



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน รหัสวิชา ค 32102

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ลำดับและอนุกรม

เรื่อง อนุกรมเลขคณิต

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เวลา 6 ชั่วโมง

1. มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

ค 1.2 ม.5/2 เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้

2. สาระการเรียนรู้

อนุกรมเลขคณิต

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

อนุกรมเลขคณิต(arithmetic series) คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต และมีผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตเป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิตด้วย สูตรผลบวกการหาอนุกรมเลขคณิต

$$\text{คือ } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ หรือ } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 บอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้

4.1.2 หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้

4.1.3 นำอนุกรมเลขคณิตไปใช้แก้ปัญหাজิตหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ให้เหตุผลในการบอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้

4.2.2 ใช้การแก้ปัญหามาจากปัญหাজิตผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้

4.2.3 ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับปัญหাজิตหรือสถานการณ์ที่

กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้

4.2.4 ใช้การคิดสร้างสรรค์เพื่อแก้ปัญหามาจากปัญหাজิตหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้

โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้

4.2.5 ใช้การสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอการแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.2 มีวินัย

4.3.3 ใฝ่เรียนรู้

4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญ of นักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

4.4.1 ใช้ความสามารถในการสื่อสารในการนำเสนอความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้

4.4.2 ใช้ความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้

4.4.3 ใช้ความสามารถในการคิดเพื่อแก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้

4.4.4 สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้

5. เนื้อหา/สาระ

อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต(arithmetic series) คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต และมีผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตเป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิตด้วย สูตรผลบวกการหาอนุกรมเลขคณิต

$$\text{คือ } S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \text{ หรือ } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

พิจารณาอนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ ที่ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 2, 3, \dots, 100$ หาผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรมนี้ ทำได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & + & 100 \\ & & & & & & & & & & + \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \dots & + & 1 \end{array}$$

$$\underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101}_{100 \text{ ตัว}}$$

เนื่องจาก $\underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101}_{100 \text{ ตัว}} = 100 \times 101$

100 ตัว

ดังนั้น $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5,050$

จากวิธีการหาผลบวกข้างต้น สามารถหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ดังนี้
ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม

ดังนั้น $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$
 $= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) \dots\dots\dots(1)$

หรืออาจเขียน S_n ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d) \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ วงเล็บ}}$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ คือ $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต 6, 14, 22, ...

วิธีทำ จากลำดับเลขคณิต 6, 14, 22, ... จะได้ $a_1 = 6$ และ $d = 14 - 6 = 8$

แทน n ด้วย 10 ใน $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_{10} = 6 + (10-1)(8)$
 $= 6 + 72$
 $= 78$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad S_{10} &= \frac{10}{2}(6 + 78) \\
 &= 5(84) \\
 &= 420
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต 6, 14, 22, ... คือ 420

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $2 + 6 + 10 + \dots + 38$

วิธีทำ จากอนุกรมเลขคณิต $2 + 6 + 10 + \dots + 38$

จะได้ $a_1 = 2$, $d = 6 - 2 = 4$ และ $a_n = 38$

$$\text{จาก} \quad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้} \quad 38 = 2 + (n - 1)(4)$$

$$38 = 2 + 4n - 4$$

$$38 = 4n - 2$$

$$40 = 4n$$

$$n = 10$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$2 + 6 + 10 + \dots + 38$$

$$\text{จาก} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad S_{10} &= \frac{10}{2}(2 + 38) \\
 &= 5(40) \\
 &= 200
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $2 + 6 + 10 + \dots + 38$ คือ 200

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกของจำนวนคู่ตั้งแต่ 18 ถึง 482

วิธีทำ เนื่องจาก $18 + 20 + 22 + 24 + \dots + 482$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี

$$a_1 = 18, d = 20 - 18 = 2 \text{ และ } a_n = 482$$

$$\text{จาก} \quad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้} \quad 482 = 18 + (n - 1)(2)$$

$$482 = 18 + 2n - 2$$

$$482 = 2n + 16$$

$$466 = 2n$$

$$n = 233$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 233 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$18 + 20 + 22 + 24 + \dots + 482$$

จาก $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

จะได้
$$\begin{aligned} S_{233} &= \frac{233}{2} (18 + 482) \\ &= \frac{233}{2} (500) \\ &= 58,250 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคู่ตั้งแต่ 18 ถึง 482 คือ 58,250

หมายเหตุ นอกจากจะหา S_n จาก $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$ เมื่อทราบ a_1 , a_n และ n แล้วยังสามารถหา S_n เมื่อทราบ a_1 , n และ d ได้ดังนี้

เนื่องจาก $a_n = a_1 + (n - 1)d$ และ $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

จะได้
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n - 1)d) \\ &= \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d) \end{aligned}$$

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \text{ และ } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลบวก 12 พจน์แรกของอนุกรม $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$

วิธีทำ จากอนุกรม $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

ที่มี $a_1 = 4$, $d = 1 - 4 = -3$, $n = 12$ และเนื่องจากไม่ทราบพจน์ที่ n สามารถใช้สูตร

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

จะได้
$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{12}{2} (2(4) + (12 - 1)(-3)) \\ &= 6(8 + (-33)) \\ &= 6(-25) \\ &= -150 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 12 พจน์แรกของอนุกรม $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$ คือ -150

ตัวอย่างที่ 5 หอประชุมของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีเก้าอี้จัดไว้แถวแรก 12 ตัว แถวที่สอง 14 ตัว แถวที่สาม 16 ตัว เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ถ้าจัดเก้าอี้ไว้ในหอประชุมทั้งหมด 15 แถว จะมีเก้าอี้ในหอประชุมนี้ทั้งหมดกี่ตัว

วิธีทำ ลำดับของจำนวนเก้าอี้แต่ละแถวในหอประชุม คือ ลำดับเลขคณิต 12, 14, 16, ..., a_n
ที่มี $a_1 = 12$, $d = 14 - 12 = 2$ และ $n = 15$

จาก เนื่องจากไม่ทราบพจน์ที่ n สามารถใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{15} &= \frac{15}{2} (2(12) + (15 - 1)(2)) \\ &= \frac{15}{2} (24 + 28) \\ &= \frac{15}{2} (52) \\ &= 390\end{aligned}$$

ดังนั้น จัดเก้าอี้ไว้ในหอประชุมทั้งหมด 15 แถว จะมีเก้าอี้ในหอประชุมนี้ทั้งหมด 390 ตัว

ตัวอย่างที่ 6 ลำดับชุดหนึ่งมี $a_n = 3n - 1$ จงหาค่า $a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{20}$

วิธีทำ จาก $a_n = 3n - 1$ จะได้

$$a_3 = 3(3) - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$a_4 = 3(4) - 1 = 12 - 1 = 11$$

$$a_5 = 3(5) - 1 = 15 - 1 = 14$$

จะได้ $a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{20}$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

นั่นคือ $d = 11 - 8 = 3$, $n = 20 - 2 = 18$

ให้ S_n แทน $a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{20}$ และ

เนื่องจาก $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$ จะได้

$$\begin{aligned}S_{18} &= \frac{18}{2} (2(8) + (18 - 1)(3)) \\ &= 9(16 + 51) \\ &= 9(67) \\ &= 603\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่า $a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{20}$ เท่ากับ 603

ตัวอย่างที่ 7 ถ้าอนุกรมเลขคณิตอนุกรมหนึ่ง มีค่าพจน์ที่ 10 เท่ากับ 21 และผลบวก 10 พจน์แรก เท่ากับ 120 แล้ว แล้วอนุกรมนี้คืออนุกรมใด

วิธีทำ ให้ a_{10} แทนพจน์ที่ 10 ของอนุกรมนี้ และ S_{10} แทน ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้ } a_{10} = a_1 + (10 - 1)d$$

$$21 = a_1 + 9d \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{และจาก } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

$$\text{จะได้ } S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + (10 - 1)d)$$

$$120 = 10a_1 + 45d \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ 5 คูณ (1) จะได้

$$105 = 5a_1 + 45d \quad \dots\dots\dots(3)$$

(2) - (3) จะได้

$$15 = 5a_1$$

$$a_1 = 3$$

นั่นคือ แทน $a_1 = 3$ ใน (1) จะได้

$$21 = (3) + 9d$$

$$9d = 21 - 3$$

$$d = 2$$

ดังนั้น อนุกรมนี้คือ 3, 5, 7, 9, ...

6. การวัดและการประเมินผล

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | วิธีการ | เครื่องมือ | เกณฑ์การผ่าน |
|--|--|--|---|
| ด้านความรู้ บอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้ | - เอกสารแนะแนวทางที่ 9 “ความหมายอนุกรมเลขคณิต” - การทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 ข้อ 1 - ข้อ 2 | - เอกสารแนะแนวทางที่ 9 “ความหมายอนุกรมเลขคณิต” - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 - แบบประเมินผลด้านความรู้ | - เอกสารแนะแนวทางที่ 9 “ความหมายอนุกรมเลขคณิต” ได้ ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 - ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 ข้อ 1 - ข้อ 2 ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 |
| หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ | - ตรวจแบบฝึกหัด 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 1 และข้อ 2 - ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 ข้อ 3 - ข้อ 5 | - แบบฝึกหัด 5 “อนุกรมเลขคณิต” - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 - แบบประเมินผลด้านความรู้ | - ทำแบบฝึกหัด 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้ ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 - ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 ข้อ 3 - ข้อ 5 ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 |
| นำอนุกรมเลขคณิตไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | - ตรวจแบบฝึกหัด 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 3 - ข้อ 10 - ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 ข้อ 6 - ข้อ 10 | - แบบฝึกหัด 5 “อนุกรมเลขคณิต” - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 - แบบประเมินผลด้านความรู้ | - ทำแบบฝึกหัด 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 3 - ข้อ 10 ได้ ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 - ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 ข้อ 6 - ข้อ 10 ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 |

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | วิธีการ | เครื่องมือ | เกณฑ์การผ่าน |
|---|---|--|---|
| ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้เหตุผลในการบอกความหมายของของอนุกรมเลขคณิตได้ | ทำเอกสารแนะแนวทางที่ 9 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” | - เอกสารแนะแนวทางที่ 9 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนให้เหตุผลในการบอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้ อยู่ในระดับดีขึ้น |
| ใช้การแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ | ตรวจใบงานที่ 6 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” | - ใบงานที่ 6 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนใช้การแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ อยู่ในระดับดีขึ้น |
| ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ของอนุกรมเลขคณิตได้ | ตรวจใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” | - ใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ของอนุกรมเลขคณิตได้ อยู่ในระดับดีขึ้น |
| ใช้การคิดสร้างสรรค์เพื่อแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ของอนุกรมเลขคณิตได้ | ตรวจใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” | - ตรวจใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนใช้การคิดสร้างสรรค์เพื่อแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ของอนุกรมเลขคณิตได้ อยู่ในระดับดีขึ้น |

