหว่างนี้ได้รับดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้น ทุกหกเดือน จงหาจำนวนเงินเมื่อครบ 8 ปี
2. มะนาวฝากเงินกับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งจำนวน 100,000 บาท โดยไม่มีการฝากหรือถอนในระหว่างนี้ได้รับดอกเบี้ย 4% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จงหาจำนวนเงินเมื่อครบ 10 ปี
3. มะม่วงเริ่มฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งด้วยเงินต้น 100,000 บาท เมื่อฝากครบ 10 ปี ได้รับเงินจากธนาคารทั้งสิ้น 141,060 บาท ถ้าธนาคารคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสามเดือน จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปี
4. มะยมต้องฝากเงินกับสถาบันการเงินแห่งหนึ่ง ซึ่งคิดอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี ถ้ามะยมต้องการให้เงินในบัญชี 100,000 บาท ในอีก 15 ปี ข้างหน้ามะยมต้องฝากเงินไว้อย่างน้อยเท่าใด โดยฝากเพิ่มอีกปีละ 2,500 บาท
5. มะพร้าวกู้เงินกับมะเฟืองจำนวน 2 ยอด โดยยอดแรกต้องชำระ 13,000 บาท ในอีก 5 ปี ข้างหน้า ส่วนยอดที่สอง ต้องชำระ 26,000 บาท ในอีก 3 ปี ข้างหน้า ถ้ามะเฟืองกำหนดดอกเบี้ย 8 % ต่อปีโดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกหกเดือน จงหาจำนวนเงินที่มะพร้าวกู้จากมะเฟือง
6. มะขวิดฝากเงิน 3,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารทุกต้นเดือน ได้รับดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 6 มะขวิดจะได้เงินรวมเท่าใด
7. มะเขือฝากเงิน 4,000 บาท เข้าบัญชีธนาคารแห่งหนึ่งทุก 6 เดือนได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดแบบทบต้นทุก 6 เดือน เมื่อสิ้นปีที่ 5 มะเขือจะได้เงินรวมเท่าใด
8. มะปรางซื้อรถยนต์ราคา 800,000 บาท โดยจ่ายเงินดาวน์ 300,000 บาท และผ่อนชำระส่งงวดที่เหลือเป็นเงินเท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 6 ปี โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว มะปรางจะต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม”

$$\begin{aligned}
 1. \quad \text{จำนวนเงินรวม คือ } 100,000 \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^{2(8)} &= 100,000 \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^{16} \\
 &= 100,000 (1 + 0.015)^{16} \\
 &= 100,000 (1.015)^{16}
 \end{aligned}$$

หรือประมาณ 126,898.55 บาท

ดังนั้น จำนวนเงินเมื่อครบ 8 ปี จะมีเงินประมาณ 126,898.55 บาท

$$\begin{aligned}
 2. \quad \text{จำนวนเงินรวม คือ } 100,000 \left(1 + \frac{0.04}{1}\right)^{(1)(10)} &= 100,000 (1 + 0.04)^{10} \\
 &= 100,000 (1.04)^{10}
 \end{aligned}$$

หรือประมาณ 148,024.43 บาท

ดังนั้น จำนวนเงินเมื่อครบ 10 ปี จะมีเงินประมาณ 148,024.43 บาท

$$3. \quad \text{จากโจทย์ จะได้ } P = 100,000 \text{ บาท, } k = 4 \text{ และ } n = 10$$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned}
 \text{จำนวนเงินรวม คือ } 100,000 \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4(10)} &= 12,518 \\
 100,000 \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{40} &= 141,060 \\
 \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{40} &= 1.4106 \\
 1 + \frac{r}{4} &= \sqrt[40]{1.4106} \\
 r &= 4 \left(\sqrt[40]{1.4106} - 1\right) \\
 &\approx 0.034549
 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยต่อปีที่ธนาคารกำหนดประมาณ 3.45% ต่อปี

$$4. \quad \text{กำหนดให้ } P \text{ เป็นเงินฝาก}$$

เมื่อครบ 1 ปีจะมีเงินรวม $P + P(0.06) = P(1.06)$ บาท

และถ้าฝากเพิ่มอีก 2,500 จะมีเงินรวม $2,500 + P(1.06)$ บาท

เมื่อครบ 2 ปีจะมีเงินรวม $2,500 + P(1.06) + (2,500 + P(1.06))(0.06)$

$$= (2,500 + P(1.06))(1 + (0.06))$$

$$= (2,500 + P(1.06))(1.06)$$

$$= 2,500(1.06) + P(1.06)^2 \text{ บาท}$$

และถ้าฝากเพิ่มอีก 2,500 จะมีเงินรวม $2,500 + 2,500(1.06) + P(1.06)^2$ บาท

เมื่อครบ 3 ปีจะมีเงินรวม $2,500 + 2,500(1.06) + P(1.06)^2 + (2,500 + 2,500(1.06) + P(1.06)^2)(0.06)$

$$= (2,500 + 2,500(1.06) + P(1.06)^2)(1 + (0.06))$$

$$= (2,500 + 2,500(1.06) + P(1.06)^2)(1.06)$$

$$= 2,500(1.06) + 2,500(1.06)^2 + P(1.06)^3 \text{ บาท}$$

นั่นคือถ้าสิ้นปีที่ 15 จะมีเงินรวม

$$2,500(1.06) + 2,500(1.06)^2 + \dots + 2,500(1.06)^{14} + P(1.06)^{15} \text{ บาท}$$

พิจารณา $2,500(1.06) + 2,500(1.06)^2 + \dots + 2,500(1.06)^{14}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรก คือ $2,500(1.06)$ และอัตราส่วนร่วม คือ 1.06

หาผลบวก 14 พจน์แรกของอนุกรมนี้ เท่ากับ $\frac{2,500(1.06)(1 - (1.06)^{14})}{1 - 1.06}$

นั่นคือ เมื่อสิ้นปีที่ 15 มีเงินรวม $\frac{2,500(1.06)(1 - (1.06)^{14})}{1 - 1.06} + P(1.06)^{15}$

