



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน รหัสวิชา ค32102

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ลำดับและอนุกรม

เรื่อง อนุกรม

ภาคเรียนที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เวลา 3 ชั่วโมง

1. มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

ค 1.2 ม.5/2 เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้

2. สาระการเรียนรู้

อนุกรม

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่า อนุกรมจำกัด(finite series)

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 บอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้

4.1.2 หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ให้เหตุผลในการบอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้

4.2.2 ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.2 มีวินัย

4.3.3 ใฝ่เรียนรู้

4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

- 4.4.1 สามารถใช้การสื่อสารในการนำเสนอความหมายของอนุกรมจำกัดได้
- 4.4.2 สามารถใช้การแก้ปัญหาในการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้
- 4.4.3 สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้

5. เนื้อหา/สาระ

อนุกรม

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดเรียกการเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับจำกัดในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่า อนุกรมจำกัด(finite series)

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

เรียก a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของอนุกรม

.
.
.

และ เรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม

ตัวอย่างที่ 1 อนุกรมจำกัด

- 1) $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 3n - 1$ เป็นอนุกรมที่ได้จากลำดับ $2, 5, 8, 11, \dots, 3n - 1$
- 2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ เป็นอนุกรมที่ได้จากลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$
- 3) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n$ เป็นอนุกรมที่ได้จากลำดับ $2, 4, 6, 8, \dots, 2n$

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม นั่นคือ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.
.
.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดลำดับ 3, 5, 7, 9, 11 จงหา S_3 และ S_5

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จาก 3, 5, 7, 9, 11

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= 3 + 5 + 7 \\ &= 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } S_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &= 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \\ &= 35\end{aligned}$$

ดังนั้น S_3 และ S_5 คือ 15 และ 35 ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $S_3 = 22$ และ $S_4 = 28$ จงหา a_4

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม
จะได้

$$\begin{aligned}S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ 22 &= a_1 + a_2 + a_3 \quad \dots\dots\dots(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ 28 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad \dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

นำ (2) – (1) จะได้

$$\begin{aligned}28 - 22 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + a_3) \\ a_4 &= 6\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $S_3 = 22$ และ $S_4 = 28$ แล้ว a_4 เท่ากับ 6

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $S_n = 3n^2 + 1$ จงหา $a_5 + a_6$

วิธีทำ พิจารณาให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \text{ และ } S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$\begin{aligned}\text{จาก } S_n &= 3n^2 + 1 \text{ จะได้} \\ S_4 &= 3(4)^2 + 1 = 49\end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } 49 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{และจาก } S_6 = 3(6)^2 + 1 = 109$$

$$\text{นั่นคือ } 109 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ (2) – (1) จะได้

$$109 - 49 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$\text{ดังนั้น } a_5 + a_6 = 60$$

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ บอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้	- ตรวจเอกสารแนะแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” - การทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 ข้อ 1 - ข้อ 2	- เอกสารแนะแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 - แบบประเมินผลด้านความรู้	- ทำเอกสารแนะแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 - ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 ข้อ 1 - ข้อ 2 ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60
หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้	- ตรวจแบบฝึกหัด 4 “อนุกรม” - ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 ข้อ 3 - ข้อ 5	- แบบฝึกหัด 4 “อนุกรม” - แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 - แบบประเมินผลด้านความรู้	- ทำแบบฝึกหัด 4 “อนุกรม” ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 - ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 ข้อ 3 - ข้อ 5 ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้เหตุผลในการบอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้	- ตรวจเอกสารแนะแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด”	- เอกสารแนะแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนให้เหตุผลในการบอกความหมายของอนุกรมจำกัด อยู่ในระดับดีขึ้น

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ใช้การแก้ปัญหาค้นหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้	- ตรวจใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม”	- ใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาค้นหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้อยู่ในระดับดีขึ้น
ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม	- ตรวจใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม”	- ใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” - แบบประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้ อยู่ในระดับดีขึ้น
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ซื่อสัตย์สุจริต	การทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4	- แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ในระดับดีขึ้น
มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีวินัย อยู่ในระดับดีขึ้น
ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึกการเข้าเรียน - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนใฝ่เรียนรู้ อยู่ในระดับดีขึ้น

