



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ภาคเรียนที่ 1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เวลา 2 ชั่วโมง

1. ผลการเรียนรู้

เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

อัตราส่วนตรีโกณมิติ(Trigonometric ratio) คือ อัตราส่วนของความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

4.2.2 ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

- 4.3.1 ชื่อสัตย์สุจริต
- 4.3.2 มีวินัย
- 4.3.3 ใฝ่เรียนรู้
- 4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

- 4.4.1 ใช้การสื่อสารเพื่อนำเสนอการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาโจทย์และสถานการณ์ที่กำหนดได้
- 4.4.2 ใช้การแก้ปัญหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาโจทย์และสถานการณ์ที่กำหนดได้
- 4.4.3 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับนักเรียนคนอื่นในชั้นเรียนได้
- 4.4.4 ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้

5. เนื้อหา/สาระ

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

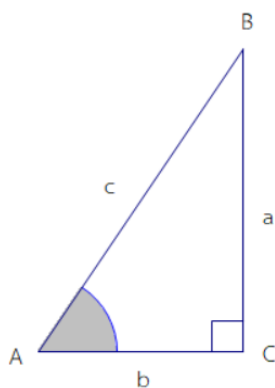
วิชาที่ว่าด้วยการศึกษาความสัมพันธ์เกี่ยวกับส่วนประกอบต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม ทั้งความยาวด้านและขนาดของมุม เช่น ที่พีทาโกรัสได้ศึกษานี้ เรียกว่า ตรีโกณมิติ โดยศัพท์มูลวิทยาแล้ว ตรีโกณมิติ หรือ trigonometry มาจากการรวมของคำสามคำ คือ ตรี หรือ tri ซึ่งแปลว่า สาม โณน หรือ gon ซึ่งแปลว่า มุมหรือเหลี่ยม และมิติ หรือ metric ซึ่งแปลว่า การวัด ซึ่งรวมความทั้งสามคำได้ว่า การวัดรูปสามเหลี่ยม หรือวิชาที่ว่าด้วยการวัดรูปสามเหลี่ยมนั่นเอง

ตรีโกณมิติ (trigonometry)

ตรี หรือ tri	แปลว่า สาม
โนน หรือ gon	แปลว่า มุมหรือเหลี่ยม
มิติ หรือ metric	แปลว่า การวัด

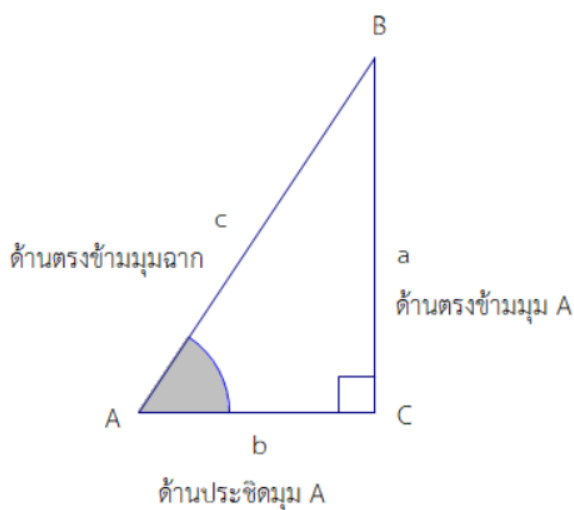
การวัดรูปสามเหลี่ยม หรือวิชาที่ว่าด้วยการวัดรูปสามเหลี่ยม

อัตราส่วนตรีโกณมิติ(Trigonometric ratio) คือ อัตราส่วนส่วนของความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก



จากรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก และ มุม A เป็นมุมหลัก โดยอัตราส่วนของความยาวของด้าน ทั้งสามมีชื่อเรียกดังนี้

$\frac{a}{c}$	เรียก ไซน์(sine) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\sin A$
$\frac{b}{c}$	เรียก โคไซน์(cosine) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\cos A$
$\frac{a}{b}$	เรียก แทนเจนต์(tangent) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\tan A$
$\frac{c}{a}$	เรียก โคซีแคนต์(cosecant) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\operatorname{cosec} A$
$\frac{c}{b}$	เรียก ซีแคนต์(secant) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\sec A$
$\frac{b}{a}$	เรียก โคแทนเจนต์(cotangent) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\cot A$