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | วิธีการ | เครื่องมือ | เกณฑ์การผ่าน |
|--|---|--|---|
| ใช้การสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอการแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้ | ตรวจใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” | - ใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | นักเรียนใช้การสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอการแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้อยู่ในระดับดีขึ้น |
| ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ซื่อสัตย์สุจริต | การทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 | - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ | นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ในระดับดีขึ้น |
| มีวินัย | บันทึกการแต่งกาย | - แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ | นักเรียนมีวินัย อยู่ในระดับดีขึ้น |
| ใฝ่เรียนรู้ | บันทึกการเข้าเรียน | - แบบบันทึกการเข้าเรียน - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ | นักเรียนใฝ่เรียนรู้ อยู่ในระดับดีขึ้น |
| มุ่งมั่นในการทำงาน | - การส่งแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” | - แบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ | นักเรียนมุ่งมั่นในการทำงาน อยู่ในระดับดีขึ้น |

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | วิธีการ | เครื่องมือ | เกณฑ์การผ่าน |
|--|--|---|--|
| ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน ใช้ความสามารถในการสื่อสารในการ นำเสนอความหมายของอนุกรมเลข คณิตได้ | ตรวจเอกสารแนะ แนวทางที่ 9 “ความหมายของ อนุกรมเลขคณิต” | - เอกสารแนะ แนวทางที่ 9 “ความหมายของ อนุกรมเลขคณิต” - แบบประเมินผล ด้านสมรรถนะสำคัญ ของผู้เรียน | นักเรียนสามารถใช้ ความสามารถในการ สื่อสารในการ นำเสนอความหมาย ของอนุกรมเลขคณิต ได้ อยู่ในระดับดีขึ้น ไป |
| ใช้ความสามารถในการแก้ปัญหา โจทย์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม เลขคณิตได้ | ตรวจใบงานที่ 6 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรก ของอนุกรมเลขคณิต” | - ใบงานที่ 6 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรก ของอนุกรมเลข คณิต” - แบบประเมินผล ด้านสมรรถนะสำคัญ ของผู้เรียน | นักเรียนสามารถใช้ ความสามารถในการ แก้ปัญหาโจทย์ ผลบวก n พจน์แรก ของอนุกรมเลขคณิต ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป |
| ใช้ความสามารถในการคิดเพื่อ แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่ กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้ | ตรวจใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลข คณิตไปใช้” | - ตรวจใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลข คณิตไปใช้” - แบบประเมินผล ด้านสมรรถนะสำคัญ ของผู้เรียน | นักเรียนสามารถใช้ ความสามารถในการ คิดเพื่อแก้ปัญหา โจทย์หรือ สถานการณ์ที่ กำหนดให้โดยใช้ อนุกรมเลขคณิตได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป |
| สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำ กิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้ | ตรวจการทำงานกลุ่ม | - แบบบันทึกการ ทำงานกลุ่ม - แบบประเมินผล ด้านสมรรถนะสำคัญ ของผู้เรียน | นักเรียนสามารถใช้ ทักษะชีวิตในการทำ กิจกรรมกลุ่มในชั้น เรียนได้อยู่ในระดับดี ขึ้นไป |

7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ให้นักเรียนจัดกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน และทบทวนเรื่อง อนุกรม ใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม” ใช้เวลาประมาณ 10 นาที

7.2 ครูพูดเกริ่นนำเกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง “อนุกรมเลขคณิต” กับนักเรียน โดย ให้นักเรียนตอบคำถามโดยการสนทนากลุ่มระหว่างครูใช้เวลาประมาณ 20 นาที

ตัวอย่างคำถาม

- 1) กำหนดอนุกรม $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22$ นักเรียนมีข้อสังเกตอย่างไร
- 2) กำหนดอนุกรม $12 + 9 + 6 + 3 + 0 + (-3)$ นักเรียนมีข้อสังเกตอย่างไร

ตัวอย่างคำตอบ

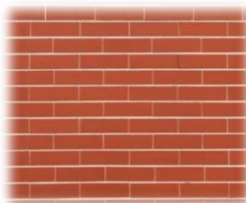
ข้อ 1)

- อนุกรม $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22$ ได้จากลำดับ 2, 6, 10, 14, 18, 22
- ลำดับ 2, 6, 10, 14, 18, 22 เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเท่ากับ 4

ข้อ 2)

- อนุกรม $12 + 9 + 6 + 3 + 0 + (-3)$ ได้จากลำดับ 12, 9, 6, 3, 0, -3
- ลำดับ 12, 9, 6, 3, 0, -3 เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเท่ากับ -3

ครูยกตัวอย่างภาพ ให้นักเรียนสังเกตและถามคำถามนักเรียนสามารถหาจำนวนตรรกภาพได้อย่างไร



ตัวอย่างคำตอบ

- ใช้การนับจำนวน
- สังเกตการเรียงของจำนวนแต่ละแถวเรียงเป็นลำดับแล้วนำมาบวกกัน เช่น การเรียงจำนวนของแก้วน้ำแต่ละแถวเป็น 5, 4, 3, 2, 1 นำมาบวกกันเป็น $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ เป็นต้น

ขั้นสอน

7.3 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 9 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันทำพร้อมให้นักเรียนศึกษาใบความรู้เรื่อง “อนุกรมเลขคณิต” ประกอบการทำเอกสารแนะแนวทาง ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติม (ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.4 ครูครูสุ่มให้นักเรียนนำเสนอคำตอบจากการทำเอกสารแนะแนวทางที่ 9 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติมหรือให้นักเรียนกลุ่มอื่นร่วมกันเฉลย (ใช้เวลาประมาณ 20 นาที)

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นเปรียบเทียบหรือวิเคราะห์

7.5 ครูเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 9 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 20 นาที)

7.6 ครูยกตัวอย่างอื่น ๆ เพิ่มเติม โดยใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม” (อนุกรมเลขคณิต) หน้าที่ 10 – 15 (ครูเลือกตัวอย่างตามความเหมาะสมของเวลา) ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 20 นาที)

ขั้นสรุป

7.7 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันสรุปเรื่อง ความหมายของอนุกรมเลขคณิต โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน อาจใช้การสุ่มนักเรียนบางคนเพื่อสรุป(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ขั้นนำไปใช้

7.8 ครูมอบหมายให้นักเรียนยกตัวอย่างอนุกรมเลขคณิตคนละ 1 ตัวอย่างแล้วอธิบายความหมายของอนุกรมเลขคณิตนั้นลงในสมุดแบบฝึกหัดใช้เวลาประมาณ 10 นาที

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นเตรียม

7.9 ให้นักเรียนจัดกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน และทบทวนเรื่อง ความหมายของเลขคณิต ใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรมเลขคณิต” ใช้เวลาประมาณ 10 นาที

ขั้นสอน

7.10 ครูแจกใบงานที่ 6 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนเรียนรู้ภายในกลุ่มและแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่างกลุ่ม พร้อมให้นักเรียนศึกษาใบความรู้เรื่อง “อนุกรมเลขคณิต” ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติม (ใช้เวลาประมาณ 25 นาที)

7.11 ครูแจกใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนเรียนรู้ภายในกลุ่มและแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่างกลุ่ม พร้อมให้นักเรียนศึกษาใบความรู้เรื่อง “อนุกรมเลขคณิต” ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติม (ใช้เวลาประมาณ 25 นาที)

ชั่วโมงที่ 4

ขั้นเปรียบเทียบหรือวิเคราะห์

7.12 ครูเฉลยใบงานที่ 6 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” และใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม (ใช้เวลาประมาณ 30 นาที)

7.13 ครูใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม”(อนุกรมเลขคณิต) หน้าที่ 16 – 21 ยกตัวอย่างเพิ่มเติม (ครูเลือกตัวอย่างตามความเหมาะสมของเวลา) (ใช้เวลาประมาณ 30 นาที)

ขั้นสรุป

7.14 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันสรุปเรื่อง ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต และการนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้ โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน อาจใช้การสุ่มนักเรียนบางคนเพื่อสรุป(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ชั่วโมงที่ 5

ชั้นนำไปใช้

7.15 ครูมอบหมายให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” โดยแต่ละกลุ่มทำกลุ่มละ 1 ข้อ(ใช้วิธีจับฉลาก)แล้วแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่างกลุ่มใช้เวลาประมาณ 20 นาที

7.16 ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” โดยสุ่มนักเรียนออกมาเฉลย โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน ครูอธิบายเพิ่มเติม (ใช้เวลาประมาณ 40 นาที)

ชั่วโมงที่ 6

7.17 ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ต่อโดยสุ่มนักเรียนออกมาเฉลย โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน ครูอธิบายเพิ่มเติม(ใช้เวลาประมาณ 30 นาที)

7.19 นักเรียนแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 (ใช้เวลาประมาณ 30 นาที)

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

| สื่อเอกสาร | สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี | แหล่งการเรียนรู้ | สื่ออื่น ๆ |
|--|--|------------------|------------|
| - เอกสารแนะแนวทางที่ 9 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” - ใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” - ใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” - ใบความรู้ที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” - แบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” | - สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม”(อนุกรมเลขคณิต) | - | - |

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

| จุดประสงค์การเรียนรู้ | นักเรียนที่ผ่าน | | นักเรียนที่ไม่ผ่าน | |
|--|-----------------|--------|--------------------|--------|
| | จำนวน (คน) | ร้อยละ | จำนวน (คน) | ร้อยละ |
| ด้านความรู้ | | | | |
| บอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้ | | | | |
| หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ | | | | |
| นำอนุกรมเลขคณิตไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | | | | |
| ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ | | | | |
| ให้เหตุผลในการบอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้ | | | | |
| ใช้การแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ | | | | |
| ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้ | | | | |
| ใช้การคิดสร้างสรรค์เพื่อแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้ | | | | |
| ใช้การสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอการแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้ | | | | |
| ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ | | | | |
| ซื่อสัตย์สุจริต | | | | |
| มีวินัย | | | | |
| ใฝ่เรียนรู้ | | | | |
| มุ่งมั่นในการทำงาน | | | | |
| ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน | | | | |
| ใช้ความสามารถในการสื่อสารในการนำเสนอความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้ | | | | |
| ใช้ความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ | | | | |
| ใช้ความสามารถในการคิดเพื่อแก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้ | | | | |
| สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้ | | | | |

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางวาสนา ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ
ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้บริหารโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา



ใบความรู้ที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต”

จุดประสงค์การเรียนรู้

- บอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้
- หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้
- นำอนุกรมเลขคณิตไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต(arithmetic series) คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต และมีผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตเป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิตด้วย สูตรผลบวกการหาอนุกรมเลขคณิต

$$\text{คือ } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ หรือ } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

พิจารณาอนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ ที่ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 2, 3, \dots, 100$

หาผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรมนี้ ทำได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \dots & + & 100 \\ & & & & & & & & & & + \\ & & & & & & & & & & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \dots & + & 1 \\ & & & & & & & & & & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 \end{array}$$

100 ตัว

เนื่องจาก $\underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101}_{100 \text{ ตัว}} = 100 \times 101$

ดังนั้น $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5,050$

จากวิธีการหาผลบวกข้างต้น สามารถหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ดังนี้

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) \dots\dots\dots(1)\end{aligned}$$

หรืออาจเขียน S_n ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d) \dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{\text{วงเล็บ}}$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ คือ $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต 6, 14, 22, ...