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
มุ่งมั่นในการทำงาน	- การส่งแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม”	- แบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมุ่งมั่นในการทำงานอยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน สามารถใช้การสื่อสารในการนำเสนอ การหาผลบวก n พจน์แรกของ อนุกรมได้	ตรวจใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม”	- ใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” - แบบประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนสามารถใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
สามารถใช้การแก้ปัญหาในการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้	ตรวจใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม”	- ใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” - แบบประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนสามารถใช้การแก้ปัญหาในการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึกการทำงานกลุ่ม - แบบประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนสามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป

7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ให้นักเรียนจัดกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน และทบทวนเรื่อง ลำดับ ใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “ลำดับ” ใช้เวลาประมาณ 10 นาที

7.2 ครูพูดเกริ่นนำเกี่ยวกับเนื้อหาเรื่อง “อนุกรม” โดยยกตัวอย่างภาพตัวอย่างคำถามโดยใช้การตอบคำถามโดยการสนทนากลุ่มระหว่างครูใช้เวลาประมาณ 10 นาที

ตัวอย่างภาพ



ที่มาของภาพ : <https://www.amazon.de/-/en/ASVP-Shop-Ferrero-Rocher-Pyramid/dp/B01DKHM5L6>
และ <https://www.pinterest.com/pin/494692340299261753/>

จากภาพการเรียงของช็อกโกแลตเป็นอย่างไร

ตัวอย่างคำตอบ

- สังเกตจำนวนช็อกโกแลตจากชั้นล่างถึงชั้นบนเรียงจากมากไปหาน้อย หรือ ชั้นบนถึงชั้นล่างเรียงจากน้อยไปหามาก
- การเรียงของจำนวนช็อกโกแลตแต่ละชั้นคล้ายการเรียงพจน์ของลำดับ

นักเรียนคิดว่าสามารถนำความรู้ของลำดับมาหาจำนวนของช็อกโกแลตได้อย่างไร

ตัวอย่างคำตอบ

- เขียนจำนวนจำนวนช็อกโกแลตแต่ละชั้นเขียนเป็นลำดับแล้วนำจำนวนแต่ละพจน์มารวมกัน

ขั้นสอน

7.3 ครูแจกเอกสารแนะแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันทำพร้อมให้นักเรียนศึกษาใบความรู้เรื่อง “อนุกรม” ประกอบการทำเอกสารแนะแนวทาง ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติม (ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

7.4 ครูแจกใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันทำพร้อมให้นักเรียนศึกษาใบความรู้เรื่อง “อนุกรม” ประกอบการทำเอกสารแนะแนวทาง ครูคอยสังเกตและให้คำปรึกษาเพิ่มเติม (ใช้เวลาประมาณ 30 นาที)

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นเปรียบเทียบหรือวิเคราะห์

7.5 ครูเฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” และใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 20 นาที)

7.6 ครูยกตัวอย่างอื่น ๆ เพิ่มเติม โดยใช้สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม” (อนุกรม) หน้าที่ 1 – 9 (ครูเลือกตัวอย่างตามความเหมาะสมของเวลา) ให้นักเรียนได้เปรียบเทียบและวิเคราะห์ พร้อมทั้งใช้การสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียนโดยการสุ่มนักเรียนแต่ละกลุ่มตอบคำถาม(ใช้เวลาประมาณ 30 นาที)

ขั้นสรุป

7.7 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันสรุปเรื่อง ความหมายของอนุกรมจำกัดและการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน อาจใช้การสุ่มนักเรียนบางคนเพื่อสรุป(ใช้เวลาประมาณ 10 นาที)

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นนำไปใช้

7.8 ครูมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” และครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” โดยสุ่มนักเรียนออกมาเฉลย โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน ครูอธิบายเพิ่มเติม (ใช้เวลาประมาณ 40 นาที) ถ้าเฉลยไม่ครบให้นักเรียนดูเฉลยในกลุ่ม line ประจำห้องหรือสอบถามครูเพิ่มเติม

7.9 นักเรียนแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 (ใช้เวลาประมาณ 20 นาที)