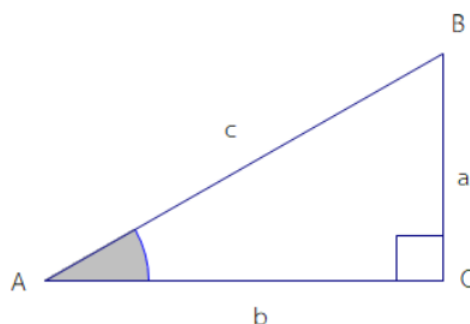
สามารถสรุปนิยามของไซน์, โคไซน์, แทนเจนต์, โคซีแคนต์, ซีแคนต์ และโคแทนเจนต์ เฉพาะกรณีที่ A เป็นมุมแหลมได้ดังนี้

ไซน์ของมุม A	คือ	$\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
โคไซน์ของมุม A	คือ	$\frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
แทนเจนต์ของมุม A	คือ	$\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}$
โคซีแคนต์ของมุม A	คือ	$\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}$
ซีแคนต์ของมุม A	คือ	$\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}$
โคแทนเจนต์ของมุม A	คือ	$\frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}$

จากบทนิยาม อัตราส่วนตรีโกณมิติเป็นส่วนกลับของกันและกัน ได้แก่

$$\begin{array}{ll} \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} & \text{และ} \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \\ \cos A = \frac{1}{\sec A} & \text{และ} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} \\ \tan A = \frac{1}{\cot A} & \text{และ} \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} \end{array}$$

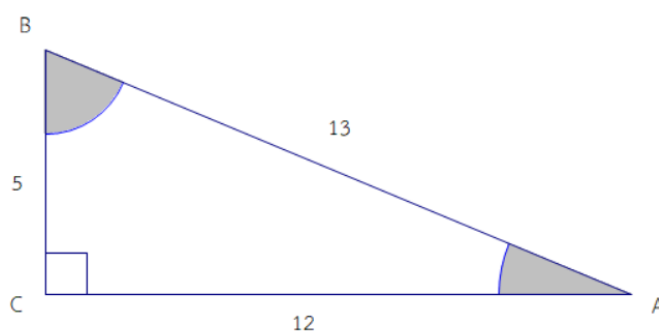
ตัวอย่างที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีความยาวด้านต่าง ๆ ดังรูป จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A ทุกอัตราส่วน



วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{a}{c} & \operatorname{cosec} A &= \frac{c}{a} \\ \cos A &= \frac{b}{c} & \sec A &= \frac{c}{b} \\ \tan A &= \frac{a}{b} & \cot A &= \frac{b}{a}\end{aligned} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปที่กำหนดให้



จงหา $\sin A$, $\cos A$, $\cot A$, $\operatorname{cosec} B$, $\tan B$ และ $\sec B$

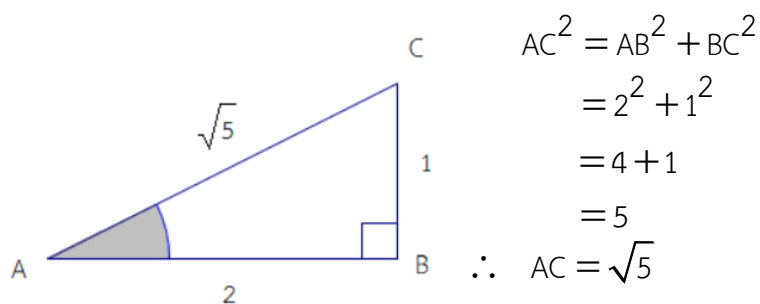
วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{5}{13} & \cos A &= \frac{12}{13} & \cot A &= \frac{12}{5} \\ \operatorname{cosec} B &= \frac{13}{12} & \tan B &= \frac{12}{5} & \sec B &= \frac{13}{5}\end{aligned} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง \hat{B} เป็นมุมฉาก และ $\tan A = \frac{1}{2}$

จงหา $\tan C$, $\sec C$, $\operatorname{cosec} C$, $\sin A$, $\cot A$ และ $\sec A$

วิธีทำ จาก กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง \hat{B} เป็นมุมฉาก จะได้ว่า



$$\begin{aligned}AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 2^2 + 1^2 \\ &= 4 + 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\therefore AC = \sqrt{5}$$

$$\tan C = 2 \quad \sec C = \sqrt{5} \quad \operatorname{cosec} C = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