จะได้ $100,000 = \frac{2,500(1.06)(1 - (1.06)^{14})}{1 - 1.06} + P(1.06)^{15}$

$$100,000 = 55689.92 + P(2.40)$$

$$P \approx 18,462.53$$

ดังนั้น มะยมต้องฝากเงินไว้อย่างน้อยประมาณ 18,462.53 บาท

5. **งวดแรก** ในที่นี้ $S = 13,000$, $k = 2$, $n = 5$ และ $r = 0.08$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 13,000 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn} \\ &= 13,000 \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{-10} \\ &= 13,000 (1 + 0.04)^{-10} \\ &= 13,000 (1.04)^{-10} \end{aligned}$$

$$\approx 8,782.33$$

งวดที่สอง ในที่นี้ $S = 26,000$, $k = 2$, $n = 3$ และ $r = 0.08$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 26,000 บาท คือ

$$\begin{aligned} P &= S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn} \\ &= 26,000 \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{-6} \\ &= 26,000 (1 + 0.04)^{-6} \\ &= 26,000 (1.04)^{-6} \end{aligned}$$

$$\approx 20,548.18$$

ดังนั้น จำนวนเงินที่มะพร้าวกู้จากมะเฟืองประมาณ $8,782.33 + 20,548.18 = 29,330.51$ บาท

6. จากโจทย์มะขวิดฝากเงินหรือจ่ายค่างวดตอนต้นงวดทุกเดือนเป็นเวลา 6 ปี

ในที่นี้ $R = 3,000$, $n = 72$, $i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 6 เงินรวมของมะขวิด คือ

$$3,000(1.005) + 3,000(1.005)^2 + \dots + 3,000(1.005)^{72}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 72 พจน์ พจน์แรกคือ $3,000(1.005)$

และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

$$\text{จะได้ เงินรวม } \frac{3,000(1.005)(1-(1.005)^{72})}{1-1.005} = \frac{3,000(1.005)((1.005)^{72}-1)}{1.005-1}$$

หรือประมาณ 260,522.69 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 6 มะขวิดจะได้เงินรวมประมาณ 260,522.69 บาท

7. จากโจทย์มะเขือฝากเงินหรือจ่ายค่างวดตอนปลายงวดทุก 6 เดือนเป็นเวลา 5 ปี

ในที่นี้ $R = 4,000$, $n = 10$, $i = \frac{6}{2} = 3$ และ $r = \frac{3}{100} = 0.03$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 5 เงินรวมของมะเขือ คือ

$$4,000 + 4,000(1.03) + 4,000(1.03)^2 + \dots + 4,000(1.03)^9$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 10 พจน์ พจน์แรกคือ 4,000

และอัตราส่วนร่วม คือ 1.03

$$\text{จะได้ เงินรวม } \frac{4,000(1-(1.03)^{10})}{1-1.03} = \frac{4,000((1.03)^{10}-1)}{1.03-1}$$

หรือประมาณ 45,855.52 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 5 มะเขือจะได้เงินรวมประมาณ 45,855.52 บาท

8. ในที่นี้ $i = \frac{2}{12} = 0.17$ และ $r = \frac{0.17}{100} = 0.0017$

เนื่องจากมะปรางจ่ายเงินเดวาร์ 300,000 บาท

ทำให้เหลือเงินที่ต้องชำระอีก 500,000 บาท

โดยมะปรางจะผ่อนชำระทุกสิ้นเดือนเป็นเวลา 72 เดือน

ดังนั้น จะต้องหามูลค่าเงินปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน

มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1, 2, 3, ..., 72 คือ

$$R(1.0017)^{-1} + R(1.0017)^{-2} + \dots + R(1.0017)^{-72}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 72 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1.0017)^{-1}$

และอัตราส่วนร่วม คือ $(1.0017)^{-1}$

ดังนั้น ผลรวมของมูลค่าเงินปัจจุบันของเงินผ่อนทั้ง 72 งวดคือ

$$\frac{R(1.0017)^{-1}(1-(1.0017)^{-72})}{1-(1.0017)^{-1}}$$

เนื่องจากมะปรางเหลือเงินที่ต้องชำระ 500,000 บาท จะได้ว่า

$$500,000 = \frac{R(1.0017)^{-1}(1-(1.0017)^{-72})}{1-(1.0017)^{-1}}$$

$$R = \frac{500,000(1-(1.0017)^{-1})}{(1.0017)^{-1}(1-(1.0017)^{-72})}$$

$$\approx 7,384.01$$

ดังนั้น มะปรางจะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 7,384.01 บาท

สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม” (การประยุกต์ลำดับและอนุกรม) หน้า ที่ 33 – 40

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

ดอกเบี้ยทบต้น
การแปลงอัตราดอกเบี้ยต่องวด

อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดทบต้นทุก 3 เดือน

ใน 1 ปี คิดดอกเบี้ยทบต้น 4 ครั้ง

อัตราดอกเบี้ยต่องวด $\frac{6\%}{4} = 1.5\%$ หรือ 0.015

อัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดทบต้นทุก 6 เดือน

ใน 1 ปี คิดดอกเบี้ยทบต้น 2 ครั้ง

อัตราดอกเบี้ยต่องวด $\frac{8\%}{2} = 4\%$ หรือ 0.04

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

ดอกเบี้ยทบต้น

ตัวอย่างที่ 17 ผักเงินกับธนาคารแห่งหนึ่ง 30,000 บาท ได้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสี่เดือน เมื่อเวลาผ่านไป 8 ปี จะมีเงินรวมเท่าใด โดยที่ไม่มีการฝากหรือถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดจะได้อัตราดอกเบี้ยต่องวดคือ $\frac{3\%}{4} = 0.75\%$ หรือ 0.0075