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- เอกสารแนะแนวทาง ที่ 8 เรื่อง “ความหมายของ อนุกรมจำกัด” - ใบงานที่ 5 เรื่อง “ผลบวก n พจน์แรก ของอนุกรม” - แบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” - ใบความรู้ที่ 4 “อนุกรม”	- สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม”(อนุกรม)	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้				
บอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้				
หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์				
ให้เหตุผลในการบอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้				
ใช้การแก้ปัญหาค้นหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้				
ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และ การนำเสนอการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้				
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์				
ซื่อสัตย์สุจริต				
มีวินัย				
ใฝ่เรียนรู้				
มุ่งมั่นในการทำงาน				

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน สามารถใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาผลบวก n พจน์ แรกของอนุกรมได้				
สามารถใช้การแก้ปัญหาในการหาผลบวก n พจน์แรกของ อนุกรมได้				
สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางวาสนา ลิพนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา



ใบความรู้ที่ 4

“อนุกรม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

- บอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้
- หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้

อนุกรม

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดเรียกการเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับจำกัดในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่า อนุกรมจำกัด(finite series)

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

เรียก a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของอนุกรม

.

..

.

และ เรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม

ตัวอย่างที่ 1 อนุกรมจำกัด

1) $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 3n - 1$ เป็นอนุกรมที่ได้จากลำดับ $2, 5, 8, 11, \dots, 3n - 1$

2) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ เป็นอนุกรมที่ได้จากลำดับ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

3) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n$ เป็นอนุกรมที่ได้จากลำดับ $2, 4, 6, 8, \dots, 2n$

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม นั่นคือ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.

.

.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดลำดับ 3, 5, 7, 9, 11 จงหา S_3 และ S_5

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จาก 3, 5, 7, 9, 11

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &= 3 + 5 + 7 \\ &= 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } S_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &= 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \\ &= 35\end{aligned}$$

ดังนั้น S_3 และ S_5 คือ 15 และ 35 ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $S_3 = 22$ และ $S_4 = 28$ จงหา a_4

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

จะได้

$$\begin{aligned}S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ 22 &= a_1 + a_2 + a_3 \quad \dots\dots\dots(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ 28 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad \dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

นำ (2) - (1) จะได้

$$\begin{aligned}28 - 22 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_1 + a_2 + a_3) \\ a_4 &= 6\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $S_3 = 22$ และ $S_4 = 28$ แล้ว a_4 เท่ากับ 6

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $S_n = 3n^2 + 1$ จงหา $a_5 + a_6$

วิธีทำ พิจารณาให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \text{ และ } S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$\begin{aligned}\text{จาก } S_n &= 3n^2 + 1 \text{ จะได้} \\ S_4 &= 3(4)^2 + 1 = 49\end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } 49 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{และจาก } S_6 = 3(6)^2 + 1 = 109$$

$$\text{นั่นคือ } 109 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ (2) - (1) จะได้

$$109 - 49 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$\text{ดังนั้น } a_5 + a_6 = 60$$



เอกสารแนบแนวทางที่ 8
“ความหมายของอนุกรมจำกัด”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

บอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ให้เหตุผลในการบอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้

คำชี้แจง

ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1) กำหนดลำดับ 1, 3, 5, 7, 9 สามารถเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ลำดับ 1, 3, 5, 7, 9

ในรูป $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

2) กำหนดลำดับ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$

สามารถเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ลำดับ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$

ในรูป $\dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \frac{1}{27} + \dots\dots\dots + \frac{1}{243}$

3) กำหนดลำดับ 2, 4, 6, 8, ... , $2n$

สามารถเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ลำดับ 2, 4, 6, 8, ... , $2n$

ในรูป $\dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$

กำหนดลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด

สามารถเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ในรูป $\dots\dots\dots$ และเรียกว่า.....

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม นั่นคือ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + \dots\dots\dots + a_3$$

$$S_4 = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

.

.

.

$$S_n = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

เฉลยเอกสารแนะแนวทางที่ 8 “ความหมายของอนุกรมจำกัด”

1) กำหนดลำดับ 1, 3, 5, 7, 9

สามารถเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ลำดับ 1, 3, 5, 7, 9

ในรูป $1 + 3 + 5 + 7 + 9$

2) กำหนดลำดับ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$

สามารถเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ลำดับ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$

ในรูป $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$

3) กำหนดลำดับ 2, 4, 6, 8, ... , $2n$

สามารถเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ลำดับ 2, 4, 6, 8, ... , $2n$

ในรูป $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n$

กำหนดลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด

สามารถเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ และเรียกว่า **อนุกรมจำกัด**

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม นั่นคือ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

.