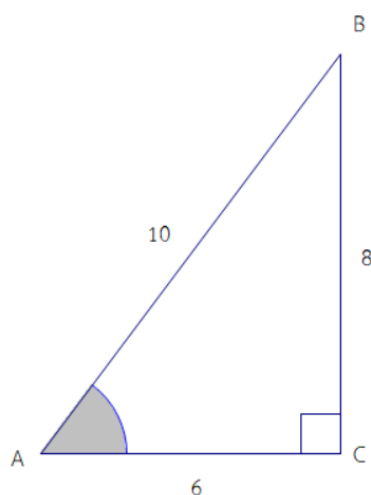
$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cot A = 2 \quad \sec A = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 4 ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง \hat{C} เป็นมุมฉาก และ $10\sin A = 8$
จงหาค่าของ

1. $\cos A + \sin B$
2. $\tan B + \cot A$
3. $\operatorname{cosec} A - \sec B$

วิธีทำ จาก $10\sin A = 8$ จะได้ว่า $\sin A = \frac{8}{10}$

และ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง \hat{C} เป็นมุมฉาก จะได้ว่า



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

$$= 10^2 - 8^2$$

$$= 100 - 64$$

$$= 36$$

เนื่องจาก AC เป็นความยาวด้านของ

รูปสามเหลี่ยม ABC

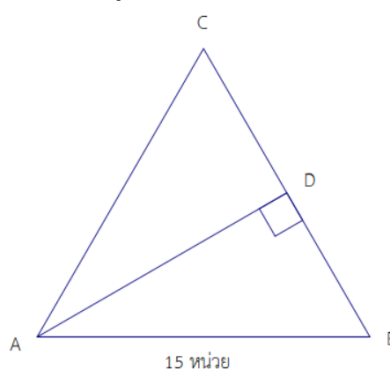
$$\therefore AC = \sqrt{36} = 6$$

$$1. \quad \cos A + \sin B = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \quad \square$$

$$2. \quad \tan B + \cot A = \frac{6}{8} + \frac{6}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \square$$

$$3. \quad \operatorname{cosec} A - \sec B = \frac{10}{8} - \frac{10}{8} = 0 \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC มีด้าน AD เป็นส่วนสูง และ AB ยาว 15 หน่วย ดังรูป จงหาความยาวของ AD

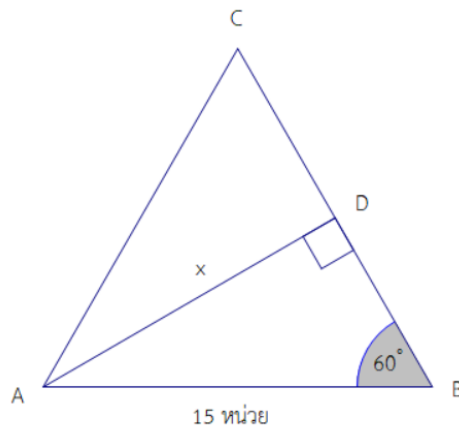


วิธีทำ

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC และ AB ยาว 15 หน่วย

จากสมบัติรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะได้ $\angle ABC = 60^\circ$

ให้ x แทนความยาวของ AD จะได้



จากรูปสามเหลี่ยม ABD จะได้

$$\sin \angle ABC = \frac{AD}{AB}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{15}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{15}$$

$$x = 15 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น ความยาวของ AD เท่ากับ $15 \frac{\sqrt{3}}{2}$ หน่วย

□

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 1 - ข้อ 2	- แบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” - แบบประเมินด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้อยู่ระดับดีขึ้นไป
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหา โจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8	- แบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8 - แบบประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหา โจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหา โจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8	- แบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8 - แบบประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหา โจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ซื่อสัตย์สุจริต	ตรวจการทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”	- แบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีวินัย อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึกการเข้าเรียน - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนใฝ่เรียนรู้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
มุ่งมั่นในการทำงาน	- การส่งแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”	- แบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” - แบบประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมุ่งมั่นในการทำงานอยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารเพื่อนำเสนอการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และสถานการณ์ที่กำหนดได้	ตรวจใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”	- ใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” - แบบประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	ใช้การสื่อสารเพื่อนำเสนอการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และสถานการณ์ที่กำหนดได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และสถานการณ์ที่กำหนดได้	ตรวจใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”	- ใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” - แบบประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
			หรือสถานการณ์ที่กำหนดได้อยู่ในระดับดีขึ้น
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึกการทำงานกลุ่ม - แบบประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้อยู่ในระดับดีขึ้น
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้	ตรวจการใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”	- แบบบันทึกการใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” - แบบประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้เทคโนโลยีเพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้อยู่ในระดับดีขึ้น