จำนวนงวดทั้งหมด $4(8) = 32$ งวด

ให้ a_n แทนเงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n

จะได้ $a_1 = 30,000 + 30,000(0.0075) = 30,000(1 + 0.0075) = 30,000(1.0075)$

$a_2 = a_1 + a_1(0.0075) = a_1(1 + 0.0075) = 30,000(1.0075)(1.0075)$

$= 30,000(1.0075)^2$

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

ดอกเบี้ยทบต้น

ตัวอย่างที่ 17 ผักเงินกับธนาคารแห่งหนึ่ง 30,000 บาท ได้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสี่เดือน เมื่อเวลาผ่านไป 8 ปี จะมีเงินรวมเท่าใด โดยที่ไม่มีการฝากหรือถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ $a_3 = a_2 + a_2(0.0075) = a_2(1 + 0.0075) = 30,000(1.0075)^2(1.0075)$

$= 30,000(1.0075)^3$

$a_{32} = a_{31} + a_{31}(0.0075) = a_{31}(1 + 0.0075) = 30,000(1.0075)^{31}(1.0075)$

$= 30,000(1.0075)^{32}$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 8 ปี จะมีเงินรวม คือ $30,000(1.0075)^{32}$

หรือประมาณ 38,103.34 บาท

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

ดอกเบี้ยทบต้น

ทฤษฎีบท 1 ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ย $r\%$ ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง แล้วเมื่อฝากเงินครบ n ปี

จะได้เงินรวม $P(1 + \frac{r}{k})^{nk}$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

ดอกเบี้ยทบต้น

ตัวอย่างที่ 18 สมียืมฝากเงิน 20,000 บาท กับธนาคารการแห่งหนึ่งที่ได้อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จงหาจำนวนเงินรวมที่สมียืมได้รับเมื่อฝากเงินครบ 9 ปี โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้

วิธีทำ จากโจทย์ $P = 20,000$ บาท, $k = 4$, $n = 9$ และ $r = 0.05$

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ จำนวนเงินรวม คือ

$20,000(1 + \frac{0.05}{4})^{4(9)} = 20,000(1 + \frac{0.05}{4})^{36}$

$= 20,000(1 + 0.0125)^{36}$

$= 20,000(1.0125)^{36}$

หรือประมาณ 31,278.88 บาท

ดังนั้นจำนวนเงินรวมที่สมียืมได้รับเมื่อฝากเงินครบ 9 ปี ประมาณ 31,278.88 บาท

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

ดอกเบี้ยทบต้น

ตัวอย่างที่ 19 สมียืมฝากเงิน 30,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งโดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน เมื่อสิ้นปีที่ 5 ธนาคารแจ้งมีเงินในบัญชีประมาณ 36,569 บาท จงหาอัตราดอกเบี้ยต่อปีที่ธนาคารกำหนด

วิธีทำ จากโจทย์ $P = 30,000$ บาท, $k = 2$ และ $n = 5$

จากทฤษฎีบท 1 จะได้ จำนวนเงินรวม คือ

$30,000(1 + \frac{r}{2})^{2(5)} = 36,569$

$(1 + \frac{r}{2})^{10} = 1.21897$

$1 + \frac{r}{2} = \sqrt[10]{1.21897}$

$\frac{r}{2} = \sqrt[10]{1.21897} - 1$

$r = 2(\sqrt[10]{1.21897} - 1)$

≈ 0.03999

ดังนั้น อัตราดอกเบี้ยต่อปีที่ธนาคารกำหนดประมาณ 4%

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต

เงินต้น 2,000 บาท

อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี คิดแบบทบต้นปีละครั้ง

ฝาก 3 ปี

ได้เงินรวม $2,000(1 + 0.03)^3$ หรือ 2,185.454 บาท

มูลค่าเงินปัจจุบัน

มูลค่าเงินอนาคต

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต

เงินลงทุน P บาท

อัตราดอกเบี้ย $r\%$ ต่อปี คิดแบบทบต้นปีละ k ครั้ง

เป็นเวลา n ปี

จะได้เงินรวม $S = P(1 + \frac{r}{k})^{nk}$ บาท เมื่อ $r = \frac{i}{100}$

มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม S

มูลค่าเงินอนาคตของเงินต้น P

$P = S(1 + \frac{r}{k})^{-nk}$

back Next

สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม” (การประยุกต์ลำดับและอนุกรม) หน้า 41 – 46

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต

ตัวอย่างที่ 20 สมมติได้รับแจ้งบัญชีเงินฝากออมทรัพย์จากธนาคารแห่งหนึ่งเป็นเงิน 80,421.86 บาท จากการฝากเงินไว้กับธนาคารเมื่อ 8 ปีที่แล้ว โดยที่ไม่มีการฝากและถอนเงินในระหว่างนี้ ถ้าธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 4 เดือน จงหาเงินต้นที่สมมติฝากไว้เมื่อ 8 ปีก่อน

จากโจทย์ $S = 80,421.86$ บาท, $k = 3$, $n = 8$ และ $r = 0.06$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 80,421.86 บาท คือ

$$P = 80,421.86 \left(1 + \frac{0.06}{3}\right)^{-3 \times 4}$$

$$= 80,421.86 (1 + 0.02)^{-24}$$

$$= 80,421.86 (1.02)^{-24}$$

$$= 50,000$$

ดังนั้นเงินต้นที่สมมติฝากไว้เมื่อ 8 ปีก่อนประมาณ 50,000 บาท

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต

ตัวอย่างที่ 21 สมมติซื้อหุ้นจากธนาคาร โดยยอดแรกต้องชำระ 21,868.87 บาทในรอบ 3 ปี และยอดสองต้องชำระ 33,794.78 บาท อีก 4 ปีข้างหน้า ถ้าธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน จงหาจำนวนเงินทั้งหมดที่สมมติซื้อหุ้นจากธนาคาร

ยอดแรกในปีที่ $S = 21,868.87$, $k = 2$, $n = 3$ และ $r = 0.03$

จะได้มูลค่าเงินปัจจุบันของเงิน 21,868.87 บาท คือ $21,868.87 \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^{-2 \times 3}$