วิธีทำ จากลำดับเลขคณิต 6, 14, 22, ... จะได้ $a_1 = 6$ และ $d = 14 - 6 = 8$

แทน n ด้วย 10 ใน $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_{10} &= 6 + (10-1)(8) \\ &= 6 + 72 \\ &= 78\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{10} &= \frac{10}{2}(6 + 78) \\ &= 5(84) \\ &= 420\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต 6, 14, 22, ... คือ 420

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $2 + 6 + 10 + \dots + 38$

วิธีทำ จากอนุกรมเลขคณิต $2 + 6 + 10 + \dots + 38$

จะได้ $a_1 = 2$, $d = 6 - 2 = 4$ และ $a_n = 38$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } 38 &= 2 + (n-1)(4) \\ 38 &= 2 + 4n - 4\end{aligned}$$

$$38 = 4n - 2$$

$$40 = 4n$$

$$n = 10$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$2 + 6 + 10 + \dots + 38$$

จาก $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{10} = \frac{10}{2} (2 + 38)$
 $= 5(40)$
 $= 200$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $2 + 6 + 10 + \dots + 38$ คือ 200

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกของจำนวนคู่ตั้งแต่ 18 ถึง 482

วิธีทำ เนื่องจาก $18 + 20 + 22 + 24 + \dots + 482$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี

$$a_1 = 18, d = 20 - 18 = 2 \text{ และ } a_n = 482$$

จาก $a_n = a_1 + (n - 1)d$

จะได้ $482 = 18 + (n - 1)(2)$

$$482 = 18 + 2n - 2$$

$$482 = 2n + 16$$

$$466 = 2n$$

$$n = 233$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 233 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$18 + 20 + 22 + 24 + \dots + 482$$

จาก $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{233} = \frac{233}{2} (18 + 482)$
 $= \frac{233}{2} (500)$
 $= 58,250$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคู่ตั้งแต่ 18 ถึง 482 คือ 58,250

หมายเหตุ นอกจากจะหา S_n จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ เมื่อทราบ a_1, a_n และ n แล้วยังสามารถหา S_n เมื่อทราบ a_1, n และ d ได้ดังนี้

เนื่องจาก $a_n = a_1 + (n - 1)d$ และ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

จะได้
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n - 1)d)$$
$$= \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ และ } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลบวก 12 พจน์แรกของอนุกรม $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$

วิธีทำ จากอนุกรม $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

ที่มี $a_1 = 4, d = 1 - 4 = -3, n = 12$ และเนื่องจากไม่ทราบพจน์ที่ n สามารถใช้สูตร

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

จะได้
$$S_{12} = \frac{12}{2}(2(4) + (12 - 1)(-3))$$
$$= 6(8 + (-33))$$
$$= 6(-25)$$
$$= -150$$

ดังนั้น ผลบวก 12 พจน์แรกของอนุกรม $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$ คือ -150

ตัวอย่างที่ 5 หอประชุมของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีเก้าอี้จัดไว้แถวแรก 12 ตัว แถวที่สอง 14 ตัว แถวที่สาม 16 ตัว เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ถ้าจัดเก้าอี้ไว้ในหอประชุมทั้งหมด 15 แถว จะมีเก้าอี้ในหอประชุมนี้ทั้งหมดกี่ตัว

วิธีทำ ลำดับของจำนวนเก้าอี้แต่ละแถวในหอประชุม คือ ลำดับเลขคณิต $12, 14, 16, \dots, a_n$

ที่มี $a_1 = 12, d = 14 - 12 = 2$ และ $n = 15$

จาก เนื่องจากไม่ทราบพจน์ที่ n สามารถใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$

จะได้
$$S_{15} = \frac{15}{2}(2(12) + (15 - 1)(2))$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{15}{2} (24 + 28) \\
 &= \frac{15}{2} (52) \\
 &= 390
 \end{aligned}$$

ดังนั้น จัดเก้าอี้ไว้ในหอประชุมทั้งหมด 15 แถว จะมีเก้าอี้ในหอประชุมนี้ทั้งหมด 390 ตัว

ตัวอย่างที่ 6 ลำดับชุดหนึ่งมี $a_n = 3n - 1$ จงหาค่า $a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{20}$

วิธีทำ จาก $a_n = 3n - 1$ จะได้

$$a_3 = 3(3) - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$a_4 = 3(4) - 1 = 12 - 1 = 11$$

$$a_5 = 3(5) - 1 = 15 - 1 = 14$$

จะได้ $a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{20}$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

นั่นคือ $d = 11 - 8 = 3$, $n = 20 - 2 = 18$

ให้ S_n แทน $a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{20}$ และ

เนื่องจาก $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$ จะได้

$$\begin{aligned}
 S_{18} &= \frac{18}{2} (2(8) + (18 - 1)(3)) \\
 &= 9(16 + 51) \\
 &= 9(67) \\
 &= 603
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่า $a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{20}$ เท่ากับ 603

ตัวอย่างที่ 7 ถ้าอนุกรมเลขคณิตอนุกรมหนึ่ง มีค่าพจน์ที่ 10 เท่ากับ 21 และผลบวก 10 พจน์แรก

เท่ากับ 120 แล้ว แล้วอนุกรมนี้คืออนุกรมใด

วิธีทำ ให้ a_{10} แทนพจน์ที่ 10 ของอนุกรมนี้ และ S_{10} แทน ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมนี้

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้ } a_{10} = a_1 + (10 - 1)d$$

$$21 = a_1 + 9d \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{และจาก } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

$$\text{จะได้ } S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + (10 - 1)d)$$

$$120 = 10a_1 + 45d \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ 5 คูณ (1) จะได้

$$105 = 5a_1 + 45d \quad \dots\dots\dots(3)$$

(2) – (3) จะได้

$$15 = 5a_1$$

$$a_1 = 3$$

นั่นคือ แทน $a_1 = 3$ ใน (1) จะได้

$$21 = (3) + 9d$$

$$9d = 21 - 3$$

$$d = 2$$

ดังนั้น อนุกรมนี้คือ 3, 5, 7, 9, ...



เอกสารแนบแนวทางที่ 9

“ความหมายของอนุกรมเลขคณิต”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

บอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ให้เหตุผลในการบอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

ใช้ความสามารถในการสื่อสารในการนำเสนอความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้

คำชี้แจง

ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1. พิจารณาอนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + \dots + 100$

ที่ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 2, 3, \dots, 100$

หาผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรมนี้ ทำได้ดังนี้

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$$

+

$$100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 1$$

$$101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}$$

100 ตัว

เนื่องจาก $\underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101}_{100 \text{ ตัว}} = 100 \times 101$

100 ตัว

$$\text{ดังนั้น } 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5,050$$

2. พิจารณาอนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + \dots + 50$

ที่ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 2, 3, \dots, 50$

หาผลบวก 50 พจน์แรกของอนุกรมนี้ ทำได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots & + & 50 \\
 & & & & & & & & + \\
 & & & & & & & & 50 & + & \dots & + & \dots & + & \dots & + & \dots \\
 & & & & & & & & \underbrace{\dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots}_{\text{..... ตัว}}
 \end{array}$$

เนื่องจาก

$$\underbrace{\dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots}_{\text{..... ตัว}} = \dots \times \dots$$

$$\text{ดังนั้น } 1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \frac{\dots \times \dots}{\dots} = \dots$$

จากวิธีการหาผลบวกในข้อ 1 และ ข้อ 2 สามารถหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ดังนี้
ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } S_n &= \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + a_n \\
 &= a_1 + (a_1 + d) + \dots + \dots + (a_1 + (n-1)d) \quad \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

หรืออาจเขียน S_n ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
 S_n &= \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + a_1 \\
 &= a_n + \dots + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d) \quad \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\dots S_n = \underbrace{\dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots}_{\text{วงเล็บ}}$$

$$\dots S_n = n \dots$$

$$S_n = \dots$$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ คือ

และสามารถสรุปได้ว่า

อนุกรมเลขคณิต(arithmetic series) คือ

.....

.....

.....

เฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 9 “ความหมายของลำดับอนุกรมเลขคณิต”

1. พิจารณาอนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + \dots + 100$

ที่ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 2, 3, \dots, 100$

หาผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรมนี้ ทำได้ดังนี้

$$\begin{array}{r}
 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 \\
 + \\
 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 1 \\
 \hline
 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101
 \end{array}$$

100 ตัว

เนื่องจาก $\underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101}_{100 \text{ ตัว}} = 100 \times 101$

100 ตัว

ดังนั้น $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5,050$

2. พิจารณาอนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + \dots + 50$

ที่ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 2, 3, \dots, 50$

หาผลบวก 50 พจน์แรกของอนุกรมนี้ ทำได้ดังนี้

$$\begin{array}{r}
 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 50 \\
 + \\
 50 + 49 + 48 + 47 + \dots + 1 \\
 \hline
 51 + 51 + 51 + 51 + \dots + 51
 \end{array}$$

50 ตัว

เนื่องจาก

$$\underbrace{51 + 51 + 51 + 51 + \dots + 51}_{50 \text{ ตัว}} = 50 \times 51$$

50 ตัว

ดังนั้น $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1,275$

จากวิธีการหาผลบวกในข้อ 1 และ ข้อ 2 สามารถหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ดังนี้
ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี d เป็นผลต่างร่วม

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

หรืออาจเขียน S_n ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d) \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{\text{วงเล็บ}}$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ คือ $\frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

และสามารถสรุปได้ว่า

อนุกรมเลขคณิต(arithmetic series) คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต และมีผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตเป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิตด้วย สูตรผลบวกการหาอนุกรมเลขคณิต

$$\text{คือ } S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$



ใบงานที่ 6

“ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ใช้การแก้ปัญหามาจากปัญหาโจทย์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

ใช้ความสามารถในการแก้ปัญหามาจากโจทย์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้

คำชี้แจง

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้ถูกต้อง
2. ให้ตัวแทนกลุ่มออกนำเสนอการแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้และสมาชิกในกลุ่มที่เหลือร่วมแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม

1) จงหาผลบวก 12 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต 2, 6, 10, ...