.

.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$



ใบงานที่ 5

“ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- ใช้การแก้ปัญหาคำถามหาลบวง n พจน์แรกของอนุกรมได้
- ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอการหาลบวง n พจน์แรกของอนุกรม

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

- สามารถในการสื่อสารในการนำเสนอการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้
- สามารถใช้การแก้ปัญหาในการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้

คำชี้แจง

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้แล้วแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้ถูกต้อง
2. ให้ตัวแทนกลุ่มออกนำเสนอการแสดงวิธีแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้และสมาชิกในกลุ่มที่เหลือร่วมแสดงความคิดเห็นเพิ่มเติม

1) กำหนดลำดับ 4, 8, 12, 16, ... จงหา $S_4 + S_7$

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school handwriting practice paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

2) กำหนดลำดับ $a_n = n^2 - 2$ จงหา S_2 และ S_5

[illegible]

3) กำหนดให้ $S_n = 12 - n^2$ จงหา $a_5 + a_6 + a_7$

[illegible]

4) ถ้าผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมหนึ่ง คือ $S_n = 3n^2 + 2$ พจน์ที่ 9 ของอนุกรมนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

[illegible]

เฉลยใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม”

- 1) ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จาก 4, 8, 12, 16, ...

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= 4 + 8 + 12 + 16 \\ &= 40\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{และ } S_7 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\ &= 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 \\ &= 144\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } S_4 + S_7 = 40 + 144 = 184$$

- 2) จากลำดับ $a_n = n^2 - 2$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } a_1 &= 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \\ a_2 &= 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \\ a_3 &= 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7 \\ a_4 &= 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14 \\ a_5 &= 5^2 - 2 = 25 - 2 = 23\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } S_2 = a_1 + a_2 = -1 + 2 = 1 \text{ และ}$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = -1 + 2 + 7 + 14 + 23 = 45$$

- 3) พิจารณาให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \text{ และ } S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

$$\text{จาก } S_n = 12 - n^2 \text{ จะได้}$$

$$S_4 = 12 - 4^2 = 12 - 16 = -4$$

$$\text{นั่นคือ } -4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{และจาก } S_7 = 12 - 7^2 = 12 - 49 = -37$$

$$\text{นั่นคือ } -37 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ (2) - (1) จะได้

$$-37 - (-4) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

$$\text{ดังนั้น } a_5 + a_6 + a_7 = -33$$

4) โจทย์กำหนด n พจน์แรกของอนุกรมหนึ่ง คือ $S_n = 3n^2 + 2$

จะได้ $S_8 = 3(8^2) + 2 = 3(64) + 2 = 192 + 2 = 194$

และ $S_9 = 3(9^2) + 2 = 3(81) + 2 = 243 + 2 = 245$

$$S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_8 \text{ และ } S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9$$

จาก $S_n = 3n^2 + 2$ จะได้

$$S_8 = 3(8^2) + 2 = 3(64) + 2 = 192 + 2 = 194$$

นั่นคือ $194 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_8$ (1)

และจาก $S_7 = 12 - 7^2 = 12 - 49 = -37$

นั่นคือ $S_9 = 3(9^2) + 2 = 3(81) + 2 = 243 + 2 = 245$ (2)

นำ (2) - (1) จะได้

$$245 - 194 = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_8)$$

$$51 = a_9$$

ดังนั้น พจน์ที่ 9 ของอนุกรมนี้มีค่าเท่ากับ 51



แบบฝึกหัดที่ 4
“อนุกรม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้

1. กำหนดลำดับ 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 จงหา S_4 และ S_6
2. จงหา $S_4 + S_7$ เมื่อกำหนดลำดับ -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18
3. ผลบวกสามพจน์แรกของลำดับ $a_n = 1 + n + n^2$
4. ผลบวกสี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$
5. กำหนดให้ $S_{56} = 430$ และ $S_{57} = 418$ แล้วพจน์ที่ 57 ของอนุกรมนี้เท่ากับเท่าใด
6. กำหนดให้ $S_{90} = 105$ และ $S_{93} = 120$ จงหา $a_{91} + a_{92} + a_{93}$ ของอนุกรมนี้
7. กำหนดให้ $S_n = 3n^2 + n$ จงหา
 - 1) a_3
 - 2) $a_4 + a_5$
 - 3) $a_7 + a_8 + a_9$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม”

1. ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จาก 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20
 จะได้ $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$$= 2 + 5 + 8 + 11$$

$$= 26$$

 และ $S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$$= 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17$$

$$= 57$$

 ดังนั้น S_4 และ S_6 คือ 26 และ 57 ตามลำดับ

2. ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จาก -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18
 จะได้ $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$$= -3 + 0 + 3 + 6$$

$$= 6$$

 และ $S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

$$= -3 + 0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 15$$

$$= 42$$

 นั่นคือ $S_4 + S_7 = 6 + 42 = 48$
 ดังนั้น $S_4 + S_7$ เมื่อกำหนดลำดับ -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18 คือ 48

3. ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับ $a_n = 1 + n + n^2$
 จะได้ $a_1 = 1 + 1 + 1^2 = 3$
 $a_2 = 1 + 2 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$
 $a_3 = 1 + 3 + 3^2 = 1 + 3 + 9 = 13$
 นั่นคือ $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$$= 3 + 7 + 13$$

$$= 23$$

 ดังนั้น ผลบวกสามพจน์แรกของลำดับ $a_n = 1 + n + n^2$ คือ 23

4. ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมที่ได้จากลำดับ $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

จะได้ $a_1 = (-1)^1 \frac{1}{1+1} = (-1) \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$a_2 = (-1)^2 \frac{2}{2+1} = (1) \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = (-1)^3 \frac{3}{3+1} = (-1) \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$a_4 = (-1)^4 \frac{4}{4+1} = (1) \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

นั่นคือ $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{4}{5} = \frac{13}{60}$$

ดังนั้น ผลบวกสี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ คือ $\frac{13}{60}$

5. ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

จะได้

$$S_{56} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{56}$$

$$430 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{56} \quad \dots\dots\dots(1)$$

และ $S_{57} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{57}$

$$418 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{57} \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ (2) - (1) จะได้

$$418 - 430 = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{57}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{56})$$

$$a_{57} = -12$$

ดังนั้น กำหนดให้ $S_{56} = 430$ และ $S_{57} = 418$ แล้วพจน์ที่ 57 ของอนุกรมนี้เท่ากับ -12

6. ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

จะได้

$$S_{90} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{90}$$

$$105 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{90} \quad \dots\dots\dots(1)$$

และ $S_{93} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{93}$

$$120 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{93} \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ (2) - (1) จะได้

$$120 - 105 = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{93}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{90})$$

$$15 = a_{91} + a_{92} + a_{93}$$

ดังนั้น $a_{91} + a_{92} + a_{93}$ ของอนุกรมนี้คือ 15

7. 1) พิจารณาให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$S_2 = a_1 + a_2 \text{ และ } S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

จาก $S_n = 3n^2 + n$ จะได้

$$S_2 = 3(2)^2 + 2 = 14$$

นั่นคือ $14 = a_1 + a_2$ (1)

และจาก $S_3 = 3(3)^2 + 3 = 30$

นั่นคือ $30 = a_1 + a_2 + a_3$ (2)

นำ (2) - (1) จะได้

$$30 - 14 = (a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2)$$

ดังนั้น $a_3 = 16$

- 2) พิจารณาให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \text{ และ } S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

จาก $S_n = 3n^2 + n$ จะได้

$$S_3 = 3(3)^2 + 3 = 30$$

นั่นคือ $30 = a_1 + a_2 + a_3$ (1)

และจาก $S_5 = 3(5)^2 + 5 = 80$

นั่นคือ $80 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ (2)

นำ (2) - (1) จะได้

$$80 - 30 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3)$$

ดังนั้น $a_4 + a_5 = 50$

- 3) พิจารณาให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6 \text{ และ } S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9$$

จาก $S_n = 3n^2 + n$ จะได้

$$S_6 = 3(6)^2 + 6 = 114$$

นั่นคือ $114 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6$ (1)