หรือประมาณ 20,000 บาท

ยอดแรกในปีที่ $S = 33,794.78$, $k = 2$, $n = 4$ และ $r = 0.03$

จะได้มูลค่าเงินปัจจุบันของเงิน 33,794.78 บาท คือ $33,794.78 \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^{-2 \times 4}$

หรือประมาณ 30,000 บาท

จำนวนเงินทั้งหมดที่สมมติซื้อหุ้นจากธนาคารประมาณ $20,000 + 30,000 = 50,000$ บาท

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

ค่างวด ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

รับหรือจ่ายแต่ละงวด R บาท

รับหรือจ่ายต้นงวด n งวด

อัตราดอกเบี้ย $i\%$

$r = \frac{i}{100}$

เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ

$$R(1+r) + R(1+r)^2 + \dots + R(1+r)^n$$

พจน์แรกคือ $R(1+r)$

อัตราส่วนร่วมคือ $1+r$

เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R(1+r)(1 - (1+r)^{n+1})}{1 - (1+r)} = \frac{R(1+r)((1+r)^{n+1} - 1)}{r}$

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

ค่างวด

ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

ตัวอย่างที่ 22 มะม่วงฝากเงิน 150 เข้าบัญชีธนาคารโรงเรียนทุกต้นเดือนเป็นเวลา 3 ปี และได้อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 3 มะม่วงจะได้รับเงินรวมเท่าใด

วิธีทำ มะม่วงฝากเงินตอนต้นเดือนทุกเดือนเป็นเวลา 3 ปี

ในที่นี้ $R = 150$, $n = 36$, $i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$

เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ 36 คือ $\frac{150(1.005)(1 - (1.005)^{36})}{1 - (1.005)} = \frac{150(1.005)((1.005)^{36} - 1)}{1.005 - 1}$

หรือประมาณ 5,929.92 บาท

ดังนั้นเมื่อสิ้นปีที่ 3 มะม่วงจะได้รับเงินรวมประมาณ 5,929.92 บาท

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

ค่างวด ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

รับหรือจ่ายแต่ละงวด R บาท

รับหรือจ่ายต้นงวด n งวด

อัตราดอกเบี้ย $i\%$

$r = \frac{i}{100}$

เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ

$$R + R(1+r) + R(1+r)^2 + \dots + R(1+r)^{n-1}$$

พจน์แรกคือ R

อัตราส่วนร่วมคือ $1+r$

เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ n คือ $\frac{R(1 - (1+r)^n)}{1 - (1+r)} = \frac{R((1+r)^n - 1)}{r}$

back Next

การประยุกต์ลำดับและอนุกรม

ค่างวด

ค่างวดที่รับหรือจ่ายตอนต้นงวด

ตัวอย่างที่ 23 มะม่วงฝากเงิน 150 เข้าบัญชีธนาคารโรงเรียนทุกต้นเดือนเป็นเวลา 3 ปี และได้อัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 3 มะม่วงจะได้รับเงินรวมเท่าใด

วิธีทำ มะม่วงฝากเงินตอนต้นเดือนทุกเดือนเป็นเวลา 3 ปี

ในที่นี้ $R = 150$, $n = 36$, $i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$

เงินรวมเมื่อสิ้นงวดที่ 36 คือ $\frac{150(1 - (1.005)^{36})}{1 - (1.005)} = \frac{150((1.005)^{36} - 1)}{1.005 - 1}$

หรือประมาณ 5,900.42 บาท

ดังนั้นเมื่อสิ้นปีที่ 3 มะม่วงจะได้รับเงินรวมประมาณ 5,900.42 บาท

back Next



แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 เรื่อง “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม”

รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน รหัสวิชา ค32102 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เวลา 30 นาที คะแนนเต็ม 10 คะแนน

คำชี้แจง

- 1) ข้อสอบฉบับนี้เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาทำข้อสอบ 30 นาที
- 2) ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวแล้วทำเครื่องหมาย (X) ลงในกระดาษคำตอบ
- 3) อนุญาตให้ใช้เครื่องคิดเลขในการคำนวณได้

มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

ค 1.3 ม.5/1 เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับดอกเบี้ยและมูลค่าของเงินในการแก้ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้ นำการคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

1. กำนับฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งจำนวน 2,000 บาท ได้รับอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 1.5 ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน จำนวนเงินของกำนับในบัญชีธนาคารมีประมาณเท่าไรเมื่อ ฝากเงินครบ 3 ปี

- | | |
|-------------|-------------|
| 1) 2,015.45 | 2) 2,091.88 |
| 3) 2,119.28 | 4) 2,229.35 |

2. ใบบัวฝากเงินกับสถาบันการเงินแห่งหนึ่งเป็นเงิน 5,000 บาท โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 6 เดือน เมื่อเวลาผ่านไป 10 ปี สถาบันการเงินได้แจ้งยอดบัญชีเป็นเงิน 6,734.28 บาท ใบบัวฝากเงินกับสถาบันการเงินแห่งนี้ในอัตราดอกเบี้ยประมาณเท่าไรต่อปี อัตราดอกเบี้ยคงที่ตลอดเวลาฝากเงิน

- | | | | |
|-------|---------|-------|---------|
| 1) 3% | 2) 3.5% | 3) 4% | 4) 4.5% |
|-------|---------|-------|---------|

3. ดอกบัวได้รับมรดกจากบิดาจำนวน 1,000,000 บาท เธอต้องการนำไปฝากกับธนาคารเพื่อเก็บเป็นทุนการศึกษาของลูกในอีก 5 ปีข้างหน้า ธนาคารกำหนดอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี โดยคิดแบบทบต้นทุก 3 เดือน ดอกบัวจะได้รับเงินรวมประมาณข้อใด

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1) 1,345,244.32 บาท | 2) 1,459,244.35 บาท |
| 3) 1,485,947.40 บาท | 4) 1,502,423.25 บาท |

4. กอบัวมีเงินออมอยู่ 10,000 บาท ต้องการเก็บไว้ในธนาคารเพื่อเป็นทุนการศึกษาในอีก 5 ปีข้างหน้า โดยได้ข้อมูลจากธนาคาร 3 แห่ง ดังนี้