.....

.....

.....

.....

.....

2) จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) กำหนดลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่ง $a_5 = 17$ และ $a_9 = 33$ จงหา S_8

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) จงหาว่าผลบวกของอนุกรม $2 + 7 + 12 + 17 + \dots$ จำนวนกี่พจน์ จึงทำให้ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับ 87

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5) จงหาผลบวกของจำนวนที่มีค่าตั้งแต่ 25 ถึง 122 ที่หารด้วย 3 ลงตัว

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลยใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต”

- 1) จากลำดับเลขคณิต 2, 6, 10, ... จะได้ $a_1 = 6$ และ $d = 6 - 2 = 4$

แทน n ด้วย 12 ใน $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad a_{12} &= 2 + (12 - 1)(4) \\ &= 2 + 44 \\ &= 46\end{aligned}$$

$$\text{จาก} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad S_{12} &= \frac{12}{2}(2 + 46) \\ &= 6(48) \\ &= 288\end{aligned}$$

$$\text{หรือจาก} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad S_{12} &= \frac{12}{2}(2(2) + (12 - 1)(4)) \\ &= 6(4 + 44) \\ &= 6(48) \\ &= 288\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 12 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต 2, 6, 10, ... คือ 288

- 2) จงหาผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$

จากอนุกรมเลขคณิต $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$

จะได้ $a_1 = 4$ และ $d = 1 - 4 = -3$

แทน n ด้วย 10 ใน $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad a_{10} &= 4 + (10 - 1)(-3) \\ &= 4 + (-27) \\ &= -23\end{aligned}$$

$$\text{จาก} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad S_{10} &= \frac{10}{2}(4 + (-23)) \\ &= 5(-19) \\ &= -95\end{aligned}$$

$$\text{หรือจาก } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_{10} &= \frac{10}{2} (2(4) + (10-1)(-3)) \\ &= 5(8 + (-27)) \\ &= 5(-19) \\ &= -95 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 10 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $4 + 1 + (-2) + (-5) + \dots$ คือ -95

3. โจทย์กำหนด $a_5 = 17$ และ $a_9 = 33$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_5 &= a_1 + (5-1)d \\ 17 &= a_1 + 4d \quad \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

และจะได้

$$\begin{aligned} a_9 &= a_1 + (9-1)d \\ 33 &= a_1 + 8d \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

นำ (2) - (1) จะได้

$$\begin{aligned} 16 &= 4d \\ d &= 4 \end{aligned}$$

นั่นคือ แทน $d = 4$ ใน (1) จะได้

$$\begin{aligned} 17 &= a_1 + 4(4) \\ a_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } S_8 &= \frac{8}{2} (2(1) + (8-1)(4)) \\ &= 4(2 + 28) \\ &= 4(30) \\ &= 120 \end{aligned}$$

ดังนั้น ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่ง $a_5 = 17$ และ $a_9 = 33$ จะได้ S_8 คือ 120

4) จากอนุกรม $2 + 7 + 12 + 17 + \dots$ ได้จากลำดับเลขคณิต 2, 7, 12, 17, ...

จะได้ $a_1 = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ และ ให้ S_n แทน ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

จะได้ $87 = \frac{n}{2} (2(2) + (n-1)(5))$

$$87 = \frac{n}{2} (4 + 5n - 5)$$

$$87 = \frac{n}{2} (5n - 1)$$

$$174 = 5n^2 - n$$

$$5n^2 - n - 174 = 0$$

หา n จาก

$$\begin{aligned} n &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(5)(-174)}}{2(5)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1+3,480}}{10} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{3,481}}{10} \\ &= \frac{1 \pm 59}{10} \end{aligned}$$

นั่นคือ $n = 6$ หรือ $\frac{-58}{10}$ เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรม $2 + 7 + 12 + 17 + \dots$ จำนวน 6 พจน์ ที่ทำให้ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับ 87

5) จากโจทย์ จำนวนที่มีค่าตั้งแต่ 25 ถึง 122 ที่หารด้วย 3 ลงตัว

เป็นลำดับเลขคณิต 27, 30, 33, ..., 120 และให้ S_n แทน ผลบวกของจำนวนที่มีค่าตั้งแต่ 25 ถึง 122 ที่หารด้วย 3 ลงตัว ที่มี $a_1 = 27$, $d = 30 - 27 = 3$ และ $a_n = 120$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $120 = 27 + (n-1)(3)$

$$120 = 27 + 3n - 3$$

$$120 = 3n + 30$$

$$90 = 3n$$

$$n = 30$$

จาก $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

จะได้ $S_{30} = \frac{30}{2} (27 + 120)$

$$= 15(147)$$

$$= 2,205$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนที่มีค่าตั้งแต่ 25 ถึง 122 ที่หารด้วย 3 ลงตัว คือ 2,205



ใบงานที่ 7

“การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ อนุกรมเลขคณิตได้
- ใช้การคิดสร้างสรรค์เพื่อแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ อนุกรมเลขคณิตได้
- ใช้การสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอการแก้ปัญหาจากปัญหา โจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

- ใช้ความสามารถในการคิดเพื่อแก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรม เลขคณิตได้

คำชี้แจง

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่ กำหนดให้ถูกต้อง
2. ให้ตัวแทนกลุ่มออกนำเสนอการแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้และสมาชิกในกลุ่มที่ เหลือร่วมแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม

1) แท่งไม้ก่องหนึ่งชั้นบนสุดมีไม้ 5 แท่ง ชั้นถัดลงมามีไม้เพิ่มขึ้นชั้นละ 2 แท่ง ถ้าไม้ก่องนี้มีทั้งหมด 285 แท่ง จงหาว่าไม้ก่องนี้มีกี่ชั้น

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) นาฬิกาถูกตุ้มเรือนหนึ่งตีทุก ๆ 1 ชั่วโมง โดยมีตี 1 ครั้งเมื่อเวลา 1 นาฬิกา ตี 2 ครั้ง เมื่อเวลา 2 นาฬิกา ตี 3 ครั้ง เมื่อเวลา 3 นาฬิกา เป็นต้นเรื่อย ๆ ไป ในเวลา 24 ชั่วโมง นาฬิกาถูกตุ้มเรือนนี้ตีทั้งหมดกี่ครั้ง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) วัตถุถูกปล่อยจากเครื่องบินซึ่งสูงจากผิวโลก 3,600 ฟุต วัตถุดังกล่าวจะเคลื่อนที่ได้ 16 ฟุตในวินาทีแรก 48 ฟุตในวินาทีที่สอง และ 80 ฟุตในวินาทีที่สาม เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จงหาว่าวัตถุใช้เวลากี่วินาทีในการเคลื่อนที่สู่ผิวโลก

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) สมจิตเก็บเงินตั้งแต่วันที่ 10 กรกฎาคม เพื่อซื้ออุปกรณ์การเรียนราคา 1,900 บาท โดยวันแรกเก็บได้ 100 บาท วันต่อมาเก็บมากขึ้นวันละ 20 บาท จงสมหาว่าสมจิตเก็บเงินครบวันที่เท่าไรของเดือนกรกฎาคม

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลยใบงานที่ 7 “การนำผลบวกของอนุกรมเลขคณิตไปใช้”

- 1) ให้ n แทนจำนวนชั้นของกองไม้นี้
ลำดับของจำนวนแท่งไม้แต่ละชั้นใน คือ ลำดับเลขคณิต 5, 7, 9, ..., a_n
ที่มี $a_1 = 5$, $d = 7 - 5 = 2$ และ $S_n = 285$
จาก เนื่องจากไม้ที่ทราบพจน์ที่ n สามารถใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$
จะได้
$$285 = \frac{n}{2} (2(5) + (n - 1)(2))$$
$$285 \times 2 = n(10 + 2n - 2)$$
$$570 = 2n^2 + 8n$$
$$2n^2 + 8n - 570 = 0$$
$$n^2 + 4n - 285 = 0$$
$$(n + 19)(n - 15) = 0$$

นั่นคือ $n = -19$ หรือ $n = 15$ เนื่องจากจำนวนชั้นของไม้เป็นจำนวนเต็มบวก
ดังนั้น จำนวนชั้นของกองไม้นี้ คือ 15 ชั้น
- 2) ให้ S_n แทนจำนวนนาฬิกาถูกต้อมเรือนี่ดีในเวลา 24 ชั่วโมง
ลำดับของจำนวนการตีของนาฬิกาถูกต้อมเรือนี่ดี คือ ลำดับเลขคณิต 1, 2, 3, ..., 24
ที่มี $a_1 = 1$, $d = 2 - 1 = 1$ และ $n = 24$
จากสูตร $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$
จะได้
$$S_{24} = \frac{24}{2} (2(1) + (24 - 1)(1))$$
$$= 12(2 + 23)$$
$$= 12(25)$$
$$= 300$$

ดังนั้น จำนวนนาฬิกาถูกต้อมเรือนี่ดีในเวลา 24 ชั่วโมง คือ 300 ครั้ง
- 3) ให้ n แทนเวลาการเคลื่อนที่ของวัตถุผิวโลก
ลำดับของการเคลื่อนที่ของวัตถุผิวโลก คือ ลำดับเลขคณิต 16, 48, 80, ..., a_n
ที่มี $a_1 = 16$, $d = 48 - 16 = 32$ และ $S_n = 3,600$
จากสูตร $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$
จะได้
$$3,600 = \frac{n}{2} (2(16) + (n - 1)(32))$$

$$3,600 = 16n + 16n(n - 1)$$

$$3,600 = 16n + 16n^2 - 16n$$

$$16n^2 = 3,600$$

$$n^2 = 225$$

$$n = \pm\sqrt{225}$$

นั่นคือ $n = \sqrt{225} = 25$ หรือ $n = -\sqrt{225} = -25$

เนื่องจากเวลาการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น เวลาการเคลื่อนที่ของวัตถุสู่ผิวโลก คือ 25 วินาที