7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ครูแจ้งผลการทดสอบก่อนเรียนเรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ให้นักเรียนทราบ และสิ่งที่ควรได้รับการพัฒนาจากการทำแบบทดสอบก่อนเรียน

7.2 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน ครูพูดเกริ่นนำเกี่ยวกับความหมายเรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” กับนักเรียน

ขั้นสอนและอธิบายทฤษฎี

7.3 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาใบความรู้ “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”

7.4 สุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มอธิบายความหมาย “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ตัวอย่างแต่ละตัวอย่างในใบความรู้ “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”

7.5 ครูอธิบายความหมาย “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” และตัวอย่างในใบความรู้ “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” (หน้า 1 – 7) โดยการสุ่มนักเรียนในชั้นเรียนและสนทนากลุ่มต่อนักเรียน นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.6 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ในชั่วโมงที่ 1 ครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

7.7 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” โดยครูสนทนากลุ่มต่อนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม

7.8 ครูเฉลยใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” เพิ่มเติม ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” (หน้า 8 – 10)

ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.9 จากการทำใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” และศึกษาใบความรู้ “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” นักเรียนสามารถบอกความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติและหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างไร

7.10 ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” โดยการสนทนาและใช้คำถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน อาจใช้การสุ่มนักเรียนบางคนเพื่อสรุป

ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.12 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” เป็นการบ้าน

7.13 ครูมอบหมายให้นักเรียนทบทวนบทเรียนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” เพื่อเป็นการทบทวนและศึกษาความรู้เพิ่มเติมด้วยตัวเอง

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- ใบความรู้ “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ” - ใบงาน “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ” - แบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ”	สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้ 1) หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้าน ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่ กำหนดให้ได้				
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาโจทย์ หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้				
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต				
2) มีวินัย				
3) ใฝ่เรียนรู้				
4) มุ่งมั่นในการทำงาน				

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารเพื่อนำเสนอการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาค้นหาและสถานการณ์ที่กำหนดได้				
2) ใช้การแก้ปัญหาค้นหาการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาค้นหาและสถานการณ์ที่กำหนดได้				
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา



ใบความรู้ “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ได้

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

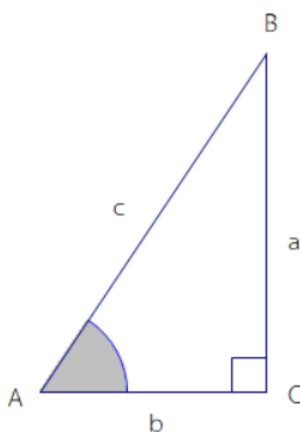
วิชาที่ว่าด้วยการศึกษาความสัมพันธ์เกี่ยวกับส่วนประกอบต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม ทั้งความยาวด้านและขนาดของมุม เช่น ที่พีทาโกรัสได้ศึกษาไว้ เรียกว่า ตรีโกณมิติ โดยศัพท์มูลวิทยาแล้ว ตรีโกณมิติ หรือ trigonometry มาจากการรวมของคำสามคำ คือ ตรี หรือ tri ซึ่งแปลว่า สาม โณน หรือ gon ซึ่งแปลว่า มุมหรือเหลี่ยม และมิติ หรือ metric ซึ่งแปลว่า การวัด ซึ่งรวมความทั้งสามคำได้ว่า การวัดรูปสามเหลี่ยม หรือวิชาที่ว่าด้วยการวัดรูปสามเหลี่ยมนั่นเอง

ตรีโกณมิติ (trigonometry)

ตรี หรือ tri	แปลว่า สาม
โกณ หรือ gon	แปลว่า มุมหรือเหลี่ยม
มิติ หรือ metric	แปลว่า การวัด