ธนาคาร A กำหนดอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสิ้นเดือน

ธนาคาร B กำหนดอัตราดอกเบี้ย 3.5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกสิ้นปี

และ ธนาคาร C กำหนดอัตราดอกเบี้ย 3.25% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน
ข้อใดกล่าวถูกต้อง

- 1) เงินรวมจากธนาคาร A มากกว่า ธนาคาร B
- 2) เงินรวมจากธนาคาร A มากกว่า ธนาคาร C
- 3) เงินรวมจากธนาคาร B มากกว่า ธนาคาร C
- 4) เงินรวมจากธนาคาร C มากกว่า ธนาคาร B

จุดประสงค์การเรียนรู้ นำมูลค่าของเงินใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

5. สัมโสภาฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่งซึ่งกำหนดอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี ถ้าสัมโสภาต้องการเงินในบัญชีประมาณ 20,000 บาท ในเวลา 10 ปี สัมโสภาต้องฝากเงินไว้อย่างน้อยเท่าใด

- 1) 13,225 2) 13,784 3) 14,523 4) 14,882

6. สัมเขียวหวานฝากเงินจำนวนหนึ่งกับธนาคารแห่งหนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป 10 ปี พบว่ามีเงินในบัญชี 36,623.83 บาท ถ้าธนาคารคงอัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุก 3 เดือน สัมเขียวหวานฝากเงินไว้เมื่อ 10 ก่อนประมาณเท่าใด

- 1) 30,000 บาท 2) 32,500 บาท
- 3) 33,000 บาท 4) 33,500 บาท

7. มะขามกู่เงินมะยม โดยกำหนดชำระหนี้ทั้งหมดในอีก 3 ปีข้างหน้า เป็นเงิน 28,940.625 บาท ถ้ามะยมกำหนดอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ 5% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกปี จำนวนเงินที่มะขามกู่จากมะยมเท่ากับข้อใด

- 1) 24,000 บาท 2) 25,000 บาท
- 3) 26,000 บาท 4) 27,000 บาท

จุดประสงค์การเรียนรู้ นำค่างวดไปใช้แก้สถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

8. สมหวังทำประกันชีวิตกับบริษัทประกันชีวิตแห่งหนึ่ง เขาจะต้องจ่ายเงินค่าประกันเดือนละ 1,500 บาททุกต้นเดือนเป็นเวลา 3 ปี และได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี เมื่อครบ 3 ปี บริษัทประกันจ่ายเงินประกันสะสมทั้งหมดพร้อมดอกเบี้ยโดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 3 สมหวังจะได้เงินรวมประมาณเท่ากับข้อใด

- | | |
|---------------|---------------|
| 1) 55,598 บาท | 2) 56,768 บาท |
| 3) 58,279 บาท | 4) 59,299 บาท |

9. สมปองฝากเงินออมกับธนาคารแห่งหนึ่ง เข้าบัญชีธนาคารทุกสิ้นเดือนเดือนละ 1,000 บาท เพื่อเป็นทุนการศึกษาเป็นเวลา 5 ปี และได้รับอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน เมื่อสิ้นปีที่ 5 สมปองจะได้รับเงินรวมประมาณเท่าใด

- | | |
|---------------|---------------|
| 1) 65,465 บาท | 2) 69,770 บาท |
| 3) 70,250 บาท | 4) 71,460 บาท |

10. สมใจซื้อรถยนต์ราคา 600,000 บาท โดยตกลงจ่ายเงินดาวน์ 15% ของราคารถยนต์และผ่อนชำระส่วนที่เหลือเป็นเงินเท่ากันทุกเดือน เป็นเวลา 4 ปี โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน ถ้าอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือนแล้ว สมใจจะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณเท่าใด

- | | |
|------------------|------------------|
| 1) 10,239.23 บาท | 2) 11,069.22 บาท |
| 3) 11,977.36 บาท | 4) 12,239.47 บาท |

เฉลยแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 เรื่อง “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม”

1. ตอบ ข้อ 2)

จากโจทย์ จะได้ $P = 2,000$ บาท, $k = 4$, $n = 3$ และ $r = 0.015$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned} \text{จำนวนเงินรวม คือ } 2,000 \left(1 + \frac{0.015}{4}\right)^{4(3)} &= 2,000 \left(1 + \frac{0.015}{4}\right)^{12} \\ &= 2,000 (1 + 0.00375)^{12} \\ &= 2,000 (1.00375)^{12} \end{aligned}$$

หรือประมาณ 2,091.88 บาท

ดังนั้น จำนวนเงินของก้านบัวในบัญชีธนาคารมีประมาณ 2,091.88 บาท

2. ตอบ ข้อ 1)

จากโจทย์ จะได้ $P = 5,000$ บาท, $k = 2$ และ $n = 10$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned} \text{จำนวนเงินรวม คือ } 5,000 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2(10)} &= 6,734.28 \\ 5,000 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{20} &= 6,734.28 \\ \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{20} &= 1.346856 \\ 1 + \frac{r}{2} &= \sqrt[20]{1.346856} \\ r &= 2 \left(\sqrt[20]{1.346856} - 1 \right) \\ &\approx 0.03000 \end{aligned}$$

ดังนั้น ใบบัวฝากเงินกับสถาบันการเงินแห่งนี้ในอัตราดอกเบี้ยประมาณ 3.0% ต่อปี

3. ตอบ ข้อ 3)

จากโจทย์ จะได้ $P = 1,000,000$ บาท, $k = 4$, $n = 5$ และ $r = 0.08$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\begin{aligned} \text{จำนวนเงินรวม คือ } 1,000,000 \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{4(5)} &= 1,000,000 \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^{20} \\ &= 1,000,000 (1 + 0.02)^{20} \end{aligned}$$

$$= 1,000,000(1 + 0.02)^{20}$$

หรือประมาณ 1,485,947.40 บาท

ดังนั้น ดอกเบี้ยจะได้รับเงินรวมประมาณ 1,485,947.40 บาท

4. ตอบ ข้อ 3)