4) ให้ n แทนจำนวนวันเก็บเงินของส้มจี๊ด

ลำดับของจำนวนวันเก็บเงินของส้มจี๊ด คือ ลำดับเลขคณิต 100, 120, 140, ..., a_n

ที่มี $a_1 = 120$, $d = 120 - 100 = 20$ และ $S_n = 1,900$

จากสูตร $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$

จะได้ $1,900 = \frac{n}{2} (2(100) + (n - 1)(20))$

$$1,900 = 100n + 10n(n - 1)$$

$$1,900 = 100n + 10n^2 - 10n$$

$$10n^2 + 90n - 1,900 = 0$$

$$n^2 + 9n - 190 = 0$$

$$(n + 19)(n - 10) = 0$$

นั่นคือ $n = -19$ หรือ $n = 10$

เนื่องจากจำนวนวันเก็บเงินของส้มจี๊ดเป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น ส้มจี๊ดเก็บเงินครบวันที่ $10 + 9 = 19$ ของเดือนกรกฎาคม



แบบฝึกหัดที่ 5

“อนุกรมเลขคณิต”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้
- นำอนุกรมเลขคณิตไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

1. จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต เมื่อกำหนดให้
 - 1) $n = 5$, $a_1 = 3$ และ $d = 4$
 - 2) $n = 8$, $a_1 = -4$ และ $d = 9$
 - 3) $n = 11$, $a_1 = -3$ และ $d = -3$
 - 4) $n = 20$ และลำดับเลขคณิต คือ 3, 6, 9, 12, ...
 - 5) $n = 55$ และลำดับเลขคณิต คือ -4, 0, 4, 8, ...
 - 6) $n = 17$ และลำดับเลขคณิต คือ -8, -2, 4, 10, 16, ...
2. จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิตต่อไปนี้
 - 1) $18 + 20 + 22 + 24 + \dots + 482$
 - 2) $6 + 9 + 12 + 15 + \dots + 102$
 - 3) $40 + 37 + 34 + 31 + \dots + 1$
3. จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิตที่มีพจน์แรก คือ 11 ผลต่างร่วม คือ 7 และพจน์สุดท้ายคือ 109
4. ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์ที่ 5 เป็น 17 และพจน์ที่ 9 เป็น 33 จงหา S_9
5. ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $2 + 7 + 12 + \dots$ เป็น 87 มีทั้งหมดกี่พจน์
6. จงหาผลบวกของจำนวนคี่บวก 102 จำนวนแรก
7. อนุกรมเลขคณิตชุดหนึ่งมีผลบวก 8 พจน์แรก เป็น 16 จงหา $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_7$
8. จงหาผลบวกของจำนวนตั้งแต่ 40 ถึง 100 ที่หารด้วย 3 ลงตัว
9. พี่ชายยืมพันธุ์กุหลาบโดยวิธีการตอนกิ่งเพื่อต้อนรับวันแห่งความรัก โดยวันแรกเขาขยายพันธุ์ได้ 30 กิ่ง ในวันถัดไปพี่ชายสามารถขยายพันธุ์กุหลาบได้มากกว่าวันก่อนหน้า 7 กิ่ง เมื่อครบ 14 วันพี่ชายขยายพันธุ์กุหลาบได้ทั้งหมดกี่กิ่ง
10. ต้องการปลูกสวนป่าโดยปลูกต้นตะเคียนทองเป็นแถวดังนี้ แถวแรก 15 ต้น แถวที่สอง 17 ต้น แถวที่สาม 19 ต้น โดยปลูกเพิ่มเช่นนี้เป็นลำดับเลขคณิต ต่อปลูกต้นตะเคียนทอง 20 แถว จะมีต้นตะเคียนทองในสวนป่าของต่อทั้งหมดกี่ต้น

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต”

1. 1) จากโจทย์กำหนด จะได้ $n = 5$, $a_1 = 3$ และ $d = 4$

แทน n ด้วย 5 ใน $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_5 &= 3 + (5 - 1)(4) \\ &= 3 + 16 \\ &= 19\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_5 &= \frac{5}{2}(3 + 19) \\ &= \frac{5}{2}(22) \\ &= 55\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 5 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตเมื่อกำหนดให้ $n = 5$, $a_1 = 3$ และ $d = 4$ คือ 55

- 2) จากโจทย์กำหนด จะได้ $n = 8$, $a_1 = -4$ และ $d = 9$

แทน n ด้วย 8 ใน $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_8 &= -4 + (8 - 1)(9) \\ &= -4 + 63 \\ &= 59\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_8 &= \frac{8}{2}(-4 + 59) \\ &= 4(55) \\ &= 220\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตเมื่อกำหนดให้ $n = 8$, $a_1 = -4$ และ $d = 9$ คือ 220

- 3) จากโจทย์กำหนด จะได้ $n = 11$, $a_1 = -3$ และ $d = -3$

แทน n ด้วย 11 ใน $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_{11} &= -3 + (11 - 1)(-3) \\ &= -3 + (-30)\end{aligned}$$

$$= -33$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{11} &= \frac{11}{2}(-3 + (-33)) \\ &= \frac{11}{2}(-36) \\ &= 11(-18) \\ &= -198\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 11 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตเมื่อ $n = 11$, $a_1 = -3$ และ $d = -3$ คือ -198

4) จากโจทย์กำหนดลำดับเลขคณิต คือ 3, 6, 9, 12, ...

$$\text{จะได้ } a_1 = 3 \text{ และ } d = 6 - 3 = 3$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 20 \text{ ใน } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_{20} &= 3 + (20 - 1)(3) \\ &= 3 + 57 \\ &= 60\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{20} &= \frac{20}{2}(3 + 60) \\ &= 10(63) \\ &= 630\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตที่ได้จากลำดับ 3, 6, 9, 12, ... คือ 630

5) จากโจทย์กำหนดลำดับเลขคณิต คือ -4, 0, 4, 8, ...

$$\text{จะได้ } a_1 = -4 \text{ และ } d = 4 - 0 = 4$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 55 \text{ ใน } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_{55} &= -4 + (55 - 1)(4) \\ &= -4 + 216 \\ &= 212\end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } S_{55} &= \frac{55}{2}(-4 + 212) \\
 &= \frac{55}{2}(208) \\
 &= 55(104) \\
 &= 5,720
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 55 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตที่ได้จากลำดับ -4, 0, 4, 8, ... คือ 5,720

6) จากโจทย์กำหนดลำดับเลขคณิต คือ -8, -2, 4, 10, 16, ...

$$\text{จะได้ } a_1 = -8 \text{ และ } d = -2 - (-8) = 6$$

$$\text{แทน } n \text{ ด้วย } 17 \text{ ใน } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } a_{17} &= -8 + (17 - 1)(6) \\
 &= -8 + 96 \\
 &= 88
 \end{aligned}$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } S_{17} &= \frac{17}{2}(-8 + 88) \\
 &= \frac{17}{2}(80) \\
 &= 17(40) \\
 &= 680
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 17 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตที่ได้จากลำดับ -8, -2, 4, 10, 16, ... คือ 680

2. 1) จากอนุกรมเลขคณิต $18 + 20 + 22 + 24 + \dots + 482$

$$\text{จะได้ } a_1 = 18, d = 20 - 18 = 2 \text{ และ } a_n = 482$$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้ } 482 = 18 + (n - 1)(2)$$

$$482 = 18 + 2n - 2$$

$$482 = 2n + 16$$

$$466 = 2n$$

$$n = 233$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 233 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$18 + 20 + 22 + 24 + \dots + 482$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{233} &= \frac{233}{2}(18 + 482) \\ &= \frac{233}{2}(500) \\ &= 233(250) \\ &= 58,250\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $18 + 20 + 22 + 24 + \dots + 482$ คือ 58,250

- 2) จากอนุกรมเลขคณิต $6 + 9 + 12 + 15 + \dots + 102$

$$\text{จะได้ } a_1 = 6, d = 9 - 6 = 3 \text{ และ } a_n = 102$$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้ } 102 = 6 + (n - 1)(3)$$

$$102 = 6 + 3n - 3$$

$$102 = 3n + 3$$

$$99 = 3n$$

$$n = 33$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 33 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$6 + 9 + 12 + 15 + \dots + 102$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{33} &= \frac{33}{2}(6 + 102) \\ &= \frac{33}{2}(108) \\ &= 33(54) \\ &= 1,782\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $6 + 9 + 12 + 15 + \dots + 102$ คือ 1,782

- 3) จากอนุกรมเลขคณิต $40 + 37 + 34 + 31 + \dots + 1$

$$\text{จะได้ } a_1 = 40, d = 37 - 40 = -3 \text{ และ } a_n = 1$$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้ } 1 = 40 + (n - 1)(-3)$$

$$1 = 40 - 3n + 3$$

$$1 = -3n + 43$$

$$3n = 42$$

$$n = 14$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 14 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$40 + 37 + 34 + 31 + \dots + 1$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{14} &= \frac{14}{2}(40 + 1) \\ &= 7(41) \\ &= 287\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $40 + 37 + 34 + 31 + \dots + 1$ คือ 287

3. จากโจทย์กำหนด

$$\text{จะได้ } a_1 = 11, d = 7 \text{ และ } a_n = 109$$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้ } 109 = 11 + (n - 1)(7)$$

$$109 = 11 + 7n - 7$$

$$109 = 7n + 4$$

$$7n = 105$$

$$n = 15$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 15 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

ที่มีพจน์แรก คือ 11 ผลต่างร่วม คือ 7 และพจน์สุดท้ายคือ 109

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_{15} &= \frac{15}{2}(11 + 109) \\ &= \frac{15}{2}(120) \\ &= 15(60) \\ &= 900\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมเลขคณิตที่มีพจน์แรก คือ 11 ผลต่างร่วม คือ 7

และพจน์สุดท้ายคือ 109 คือ 900

4. จากโจทย์กำหนดจะได้ $a_5 = 17$ และ $a_9 = 33$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้ } a_5 = a_1 + (5 - 1)d$$

$$17 = a_1 + 4d \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$a_9 = a_1 + (9 - 1)d$$

$$33 = a_1 + 8d \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ (2) - (1) จะได้

$$33 - 17 = 8d - 4d$$

$$16 = 4d$$

$$d = 4$$

นั่นคือแทนค่า $d = 4$ ใน (1) จะได้

$$17 = a_1 + 4(4)$$

$$17 = a_1 + 16$$

$$a_1 = 1$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 9 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์ที่ 5 เป็น 17 และพจน์ที่ 9 เป็น 33