และจาก $S_9 = 3(9)^2 + 9 = 252$

นั่นคือ $252 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9$ (2)

นำ (2) - (1) จะได้

$$252 - 114 = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6)$$

ดังนั้น $a_7 + a_8 + a_9 = 138$

สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม”(อนุกรม) หน้า ที่ 1 – 8

อนุกรม

จะหาจำนวนความภาพได้อย่างไร ?



back Next

อนุกรม



ลำดับ

back Next

อนุกรม

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดเรียกการเขียนแสดงการบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับจำกัดในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่า **อนุกรมจำกัด(finite series)**

a_1 → พจน์ที่ 1 ของอนุกรม
 a_2 → พจน์ที่ 2 ของอนุกรม
 a_3 → พจน์ที่ 3 ของอนุกรม
 \vdots
 a_n → พจน์ที่ n ของอนุกรม

back Next

อนุกรม

ตัวอย่างที่ 1 อนุกรมจำกัด

$1 + 2 + 3 + \dots + 101$ เป็นอนุกรมได้จากลำดับ 1, 2, 3, ..., 101
 $2 + 6 + 8 + \dots + (2n + 2)$ เป็นอนุกรมได้จากลำดับ 2, 6, 8, ..., $(2n + 2)$
 $4 + 9 + 14 + 19 + 24 + 29$ เป็นอนุกรมได้จากลำดับ 4, 9, 14, 19, 24, 29
 $3 + 9 + 27 + \dots + 3^n$ เป็นอนุกรมได้จากลำดับ 3, 9, 27, ..., 3^n

back Next

อนุกรม

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม นั่นคือ

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

back Next

อนุกรม

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดลำดับ 3, 6, 9, 12, 15, 18 จงหา S_4 และ S_5

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม 3, 6, 9, 12, 15, 18

จะได้ $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
 $= 3 + 6 + 9 + 12$
 $= 30$

และ $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
 $= 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18$
 $= 63$

ดังนั้น S_4 และ S_5 ของลำดับ 3, 6, 9, 12, 15, 18 คือ 30 และ 63 ตามลำดับ

back Next

อนุกรม

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดลำดับ 2, 4, 8, 16, 32, 64 จงหา $S_5 - S_3$

วิธีทำ ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม 2, 4, 8, 16, 32, 64

จะได้ $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
 $= 2 + 4 + 8$
 $= 14$

และ $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
 $= 2 + 4 + 8 + 16 + 32$
 $= 62$

ดังนั้น $S_5 - S_3$ ของลำดับ 2, 4, 8, 16, 32, 64 คือ $62 - 14 = 48$

back Next

อนุกรม

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $S_n = 2n + 1$ จงหา $a_4 + a_5$

วิธีทำ พิจารณาให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \text{ และ } S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

จาก $S_n = 2n + 1$ จะได้

$$S_5 = 2(5) + 1 = 11$$

นั่นคือ $11 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \dots (1)$

$$S_3 = 2(3) + 1 = 7$$

นั่นคือ $7 = a_1 + a_2 + a_3 \dots (2)$

back Next

สื่อโปรแกรม Power Point เรื่อง “อนุกรม”(อนุกรม) หน้าที่ 9

อนุกรม

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $S_n = 2n + 1$ จงหา $a_4 + a_5$

วิธีทำ นำ $(1) - (2)$ จะได้

$$11 - 7 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3)$$

$$a_4 + a_5 = 4$$

ดังนั้น $a_4 + a_5$ เท่ากับ 4

back

Next

ย





แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 เรื่อง “อนุกรม”
 รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน รหัสวิชา ค32102 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
 เวลา 20 นาที คะแนนเต็ม 10 คะแนน

คำชี้แจง

- 1) ข้อสอบฉบับนี้เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ ใช้เวลาทำข้อสอบ 30 นาที
- 2) ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวแล้วทำเครื่องหมาย (X) ลงในกระดาษคำตอบ

มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

ค 1.2 ม.5/2 เข้าใจและนำความรู้เกี่ยวกับลำดับและอนุกรมไปใช้

จุดประสงค์การเรียนรู้ บอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้

1. กำหนดลำดับ 3, 7, 12, 18, 25, 33, 42, 52 ข้อใดถูกต้อง

- 1) $S_4 = 3 + 7 + 12 + 25$
- 2) $S_5 = 7 + 12 + 18 + 25 + 33$
- 3) $S_6 = 3 + 12 + 18 + 25 + 33 + 42$
- 4) $S_7 = 3 + 7 + 12 + 18 + 28 + 33 + 42$

2. กำหนดอนุกรม $-12 + (-8) + (-4) + 0 + 4 + 8 + 12 + 16$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

- 1) เป็นอนุกรมจากลำดับ $-12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16$
- 2) ผลรวมพจน์ที่ 2 กับพจน์ที่ 6 ของอนุกรมนี้เท่ากับพจน์ที่ 3
- 3) สองเท่าของพจน์ที่ 5 ของอนุกรมนี้เท่ากับพจน์ที่ 6
- 4) อนุกรมนี้เขียนแทนด้วย S_8 เมื่อกำหนด S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

จุดประสงค์การเรียนรู้ หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้

3. กำหนดลำดับ $a_n = 2^n - 2$ แล้ว $S_5 + S_6$ เท่ากับข้อใด

- 1) 166 2) 178 3) 188 4) 196

4. กำหนดให้ $S_n = 3n - 1$ แล้ว $a_4 + a_5 + a_6$ เท่ากับข้อใด

- 1) 8 2) 9 3) 10 4) 11

5. กำหนดให้ $S_3 = 15$ และ $S_5 = 40$ แล้ว $a_4 + a_5$ เท่ากับข้อใด

- 1) 15 2) 20 3) 25 4) 35

เฉลยแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 เรื่อง “อนุกรม”

1. ตอบ ข้อ 4)

กำหนดลำดับ 3, 7, 12, 18, 25, 33, 42, 52

จะได้ $S_4 = 3 + 7 + 12 + 18$

$$S_5 = 3 + 7 + 12 + 18 + 25$$

$$S_6 = 3 + 7 + 12 + 18 + 25 + 33$$

และ $S_7 = 3 + 7 + 12 + 18 + 25 + 33 + 42$

2. ตอบ ข้อ 2)

1) พิจารณาอนุกรม $-12 + (-8) + (-4) + 0 + 4 + 8 + 12 + 16$

ได้จากลำดับ 12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16

2) พจน์ที่ 2, พจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 6 ของอนุกรมนี้ คือ -8, -4 และ 8 ตามลำดับ

จะได้ผลรวมพจน์ที่ 2 กับพจน์ที่ 6 ของอนุกรมนี้เท่ากับ $-8 + 8 = 0$ ซึ่งไม่เท่ากับพจน์ที่ 3

3) พจน์ที่ 5 และพจน์ที่ 6 ของอนุกรมนี้คือ 4 และ 6 ตามลำดับ

จะได้สองเท่าของพจน์ที่ 5 ของอนุกรมนี้เท่ากับ $2(4) = 8$ ซึ่งเท่ากับพจน์ที่ 6

4) อนุกรมอนุกรม $-12 + (-8) + (-4) + 0 + 4 + 8 + 12 + 16$ มี 8 พจน์

จะได้ n คือ 8 สามารถเขียนแทนด้วย S_8

3. ตอบข้อ 1)

จากกำหนดลำดับ $a_n = 2^n - 2$ จะได้

$$a_1 = 2^1 - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$a_2 = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$a_3 = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$$

$$a_4 = 2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$a_5 = 2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$$

และ $a_6 = 2^6 - 2 = 64 - 2 = 62$

พิจารณาให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 + 2 + 6 + 14 + 30 = 52$$

และ $S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0 + 2 + 6 + 14 + 30 + 62 = 114$

ดังนั้น $S_5 + S_6 = 52 + 114 = 166$

4. ตอบ ข้อ 2)

พิจารณาให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \text{ และ } S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

จาก $S_n = 3n - 1$ จะได้

$$S_3 = 3(3) - 1 = 9 - 1 = 8$$

นั่นคือ $8 = a_1 + a_2 + a_3$ (1)

และจาก $S_6 = 3(6) - 1 = 18 - 1 = 17$

นั่นคือ $17 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ (2)