พิจารณาธนาคาร A

จากโจทย์ จะได้ $P = 10,000$ บาท, $k = 12$, $n = 5$ และ $r = 0.03$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\text{จำนวนเงินรวม คือ } 10,000 \left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{12(5)} = 10,000 \left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{60}$$

หรือประมาณ 11,161.17 บาท

นั่นคือ ถ้าดอกเบี้ยฝากธนาคาร A จะได้รับเงินรวมประมาณ 11,161.17 บาท

พิจารณาธนาคาร B

จากโจทย์ จะได้ $P = 10,000$ บาท, $k = 1$, $n = 5$ และ $r = 0.035$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\text{จำนวนเงินรวม คือ } 10,000 \left(1 + \frac{0.035}{1}\right)^{1(5)} = 10,000(1 + 0.035)^5$$

หรือประมาณ 11,876.86 บาท

นั่นคือ ถ้าดอกเบี้ยฝากธนาคาร B จะได้รับเงินรวมประมาณ 11,876.86 บาท

พิจารณาธนาคาร C

จากโจทย์ จะได้ $P = 10,000$ บาท, $k = 4$, $n = 5$ และ $r = 0.0325$

จาก ทฤษฎีบท 1 จะได้

$$\text{จำนวนเงินรวม คือ } 10,000 \left(1 + \frac{0.0325}{4}\right)^{4(5)} = 10,000 \left(1 + \frac{0.0325}{4}\right)^{20}$$

หรือประมาณ 11,756.76 บาท

นั่นคือ ถ้าดอกเบี้ยฝากธนาคาร B จะได้รับเงินรวมประมาณ 11,756.76 บาท

ดังนั้น ดอกเบี้ยได้รับเงินรวมจากธนาคาร B มากกว่า ธนาคาร C

5. ตอบ ข้อ 4)

ในที่นี้ $S = 20,000$, $k = 1$, $n = 10$ และ $r = 0.03$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 20,000 บาท คือ

$$P = S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn}$$

$$\begin{aligned}
&= 20,000 \left(1 + \frac{0.03}{1}\right)^{-1(10)} \\
&= 20,000 (1 + 0.03)^{-10} \\
&= 20,000 (1.03)^{-10} \\
&\approx 14,881.87
\end{aligned}$$

ดังนั้น สัมโอดต้องการเงินในบัญชีประมาณ 20,000 บาท ในเวลา 10 ปี สัมโอดต้องฝากเงินไว้อย่างน้อย 14,882 บาท

6. ตอบ ข้อ 1)

ในที่นี้ $S = 36,623.83$, $k = 4$, $n = 10$ และ $r = 0.02$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 36,623.83 บาท คือ

$$\begin{aligned}
P &= S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn} \\
&= 36,623.83 \left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^{-4(10)} \\
&= 36,623.83 (1 + 0.005)^{-40} \\
&= 36,623.83 (1.005)^{-40} \\
&\approx 30,000.0024
\end{aligned}$$

ดังนั้น สัมเขียวหวานฝากเงินไว้เมื่อ 10 ก่อนประมาณ 30,000 บาท

7. ตอบ ข้อ 2)

ในที่นี้ $S = 28,940.625$, $k = 1$, $n = 3$ และ $r = 0.05$

จะได้ มูลค่าเงินปัจจุบันของเงินรวม 28,940.625 บาท คือ

$$\begin{aligned}
P &= S \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kn} \\
&= 28,940.625 \left(1 + \frac{0.05}{1}\right)^{-1(3)} \\
&= 28,940.625 (1 + 0.05)^{-3} \\
&= 28,940.625 (1.05)^{-3} \\
&= 25,000
\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเงินที่มะขามกู่จากมะยมเท่ากับ 25,000 บาท

8. ตอบ ข้อ 4)

จากโจทย์สมหวังจะต้องจ่ายเงินค่าประกันเดือนละ 1,500 บาททุกต้นเดือนเป็นเวลา 3 ปี

ในที่นี้ $R = 1,500$, $n = 36$, $i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 3 เงินรวมของสมหวัง คือ

$$1,500(1.005) + 1,500(1.005)^2 + \dots + 1,500(1.005)^{36}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 36 พจน์ พจน์แรกคือ $1,500(1.005)$

และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

$$\text{จะได้ เงินรวม } \frac{1,500(1.005)(1-(1.005)^{36})}{1-1.005} = \frac{1,500(1.005)((1.005)^{36}-1)}{1.005-1}$$

หรือประมาณ 59,299.19 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 3 สมหวังจะได้เงินรวมประมาณ 59,299 บาท

9. ตอบ ข้อ 2)

จากโจทย์สมปองฝากเงินออมกับธนาคารแห่งหนึ่ง เข้าบัญชีธนาคารทุกสิ้นเดือนเดือนละ

1,000 บาท เพื่อเป็นทุนการศึกษาเป็นเวลา 5 ปี

ในที่นี้ $R = 1,000$, $n = 60$, $i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 5 เงินรวมของสมปอง คือ

$$1,000 + 1,000(1.005) + 1,000(1.005)^2 + \dots + 1,000(1.005)^{60}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 60 พจน์ พจน์แรกคือ 1,000

และอัตราส่วนร่วม คือ 1.005

$$\text{จะได้ เงินรวม } \frac{1,000(1-(1.005)^{60})}{1-1.005} = \frac{1,000((1.005)^{60}-1)}{1.005-1}$$

หรือประมาณ 69,770.03 บาท

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่ 5 สมปองจะได้รับเงินรวมประมาณ 69,770 บาท

10. ตอบ ข้อ 3)

ให้ R แทน ค่างวดที่สนใจซื้อรถยนต์จะต้องผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

ในที่นี้ $i = \frac{6}{12} = 0.5$ และ $r = \frac{0.5}{100} = 0.005$

เนื่องจากสนใจจ่ายเงินเดาวัน $\frac{15}{100}(600,000) = 90,000$ บาท ทำให้เหลือเงินที่ต้องชำระ