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

$$\text{จะได้ } S_9 = \frac{9}{2} (2(1) + (9 - 1)(4))$$

$$= \frac{9}{2} (2 + 32)$$

$$= \frac{9}{2} (34)$$

$$= 9(17) = 153$$

ดังนั้น ลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีพจน์ที่ 5 เป็น 17 และพจน์ที่ 9 เป็น 33 มี S_9 คือ 153

5. เนื่องจาก $2 + 7 + 12 + \dots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี

$$a_1 = 2, d = 7 - 2 = 5 \text{ และ } S_n = 87$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

$$\text{จะได้ } S_n = \frac{n}{2} (2(2) + (n - 1)(5))$$

$$87 = \frac{n}{2} (4 + 5n - 5)$$

$$174 = n(5n - 1)$$

$$174 = 5n^2 - n$$

$$5n^2 - n - 174 = 0$$

$$(5n + 29)(n - 6) = 0$$

$$\text{จะได้ } n = 6 \text{ หรือ } n = -\frac{29}{5}$$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $2 + 7 + 12 + \dots$ เป็น 87

มีทั้งหมด 6 พจน์

6. จากจำนวนคี่บวก 102 จำนวนแรก

จะได้ $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี

$$a_1 = 1, d = 3 - 1 = 2 \text{ และ } n = 102$$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้ } a_{102} = (1) + (102 - 1)(2)$$

$$a_{102} = 1 + 202$$

$$a_{102} = 203$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 102 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\text{จะได้ } S_{102} = \frac{102}{2}(1 + 203)$$

$$= 51(204)$$

$$= 10,404$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคี่บวก 102 จำนวนแรก คือ 10,404

7. จากอนุกรมเลขคณิตชุดหนึ่งมีผลบวก 8 พจน์แรก เป็น 16

$$\text{จะได้ } S_8 = 16$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\text{จะได้ } S_8 = \frac{8}{2}(a_1 + a_8)$$

$$16 = 4(a_1 + a_8)$$

$$a_1 + a_8 = 4 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{และ } S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8$$

$$16 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ (2) - (1) จะได้

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_7 &= 16 - 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุกรมเลขคณิตชุดหนึ่งมีผลบวก 8 พจน์แรก เป็น 16

จะได้ $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_7$ เท่ากับ 12

8. จำนวนที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 40 ที่หารด้วย 3 ลงตัว คือ 42
 เนื่องจาก 100 หารด้วย 3 ได้ผลหารเป็น 33 และได้เศษเป็น 1
 ดังนั้น จำนวนที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 100 ซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว คือ $100 - 1$
 หรือ 99 จะได้ จำนวนตั้งแต่ 40 ถึง 100 ที่หารด้วย 3 ลงตัวเป็นลำดับเลขคณิต
 ที่มีพจน์แรกเป็น 42 ผลต่างร่วมเป็น 3 และ พจน์ที่ n เป็น 99
- จาก $a_n = a_1 + (n - 1)d$
 จะได้ $99 = 42 + (n - 1)(3)$
 $99 = 42 + 3n - 3$
 $99 = 3n + 39$
 $60 = 3n$
 $n = 20$
- จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 20 พจน์แรกของของจำนวนตั้งแต่ 40 ถึง 100
 ที่หารด้วย 3 ลงตัว
- จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
 จะได้ $S_{20} = \frac{20}{2}(42 + 99)$
 $= 10(141)$
 $= 1,410$
- ดังนั้น ผลบวกของจำนวนตั้งแต่ 40 ถึง 100 ที่หารด้วย 3 ลงตัว คือ 1,410

10. ลำดับของขยายพันธุ์กุหลาบโดยวิธีการตอนกิ่ง คือ ลำดับเลขคณิต 30, 37, 44, ..., a_n
 ที่มี $a_1 = 30$, $d = 37 - 30 = 7$ และ $n = 14$
- จาก เนื่องจากไม่ทราบพจน์ที่ n สามารถใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$
 จะได้ $S_{14} = \frac{14}{2}(2(30) + (14 - 1)(7))$

$$= 7(60 + 91)$$

$$= 7(151)$$

$$= 1,057$$

ดังนั้น เมื่อครบ 14 วันพึงขายพันธุ์กุหลาบได้ทั้งหมด 1,057 กิ่ง

11.

ลำดับของการปลูกสวนป่าโดยปลูกต้นตะเคียนทองเป็นแถว คือ

ลำดับเลขคณิต 15, 17, 19, ..., a_n

ที่มี $a_1 = 15$, $d = 17 - 15 = 2$ และ $n = 20$

จาก เนื่องจากไม่ทราบพจน์ที่ n สามารถใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$

$$\text{จะได้ } S_{20} = \frac{20}{2} (2(15) + (20 - 1)(2))$$

$$= 10(30 + 38)$$

$$= 10(68)$$

$$= 680$$

ดังนั้น มีต้นตะเคียนทองในสวนป่าของต่อทั้งหมด 680 ต้น

สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม”(อนุกรมเลขคณิต) หน้าที่ 10 - 17

อนุกรมเลขคณิต

ความหมายของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 4

พิจารณาอนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + \dots + 100$

ที่ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 2, 3, \dots, 100$

หาผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรมนี้ จะได้

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 \\ 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \end{array}$$

100 ตัว

back Next

อนุกรมเลขคณิต

ความหมายของอนุกรมเลขคณิต

เนื่องจาก $101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 = 100 \times 101$

100 ตัว

ดังนั้น $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5,050$

back Next

อนุกรมเลขคณิต

ความหมายของอนุกรมเลขคณิต

เนื่องจากตัวอย่างที่ 4 พิจารณา

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) \dots (1)$$

หรือ

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + a_n - (n-1)d \dots (2)$$

back Next

อนุกรมเลขคณิต

ความหมายของอนุกรมเลขคณิต

เนื่องจากตัวอย่างที่ 4 พิจารณา

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) \dots (1)$$

หรือ

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + a_n - (n-1)d \dots (2)$$

back Next

อนุกรมเลขคณิต

ความหมายของอนุกรมเลขคณิต

นำ (1) บวก (2) จะได้

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)$$

$2S_n = n(a_1 + a_n)$ n วงเล็บ

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ดังนั้น ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \text{ คือ } \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

back Next

อนุกรมเลขคณิต

ความหมายของอนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต(arithmetic series) คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต และมีผลบวกของลำดับเลขคณิตเป็นผลบวกของอนุกรมเลขคณิตด้วย สูตรผลบวกการหาอนุกรมเลขคณิต คือ

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

หรือ

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$= \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

back Next

อนุกรมเลขคณิต

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลบวก 23 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต 7, 11, 15, 19, ...

วิธีทำ จากลำดับเลขคณิต 7, 11, 15, 19, ... จะได้ $a_1 = 7$ และ $d = 11 - 7 = 4$

ให้ S_{23} เป็นผลบวก 23 พจน์แรกของอนุกรม

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้ $a_{23} = 7 + (32-1)4$

$$= 7 + (31)4$$

$$= 7 + 124$$

$$= 131$$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ จะได้ $S_{23} = \frac{32}{2}(7 + (131))$

$$= 16(138)$$

$$= 2,208$$

หรือจาก $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ จะได้ $S_{23} = \frac{32}{2}(2(7) + (32-1)4)$

$$= 16(14 + (31)4)$$

$$= 16(138)$$

$$= 2,208$$

ดังนั้นผลบวก 23 พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิตนี้ คือ 2,208

back Next

อนุกรมเลขคณิต

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 7 จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $3 + 8 + 13 + 18 + \dots + 63$

วิธีทำ จากอนุกรมเลขคณิต $3 + 8 + 13 + 18 + \dots + 63$

จะได้ $a_1 = 3$, $d = 8 - 3 = 5$ และ $a_n = 63$

ให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้ $63 = 3 + (n-1)5$

$$63 = 3 + 5n - 5$$

$$5n = 65$$

$$n = 13$$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ จะได้ $S_{13} = \frac{13}{2}(3 + (63))$

$$= \frac{13}{2}(66)$$

$$= 429$$

ดังนั้นผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $3 + 8 + 13 + 18 + \dots + 63$ คือ 429

back Next

สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม”(อนุกรมเลขคณิต) หน้า ที่ 18 - 21

อนุกรมเลขคณิต

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลบวกของจำนวนที่ตั้งแต่ 7 ถึง 121

วิธีทำ พิจารณาจำนวนที่ตั้งแต่ 7 ถึง 121 เป็นลำดับเลขคณิต 7, 9, 11, ..., 121
จะได้ $a_1 = 7$, $d = 9 - 7 = 2$ และ $a_n = 121$

ให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
จาก $a_n = a_1 + (n - 1)d$ จะได้ $S_{58} = \frac{58}{2}((7) + (121))$
จะได้ $121 = 7 + (n - 1)(2)$ $= (29 \times 128)$
 $2n = 116$ $= 3,721$
 $n = 58$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนที่ตั้งแต่ 7 ถึง 121 คือ 3,721

back Next

อนุกรมเลขคณิต

การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้

ตัวอย่างที่ 9 จากภาพมีจำนวนชื่อโกแลตทั้งหมดกี่ลูก

วิธีทำ

จากภาพชื่อโกแลตแต่ละชั้นเรียงจากแถวล่างถึงแถวบนเป็นลำดับเลขคณิต 16, 15, 14, ..., 1
จะได้ $a_1 = 16$, $a_n = 1$ และ $n = 16$

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
จะได้ $S_{16} = \frac{16}{2}((16) + (1))$
 $= (8 \times 17)$
 $= 137$

ดังนั้น ภาพมีจำนวนชื่อโกแลตทั้งหมด 137 ลูก

back Next

อนุกรมเลขคณิต

การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้

ตัวอย่างที่ 10 โรงสีข้าวแห่งหนึ่งจัดกระสอบข้าวสารเป็นกองโดยมี 25 กระสอบในชั้นแรก 23 กระสอบในชั้นที่สอง 21 กระสอบในชั้นที่สามเป็นดังนี้เรื่อย ๆ ไป ถ้าชั้นสุดท้ายมีกระสอบข้าวสารมี 7 กระสอบ จงหาว่าโรงสีข้าวแห่งนั้นมีข้าวสารทั้งหมดกี่กระสอบ