นำ (2) - (1) จะได้

$$17 - 8 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - (a_1 + a_2 + a_3)$$

ดังนั้น $a_4 + a_5 + a_6 = 9$

5. ตอบ ข้อ 3)

ให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม
จะได้

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$15 = a_1 + a_2 + a_3$$
(1)

และ $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$40 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$
(2)

นำ (2) - (1) จะได้

$$40 - 15 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3)$$

$$a_4 + a_5 = 25$$

ดังนั้น ถ้ากำหนดให้ $S_3 = 15$ และ $S_5 = 40$ แล้ว $a_4 + a_5$ เท่ากับ 25

เกณฑ์การประเมินผลแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม”

ประเด็นการประเมิน	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
ด้านความรู้ 1. หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 - 7 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 5 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 - 3 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 - 3 ข้อ ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 1 ข้อหรือมีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลเอกสารแนบแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด”

ประเด็นการประเมิน	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
ด้านความรู้ 1. บอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้	สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 ข้อ	สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ	สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำเอกสารแนบแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1. ให้เหตุผลในการบอกความหมายของอนุกรมจำกัดได้	สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 ข้อ	สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ	สามารถทำเอกสารแนบแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำเอกสารแนบแนวทางที่ 8 เรื่อง “ความหมายของอนุกรมจำกัด” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม”

ประเด็นการประเมิน	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1. ใช้การแก้ปัญหาการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้	สามารถทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 4 ข้อ	สามารถทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 - 3 ข้อ	สามารถทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” แต่ไม่ถูกต้อง สมบูรณ์
2. ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม	สามารถทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ใช้เครื่องหมายทางคณิตได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 4 ข้อ	สามารถทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ใช้เครื่องหมายทางคณิตได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 - 3 ข้อ	สามารถทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ใช้เครื่องหมายทางคณิตได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ใช้เครื่องหมายทางคณิตแต่ไม่ถูกต้อง สมบูรณ์
ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน 1. สามารถใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้	นำเสนอหรือเขียนใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 4 ข้อ	นำเสนอหรือเขียนใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 - 3 ข้อ	นำเสนอหรือเขียนใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการนำเสนอหรือเขียนใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ข้อแต่ไม่ถูกต้อง สมบูรณ์
2. สามารถใช้การแก้ปัญหาในการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมได้	สามารถทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 4 ข้อ	สามารถทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 - 3 ข้อ	สามารถทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงานที่ 5 “ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม” แต่ไม่ถูกต้อง สมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

ประเด็นการประเมิน	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1. ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้	ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่ และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้เป็นส่วนใหญ่	ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้ร่วมกัน เป็นบางครั้งและต้องอาศัยการแนะนำหรือตักเตือน	ทำแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียนครั้งที่ 4 โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้ร่วมกัน เป็นบางครั้งและต้องอาศัยการแนะนำหรือตักเตือน
2. มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อย โดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อย บางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน	แต่งกายเรียบร้อย บางส่วนไม่แก้ไข เมื่อได้รับการตักเตือน
3. ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรงเวลา	การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที
4. มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “อนุกรม” ครบทุกข้อหรือไม่ครบแต่ไม่ถูกต้อง

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพผ่าน

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพไม่ผ่าน

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

ประเด็นการประเมิน	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
สามารถใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียนได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งไม่แก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

แบบประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

[illegible]

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- ปารณีย์ ภิบาลจอมมี. 2558. “การพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหาเรื่อง อัตราส่วนและร้อยละ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบอุปนัยร่วมกับแบบกลุ่มร่วมมือ.” ปรินญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาหลักสูตรและการสอน, มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม.
- พิชิต ฤทธิ์จรรยา. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : เอ็ดสออฟเคอร์มิสท์.
- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ**. พระนครศรีอยุธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.
- ยุทธคม ภมรสุพรวิจิต. (ม.ป.ป.). **แบบฝึกหัด รายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ม.5**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- ศศิเกษม สัทธิธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฏานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-NET คณิตศาสตร์ ม.6**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์**.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**. พิมพ์ครั้งที่ 2 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมนึก ภัททิยานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 5. กทม. : ประสานการพิมพ์.
- อนุวัติ คุณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.