อีก $600,000 - 90,000 = 510,000$ บาท

โดยสนใจจะผ่อนเป็นเวลา 4 ปี โดยผ่อนชำระทุกสิ้นเดือน

ดังนั้น จะต้องหามูลค่าเงินปัจจุบันของเงินผ่อนแต่ละงวด แล้วจึงนำมารวมกัน
มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนงวดที่ 1, 2, 3, ..., 48 คือ

$$R(1.01)^{-1} + R(1.01)^{-2} + \dots + R(1.01)^{-48}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี 48 พจน์ โดยพจน์แรก คือ $R(1.005)^{-1}$

และอัตราส่วนร่วม คือ $(1.005)^{-1}$

ดังนั้น ผลรวมของมูลค่าเงินปัจจุบันของเงินผ่อนทั้ง 48 งวดคือ

$$\frac{R(1.005)^{-1}(1-(1.005)^{-48})}{1-(1.01)^{-1}}$$

เนื่องจากสนใจเหลือเงินที่ต้องชำระ 510,000 บาท จะได้ว่า

$$510,000 = \frac{R(1.005)^{-1}(1-(1.005)^{-48})}{1-(1.01)^{-1}}$$

$$R = \frac{510,000(1-(1.005)^{-1})}{(1.005)^{-1}(1-(1.005)^{-48})}$$

$$\approx 11,977.36$$

ดังนั้น สมใจจะต้องผ่อนชำระเดือนละประมาณ 11,977.36 บาท

เกณฑ์การประเมินผลแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|--|---|---|--|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านความรู้ 1. นำการคิดดอกเบี้ย แบบทบต้นไปใช้แก้ สถานการณ์ที่กำหนดให้ ได้ | สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 1 - ข้อ 3 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 1 - ข้อ 3 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 1 - ข้อ 3 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ | มีร่องรอยของความ พยายามในการทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 1 - ข้อ 3 แต่ไม่ ถูกต้องสมบูรณ์ |
| 2. นำมูลค่าของเงินใช้ แก้สถานการณ์ที่ กำหนดให้ได้ | สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 4 - ข้อ 5 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 4 - ข้อ 5 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ | สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 4 - ข้อ 5 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์บางส่วน | มีร่องรอยของความ พยายามในการทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 4 - ข้อ 5 ได้แต่ ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |
| 3. นำค่างวดไปใช้แก้ สถานการณ์ที่กำหนดให้ ได้ | สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 6 - ข้อ 8 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 6 - ข้อ 8 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 6 - ข้อ 8 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ | มีร่องรอยของความ พยายามในการทำ แบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ ลำดับและอนุกรม” ข้อ 6 - ข้อ 8 ได้แต่ ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลเอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี๊ยทตัน”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|--|--|--|---|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านความรู้ 1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับดอกเบี๊ยทตันได้อย่างถูกต้อง | สามารถทำเอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี๊ยทตัน” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ | สามารถทำเอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี๊ยทตัน” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์เป็นส่วนใหญ่ | สามารถทำเอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี๊ยทตัน” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์เป็นบางส่วน | มีร่องรอยของความพยายามในการทำเอกสารแนะแนวทางที่ 11 เรื่อง “ดอกเบี๊ยทตัน” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลเอกสารแนบแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|--|---|---|---|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านความรู้ 1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับมูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคตได้อย่างถูกต้อง | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ | มีร่องรอยของความพยายามในการทำเอกสารแนบแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลเอกสารแนบแนวทางที่ 12 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|--|--|--|--|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านความรู้ 1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับค่างวดได้อย่างถูกต้อง | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างวด” ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างวด” ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างวด” ได้ อย่างถูกต้อง บางส่วน | มีร่องรอยของความพยายามในการทำเอกสารแนบแนวทางที่ 13 เรื่อง “ค่างวด” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบตัน”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|---|---|---|---|--|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1. ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยใช้การคิดดอกเบี๋ยแบบทบตันได้ | สามารถทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบตัน” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบตัน” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบตัน” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 ข้อ | มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบตัน” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |
| 2. ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้การคิดดอกเบี๋ยทบตันได้ | สามารถทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบตัน” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบตัน” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบตัน” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 ข้อ | มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 10 เรื่อง “ดอกเบี๋ยทบตัน” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตแต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|---|--|--|--|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1. ใช้การแก้ปัญหจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยใช้มูลค่าของเงินได้ | สามารถทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ | มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |
| 2. ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้มูลค่าของเงินได้ | สามารถทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ | มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 11 เรื่อง “มูลค่าเงินปัจจุบันและมูลค่าเงินอนาคต” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตแต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|--|--|--|--|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1. ใช้การแก้ปัญหาจากสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่างวดได้ | สามารถทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” ได้ถูกต้องบางส่วน | มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |
| 2. ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ค่างวดได้ | สามารถทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตได้ ถูกต้องบางส่วน | มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 12 เรื่อง “ค่างวด” และเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตแต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|---------------------------|---|--|--|--|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1. รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ | ร่วมกิจกรรมวันสำคัญเกี่ยวกับรักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ 4 ครั้งขึ้นไป | ร่วมกิจกรรมวันสำคัญเกี่ยวกับรักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ 3 ครั้ง | ร่วมกิจกรรมวันสำคัญเกี่ยวกับรักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ 2 ครั้ง | ร่วมกิจกรรมวันสำคัญเกี่ยวกับรักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ 1 ครั้ง |
| 2. ซื่อสัตย์สุจริต | ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้ | ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่ และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้เป็นส่วนใหญ่ | ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้ร่วมกัน เป็นบางครั้งและต้องอาศัยการแนะนำหรือตักเตือน | ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 7 โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้ร่วมกัน เป็นบางครั้งและต้องอาศัยการแนะนำหรือตักเตือน |
| 3. มีวินัย | แต่งกายเรียบร้อย | แต่งกายเรียบร้อย โดยส่วนใหญ่ | แต่งกายเรียบร้อย บางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน | แต่งกายเรียบร้อย บางส่วนไม่แก้ไข เมื่อได้รับการตักเตือน |
| 4. ใฝ่เรียนรู้ | การเข้าเรียนตรงเวลา | การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที | การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที | การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที |
| 5. มุ่งมั่นในการทำงาน | ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์ | ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่ | ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นบางส่วน | ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “การประยุกต์ลำดับและอนุกรม” ครบทุกข้อหรือไม่ครบแต่ไม่ถูกต้อง |