จากโจทย์การเรียงกระสอบข้าวสาร 25 กระสอบในชั้นแรก 23 กระสอบในชั้นที่สอง 21 กระสอบในชั้นที่สามเป็นดังนี้เรื่อย ๆ ไป ลำดับเลขคณิต 25, 23, 21, ..., 7
จะได้ $a_1 = 25$, $a_n = 7$ และ $d = 23 - 25 = -2$

ให้ S_n เป็นผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม
จาก $a_n = a_1 + (n - 1)d$ $7 = 25 - 2n + 2$
จะได้ $7 = 25 + (n - 1)(-2)$ $2n = 20$
 $n = 10$

ดังนั้น โรงสีข้าวแห่งนั้นมีข้าวสารทั้งหมด 160 กระสอบ

back Next

อนุกรมเลขคณิต

การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้

ตัวอย่างที่ 10 โรงสีข้าวแห่งหนึ่งจัดกระสอบข้าวสารเป็นกองโดยมี 25 กระสอบในชั้นแรก 23 กระสอบในชั้นที่สอง 21 กระสอบในชั้นที่สามเป็นดังนี้เรื่อย ๆ ไป ถ้าชั้นสุดท้ายมีกระสอบข้าวสารมี 7 กระสอบ จงหาว่าโรงสีข้าวแห่งนั้นมีข้าวสารทั้งหมดกี่กระสอบ

จาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
จะได้ $S_{10} = \frac{10}{2}((25) + (7))$
 $= (5 \times 32)$
 $= 160$

ดังนั้น โรงสีข้าวแห่งนั้นมีข้าวสารทั้งหมด 160 กระสอบ

back Next



แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 เรื่อง “อนุกรมเลขคณิต”
รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน รหัสวิชา ค32102 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
เวลา 30 นาที คะแนนเต็ม 10 คะแนน

คำชี้แจง

- 1) ข้อสอบฉบับนี้เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาทำข้อสอบ 30 นาที
- 2) ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวแล้วทำเครื่องหมาย (X) ลงในกระดาษคำตอบ

มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

ค 1.2 ม.5/2 เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้

จุดประสงค์การเรียนรู้ บอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้

1. ข้อใดเป็นอนุกรมเลขคณิต

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $3 + 5 + 7 + 11 + 13$ | 2) $2 + 4 + 8 + 16 + 32$ |
| 3) $-6 + 0 + 6 + 12 + 18$ | 4) $5 + 10 + 15 + 30 + 60$ |

2. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $4 + 8 + 12 + 16 + 20$ เป็นอนุกรมเลขคณิต มีผลต่างร่วมของอนุกรมเป็น 4
- 2) $11 + 5 + (-1) + 5 + 12$ เป็นอนุกรมเลขคณิต มีผลต่างร่วมของอนุกรมเป็น -6
- 3) $3 + 6 + 9 + 12 + 16$ เป็นอนุกรมเลขคณิต มีผลต่างร่วมของเป็น 3
- 4) $-2 + 2 + 0 + 1 + 3$ เป็นอนุกรมเลขคณิต มีผลต่างร่วมของเป็น -2

จุดประสงค์การเรียนรู้ หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้

3. กำหนด $a_n = 131$, $a_1 = -7$ และ $d = 3$ แล้วผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับข้อใด

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| 1) 2,002 | 2) 2,831 | 3) 2,914 | 4) 3,121 |
|----------|----------|----------|----------|

4. กำหนดอนุกรมเลขคณิต $18 + 15 + 12 + 9 + \dots$ แล้ว $S_{12} + S_{15}$ เท่ากับข้อใด

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 1) -17 | 2) -19 | 3) -21 | 4) -27 |
|--------|--------|--------|--------|

5. กำหนดลำดับเลขคณิต 7, 10, 13, ... แล้ว ผลบวก 6 พจน์แรกของอนุกรมจากลำดับนี้เท่ากับข้อใด

- | | | | |
|-------|-------|--------|--------|
| 1) 56 | 2) 87 | 3) 108 | 4) 117 |
|-------|-------|--------|--------|

จุดประสงค์การเรียนรู้ นำอนุกรมเลขคณิตไปใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

6. ผลบวกของจำนวนคี่ทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 222 ถึง 444 เท่ากับข้อใด

- | | |
|-----------|-----------|
| 1) 35,443 | 2) 36,963 |
| 3) 37,761 | 4) 38,541 |

7. จำนวนพจน์ของอนุกรม $1 + 5 + 9 + 13 + \dots$ โดยเมื่อบวกเรียงกันตั้งแต่พจน์แรกไปแล้วมีค่าเท่ากับ 190 เท่ากับข้อใด

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| 1) 10 | 2) 12 | 3) 14 | 4) 16 |
|-------|-------|-------|-------|

8. อนุกรมเลขคณิตชุดหนึ่งมีผลบวก 3 พจน์แรกเป็น 15 และผลบวก 6 พจน์แรกเป็น 57 แล้วอนุกรมนี้ตรงกับข้อใด

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1) 1, 5, 9, ... | 2) 2, 5, 8, ... |
| 3) 3, 5, 7, ... | 4) 4, 5, 6, ... |

9. โรงเรียนทับปุดวิทยาจัดประชุมผู้ปกครองนักเรียนในหอประชุมโดยจัดเก้าอี้เป็นแถวให้มีแถวแรก 11 ตัว แถวที่สอง 13 ตัว แถวที่สาม 15 ตัว เช่นนี้เรื่อยไป ถ้าในหอประชุมจัดเก้าอี้ไว้ทั้งหมด 20 แถว และต้องเช่าเก้าอี้ตัวละ 5 บาท จงหาว่าโรงเรียนทับปุดวิทยาต้องจ่ายค่าเช่าเก้าอี้ในหอประชุมกี่บาท

- | | |
|--------------|--------------|
| 1) 3,000 บาท | 2) 3,500 บาท |
| 3) 4,000 บาท | 4) 4,500 บาท |

10. สมปรารถนาทำงานศิลปะเรียงลูกปัดสีเป็นแถว ๆ เพื่อตกแต่งรูปสามเหลี่ยม โดยจัดลูกปัดในแถบบนให้น้อยกว่าลูกปัดในแถวล่างที่อยู่ติดกันหนึ่งลูกเสมอ ถ้าแถบบนสุดมีเพียงลูกเดียว ซึ่งอยู่ในตำแหน่งของจุดยอดของสามเหลี่ยมด้วยและเธอใช้ลูกปัดทั้งหมด 190 ลูก มีลูกปัดในแถวล่างสุดของรูปสามเหลี่ยมเป็นเท่าไร

- | | |
|-----------|-----------|
| 1) 17 ลูก | 2) 18 ลูก |
| 3) 19 ลูก | 4) 20 ลูก |

เฉลยแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 เรื่อง “อนุกรมเลขคณิต”

1. ตอบ ข้อ 3)

พิจารณาอนุกรม $3 + 5 + 7 + 11 + 13$ ไม่เป็น อนุกรมเลขคณิต

ได้จากลำดับ 3, 5, 7, 11, 16 ซึ่งไม่เป็นลำดับเลขคณิต

พิจารณาอนุกรม $2 + 4 + 8 + 16 + 32$ ไม่เป็น อนุกรมเลขคณิต

ได้จากลำดับ 2, 4, 8, 16, 32 ซึ่งไม่เป็นลำดับเลขคณิต

พิจารณาอนุกรม $-6 + 0 + 6 + 12 + 18$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

ได้จากลำดับ -6, 0, 6, 12, 18 เป็นลำดับเลขคณิต

พิจารณาอนุกรม $5 + 10 + 15 + 30 + 60$ ไม่เป็น อนุกรมเลขคณิต

ได้จากลำดับ 5, 10, 15, 30, 60 ไม่เป็นลำดับเลขคณิต

2. ตอบ ข้อ 1)

พิจารณาอนุกรม $4 + 8 + 12 + 16 + 20$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

ได้จากลำดับ 4, 8, 12, 16, 20 ซึ่งมีผลต่างร่วมของอนุกรมเป็น 4

พิจารณาอนุกรม $11 + 5 + (-1) + 5 + 12$ ไม่เป็น อนุกรมเลขคณิต

ได้จากลำดับ 11, 5, -1, 5, 12 ซึ่งไม่เป็นลำดับเลขคณิต

พิจารณาอนุกรม $3 + 6 + 9 + 12 + 15$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

ได้จากลำดับ 3, 6, 9, 12, 15 ซึ่งมีผลต่างร่วมเป็น 3

พิจารณาอนุกรม $-2 + 2 + 0 + 1 + 3$ ไม่เป็น อนุกรมเลขคณิต

ได้จากลำดับ -2, 2, 0, 1, 3 ซึ่งไม่เป็นลำดับเลขคณิต

3. ตอบ ข้อ 3)

จากโจทย์กำหนด $a_n = 131$, $a_1 = -7$ และ $d = 3$

ให้ S_n ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้

จาก $a_n = a_1 + (n - 1)d$

จะได้ $131 = (-7) + (n - 1)(3)$

$$131 = -7 + 3n - 3$$

$$3n = 141$$

$$n = 47$$

นี่คือจาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad S_{47} &= \frac{47}{2}(-7 + 131) \\
 &= \frac{47}{2}(124) \\
 &= 2,914
 \end{aligned}$$

ดังนั้น กำหนด $a_n = 131$, $a_1 = -7$ และ $d = 3$ ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมนี้ 2,914

4. ตอบ ข้อ 4)

อนุกรมเลขคณิต $18 + 15 + 12 + 9 + \dots$

จะได้ $a_1 = 18$ และ $d = 15 - 18 = -3$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad S_{12} &= \frac{12}{2}(2(18) + (12 - 1)(-3)) \\
 &= 6(36 - 33) \\
 &= 6(3) = 18
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ} \quad S_{15} &= \frac{15}{2}(2(18) + (15 - 1)(-3)) \\
 &= \frac{15}{2}(36 + (-42)) \\
 &= \frac{15}{2}(-6) = -45
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad S_{12} + S_{15} = 18 + (-45) = -27$$

5. ตอบ ข้อ 2)

จากเลขคณิต $7, 10, 13, \dots$

จะได้อนุกรมเลขคณิต $7 + 10 + 13 + \dots$

จะได้ $a_1 = 7$ และ $d = 10 - 7 = 3$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

$$\begin{aligned}
 S_6 &= \frac{6}{2}(2(7) + (6 - 1)(3)) \\
 &= 3(14 + 5(3)) \\
 &= 3(14 + 15) \\
 &= 3(29) \\
 &= 87
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวก 6 พจน์แรกของอนุกรมจากลำดับนี้ คือ 87

6. ตอบ ข้อ 2)

เนื่องจาก $223 + 225 + 227 + 229 + \dots + 443$ เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่มี

$$a_1 = 223, d = 225 - 223 = 2 \text{ และ } a_n = 443$$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$\text{จะได้ } 443 = 223 + (n - 1)(2)$$

$$443 = 223 + 2n - 2$$

$$443 = 2n + 221$$

$$222 = 2n$$

$$n = 111$$

จากโจทย์แสดงว่าต้องการหาผลบวก 111 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$223 + 225 + 227 + 229 + \dots + 443$$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$\text{จะได้ } S_{111} = \frac{111}{2} (223 + 443)$$

$$= \frac{111}{2} (666)$$

$$= 36,963$$

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนคี่ทั้งหมดที่อยู่ระหว่าง 222 ถึง 444 คือ 36,963

7. ตอบ ข้อ 1)

พิจารณาอนุกรม $1 + 5 + 9 + 13 + \dots$ ได้จากลำดับเลขคณิต $1, 5, 9, 13, \dots$

$$\text{จะได้ } a_1 = 1, d = 5 - 1 = 4 \text{ และ } S_n = 190$$

ให้ n จำนวนพจน์ของอนุกรม $1 + 5 + 9 + 13 + \dots$

$$\text{จาก } S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$$

$$\text{จะได้ } 190 = \frac{n}{2} (2(1) + (n - 1)(4))$$

$$380 = n(2 + 4n - 4)$$

$$380 = n(4n - 2)$$

$$380 = 4n^2 - 2n$$

$$2n^2 - n - 190 = 0$$

$$(2n + 19)(n - 10) = 0$$

นั่นคือ $n = 10$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น จำนวนพจน์ของอนุกรม $1 + 5 + 9 + 13 + \dots$ คือ 10

8. ตอบ ข้อ 2)

ให้ S_3 เป็นผลบวก 3 พจน์แรกของอนุกรมนี้ และ S_6 เป็นผลบวก 6 พจน์แรกของอนุกรมนี้

จาก $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$ จะได้

$$S_3 = \frac{3}{2} (2a_1 + (3 - 1)d)$$

$$15 = 3a_1 + 3d \quad \dots\dots\dots(1)$$

และ $S_6 = \frac{6}{2} (2a_1 + (6 - 1)d)$

$$57 = 6a_1 + 15d \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ 2 คูณ (1) จะได้

$$30 = 6a_1 + 6d \quad \dots\dots\dots(3)$$

(2) - (3) จะได้

$$27 = 9d$$

$$d = 3$$

นั่นคือ แทน $d = 3$ ใน (1) จะได้

$$15 = 3a_1 + 3(3)$$

$$3a_1 = 15 - 9$$

$$a_1 = 2$$

ดังนั้น อนุกรมนี้ คือ 2, 5, 8, 11, ...

9. ตอบ ข้อ 1)

ลำดับของจำนวนเก้าอี้แต่ละแถวในหอประชุมโรงเรียน

คือ ลำดับเลขคณิต 11, 13, 15, ..., a_n

ที่มี $a_1 = 11$, $d = 13 - 11 = 2$ และ $n = 20$

จาก เนื่องจากไม่ทราบพจน์ที่ n สามารถใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$

$$\text{จะได้} \quad S_{20} = \frac{20}{2} (2(11) + (20 - 1)(2))$$

$$= 10(22 + 38)$$

$$= 10(60)$$

$$= 600$$

ดังนั้น โรงเรียนทับปุดวิทยาต้องจ่ายค่าเช่าเก้าอี้ในหอประชุม $600 \times 5 = 3,000$ บาท

10. ตอบ ข้อ 3)

ลำดับของการเรียงลูกปัดสี คือ ลำดับเลขคณิต 1, 2, 3, ..., a_n

ที่มี $a_1 = 1$, $d = 2 - 1 = 1$ และ $S_n = 190$

จาก เนื่องจากไม่ทราบพจน์ที่ n สามารถใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d)$

$$\text{จะได้} \quad S_n = \frac{n}{2} (2(1) + (n - 1)(1))$$

$$190 = \frac{n}{2} (2 + n - 1)$$

$$380 = n(n + 1)$$

$$n^2 + n - 380 = 0$$

$$(n + 20)(n - 19) = 0$$

นั่นคือ $n = 19$ เป็นจำนวนเต็มบวก

จาก $a_n = a_1 + (n - 1)d$ จะได้

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{19} = 1 + (19 - 1)(1)$$

$$= 1 + 18$$

$$= 19$$

ดังนั้น ลูกปัดในแถวล่างสุดของรูปสามเหลี่ยมเป็น 19 ลูก

เกณฑ์การประเมินผลแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|--|---|---|---|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านความรู้ 1. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ | สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 8 - 9 ข้อ | สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 6 - 7 ข้อ | สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 - 5 ข้อ | สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ หรือมีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อที่ 1 และข้อ 2 แต่ไม่ถูกต้อง สมบูรณ์ |
| 2. นำอนุกรมเลขคณิตไปใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ | สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 3 - ข้อ 10 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ | สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 3 - ข้อ 10 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 5 - 6 ข้อ | สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 3 - ข้อ 10 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ | สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 3 - ข้อ 10 ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ หรือมีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ข้อ 3 - ข้อ 10 แต่ไม่ถูกต้อง สมบูรณ์ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|--|---|---|--|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านความรู้ 1. บอกความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้ | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 ข้อ | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ถูกต้องบางส่วน 1 - 2 ข้อ | มีร่องรอยของความพยายามในการทำเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |
| ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1. ให้เหตุผลในการบอกความหมายของของอนุกรมเลขคณิตได้ | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 ข้อ | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 ข้อ | สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ถูกต้องบางส่วน 1 - 2 ข้อ | มีร่องรอยของความพยายามในการทำเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |
| ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน 1. ใช้ความสามารถในการสื่อสารในการนำเสนอความหมายของอนุกรมเลขคณิตได้ | นำเสนอหรือเขียนเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 ข้อ | นำเสนอหรือเขียนเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 ข้อ | นำเสนอหรือเขียนเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” ได้ถูกต้องบางส่วน 1 - 2 ข้อ | มีร่องรอยของความพยายามนำเสนอหรือเขียนเอกสารแนบแนวทางที่ 9 “ความหมายของอนุกรมเลขคณิต” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|---|---|---|---|--|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1. ใช้การแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ | สามารถทำใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 5 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 - 3 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 ข้อ | มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |
| ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน 1. ใช้ความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตได้ | สามารถทำใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 5 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 - 3 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 ข้อ | มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 6 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้”

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1. ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้ | สามารถทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” โดยเชื่อมความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” โดยเชื่อมความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” โดยเชื่อมความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1-2 ข้อ | มีร่องรอยของความสามารถในการใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” โดยเชื่อมความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ที่กำหนดให้ แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |
| 2. ใช้การคิดสร้างสรรค์เพื่อแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้ | สามารถใช้ความคิดสร้างสรรค์ในการทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 ข้อ | สามารถใช้ความคิดสร้างสรรค์ในการทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถใช้ความคิดสร้างสรรค์ในการทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ | มีร่องรอยของความสามารถในการใช้ความคิดสร้างสรรค์ในการทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |
| 3. ใช้การสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในการนำเสนอการแก้ปัญหาจากปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ โดยใช้อนุกรมเลขคณิตได้ | สามารถทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” เขียนเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” เขียนเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” เขียนเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1-2 ข้อ | มีร่องรอยของความสามารถในการทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” เขียนเครื่องหมายทางคณิตศาสตร์ แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |
| ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน 1. ใช้ความสามารถในการคิดเพื่อแก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่ | สามารถทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 ข้อ | สามารถทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1- 2 ข้อ | มีร่องรอยของความสามารถในการทำใบงานที่ 7 “การนำอนุกรมเลขคณิตไปใช้” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ |

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|-------------------------------------|-------------|---|---|---|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| กำหนดให้โดยใช้อุนุกรม เลขคณิตได้ | | | | |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|-----------------------|---|--|--|--|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 1. ซื่อสัตย์สุจริต | ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้ | ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่ และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้เป็นส่วนใหญ่ | ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้ร่วมกัน เป็นบางครั้งและต้องอาศัยการแนะนำหรือตักเตือน | ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 5 โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้ร่วมกัน เป็นบางครั้งและต้องอาศัยการแนะนำหรือตักเตือน |
| 2. มีวินัย | แต่งกายเรียบร้อย | แต่งกายเรียบร้อย โดยส่วนใหญ่ | แต่งกายเรียบร้อย บางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน | แต่งกายเรียบร้อย บางส่วนไม่แก้ไข เมื่อได้รับการตักเตือน |
| 3. ใฝ่เรียนรู้ | การเข้าเรียนตรงเวลา | การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที | การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที | การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที |
| 4. มุ่งมั่นในการทำงาน | ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์ | ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่ | ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นบางส่วน | ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “อนุกรมเลขคณิต” ครบทุกข้อหรือไม่ครบแต่ไม่ถูกต้อง |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพผ่าน

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพไม่ผ่าน

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

| ประเด็นการประเมิน | ระดับคุณภาพ | | | |
|--|---|--|---|--|
| | 4 | 3 | 2 | 1 |
| สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้ | มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง | มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่ | มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ | มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งไม่แก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ |

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

| คุณภาพ(x) | คะแนนเต็ม 5 คะแนน |
|--------------------|-------------------|
| $3.2 < x \leq 4$ | 5 |
| $2.4 < x \leq 3.2$ | 4 |
| $1.6 < x \leq 2.4$ | 3 |
| $0.8 < x \leq 1.6$ | 2 |
| $0 < x \leq 0.8$ | 1 |
| 0 | 0 |

แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

[illegible]

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- ปารณีย์ ภิบาลจอมมี. 2558. “การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหาเรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยร่วมกับแบบกลุ่มร่วมมือ.” ปรินญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาหลักสูตรและการสอน, มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.
- พิชิต ฤทธิ์จรรยา. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : แฮสออฟเคอร์มิสท์.
- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ**. พระนครศรีอยุธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.
- ยุทธคม ภมรสุพรวิจิต. (ม.ป.ป.). **แบบฝึกหัด รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ม.5**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- ศศิเกษม สัทธิธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฏานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-NET คณิตศาสตร์ ม.6**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์**.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**. พิมพ์ครั้งที่ 2 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมนึก ภัททิยานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 5. กทม. : ประสานการพิมพ์.
- อนุวัติ คุณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.