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|---------------------|--|---|---|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 6. รักความเป็นไทย | ร่วมกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับประเพณี ศิลปะ และวัฒนธรรมไทย 4 ครั้งขึ้นไป | ร่วมกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับประเพณี ศิลปะ และวัฒนธรรมไทย 3 ครั้ง | ร่วมกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับประเพณี ศิลปะ และวัฒนธรรมไทย 2 ครั้ง | ร่วมกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับประเพณี ศิลปะ และวัฒนธรรมไทย 1 ครั้ง |
| 7. มีจิตสาธารณะ | ร่วมกิจกรรมสาธารณะ ประโยชน์ 13 – 15 ชั่วโมง | ร่วมกิจกรรมสาธารณะ ประโยชน์ 9 – 12 ชั่วโมง | ร่วมกิจกรรมสาธารณะ ประโยชน์ 5 – 8 ชั่วโมง | ร่วมกิจกรรมสาธารณะ ประโยชน์ 1 – 4 ชั่วโมง |
| 8. อยู่อย่างพอเพียง | ใช้สมุดแบบฝึกหัดอย่างประหยัด ทำงานชิ้นงานด้วยวัสดุเหลือใช้ อย่างสม่ำเสมอทุกครั้ง | ใช้สมุดแบบฝึกหัดอย่างประหยัด ทำงานชิ้นงานด้วยวัสดุเหลือใช้ เป็นส่วนใหญ่ | ใช้สมุดแบบฝึกหัดอย่างประหยัด ทำงานชิ้นงานด้วยวัสดุเหลือใช้ บางครั้ง แกะไขเมื่อได้รับคำแนะนำ | ใช้สมุดแบบฝึกหัดอย่างประหยัด ทำงานชิ้นงานด้วยวัสดุเหลือใช้ บางครั้ง ไม่แกะไข เมื่อได้รับคำแนะนำ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพผ่าน

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพไม่ผ่าน

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|---|--|--|--|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1. ใช้เทคโนโลยีในการ ทบทวนความรู้เรื่อง “ลำดับ” และเรื่อง “อนุกรม” ได้ | ใช้สื่อ power point เรื่อง “ลำดับ” และ “อนุกรม” ใช้กลุ่ม line ชั้นเรียน ใน การทบทวนความรู้ เรื่อง “ลำดับ” และ เรื่อง “อนุกรม” ทุกครั้ง | ใช้สื่อ power point เรื่อง “ลำดับ” และ “อนุกรม” ใช้กลุ่ม line ชั้นเรียน ใน การทบทวนความรู้ เรื่อง “ลำดับ” และ เรื่อง “อนุกรม” เป็นส่วนใหญ่ | ใช้สื่อ power point เรื่อง “ลำดับ” และ “อนุกรม” ใช้กลุ่ม line ชั้นเรียน ใน การทบทวนความรู้ เรื่อง “ลำดับ” และ เรื่อง “อนุกรม” เป็นบางครั้งแก้ไข เมื่อได้คำแนะนำ | ใช้สื่อ power point เรื่อง “ลำดับ” และ “อนุกรม” ใช้กลุ่ม line ชั้นเรียน ใน การทบทวนความรู้ เรื่อง “ลำดับ” และ เรื่อง “อนุกรม” เป็นบางครั้งไม่ แก้ไขเมื่อได้ คำแนะนำ |
| 2. สามารถใช้ทักษะชีวิต ในการทำกิจกรรมกลุ่ม ในชั้นเรียนได้ | มีส่วนร่วมในการทำ กิจกรรมกลุ่มในชั้น เรียน แสดงความ คิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกใน กลุ่มทุกครั้ง | มีส่วนร่วมในการทำ กิจกรรมกลุ่มในชั้น เรียน แสดงความ คิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิก เป็นส่วนใหญ่ | มีส่วนร่วมในการทำ กิจกรรมกลุ่มในชั้น เรียน แสดงความ คิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกใน กลุ่มบางครั้งแก้ไข เมื่อได้คำแนะนำ | มีส่วนร่วมในการทำ กิจกรรมกลุ่มในชั้น เรียน แสดงความ คิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกใน กลุ่มบางครั้งไม่ แก้ไขเมื่อได้ คำแนะนำ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลงการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

| คุณภาพ(x) | คะแนนเต็ม 5 คะแนน |
|--------------------|-------------------|
| $3.2 < x \leq 4$ | 5 |
| $2.4 < x \leq 3.2$ | 4 |
| $1.6 < x \leq 2.4$ | 3 |
| $0.8 < x \leq 1.6$ | 2 |
| $0 < x \leq 0.8$ | 1 |
| 0 | 0 |

แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

[illegible]

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- ปารณีย์ ภิบาลจอมมี. 2558. “การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหาเรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยร่วมกับแบบกลุ่มร่วมมือ.” ปรินญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาหลักสูตรและการสอน, มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.
- พิชิต ฤทธิ์จรรยา. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : เอ้าส์ออฟเคอร์มิสท์.
- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ**. พระนครศรีอยุธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.
- ยุทธคม ภมรสุพรวิจิต. (ม.ป.ป.). **แบบฝึกหัด รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ม.5**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- ศศิเกษม สัทธิธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฏานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-NET คณิตศาสตร์ ม.6**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์**.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมนึก ภัททิยานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 5. กทม. : ประสานการพิมพ์.
- อนุวัติ คุณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.