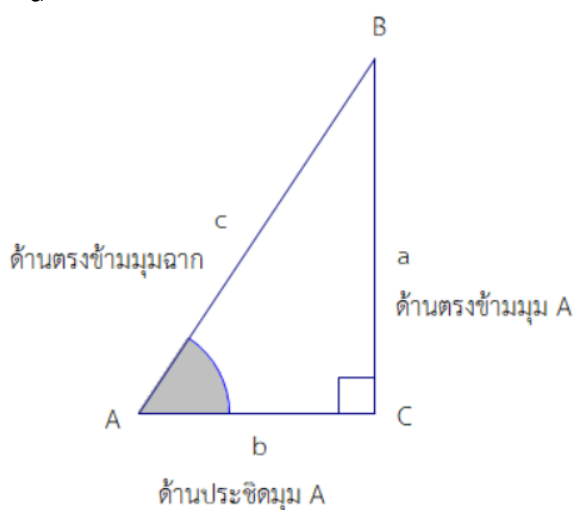
การวัดรูปสามเหลี่ยม หรือวิชาที่ว่าด้วยการวัดรูปสามเหลี่ยม

อัตราส่วนตรีโกณมิติ(Trigonometric ratio) คือ อัตราส่วนส่วนของความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก



จากรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก และ มุม A เป็นมุมหลัก โดยอัตราส่วนของความยาวของด้าน ทั้งสามมีชื่อเรียกดังนี้

$\frac{a}{c}$	เรียก ไซน์(sine) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\sin A$
$\frac{b}{c}$	เรียก โคไซน์(cosine) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\cos A$
$\frac{a}{b}$	เรียก แทนเจนต์(tangent) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\tan A$
$\frac{c}{a}$	เรียก โคซีแคนต์(cosecant) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\operatorname{cosec} A$
$\frac{c}{b}$	เรียก ซีแคนต์(secant) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\sec A$
$\frac{b}{a}$	เรียก โคแทนเจนต์(cotangent) ของมุม A นิยมเขียนเป็น $\cot A$



สามารถสรุปนิยามของไซน์, โคไซน์, แทนเจนต์, โคซีแคนต์, ซีแคนต์ และโคแทนเจนต์ เฉพาะกรณีที่ A เป็นมุมแหลมได้ดังนี้

ไซน์ของมุม A	คือ	$\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
โคไซน์ของมุม A	คือ	$\frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$
แทนเจนต์ของมุม A	คือ	$\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}$
โคซีแคนต์ของมุม A	คือ	$\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}$

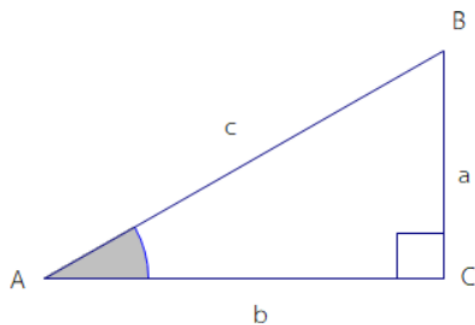
ซีแคนต์ของมุม A คือ $\frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}$

โคแทนเจนต์ของมุม A คือ $\frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม A}}$

จากบทนิยาม อัตราส่วนตรีโกณมิติเป็นส่วนกลับของกันและกัน ได้แก่

$$\begin{array}{ll} \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} & \text{และ} \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \\ \cos A = \frac{1}{\sec A} & \text{และ} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} \\ \tan A = \frac{1}{\cot A} & \text{และ} \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีความยาวด้านต่าง ๆ ดังรูป จงหา อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A ทุกอัตราส่วน



วิธีทำ

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

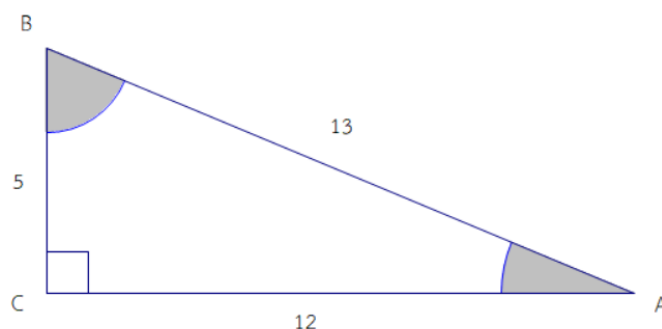
$$\sec A = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\cot A = \frac{b}{a}$$

□

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปที่กำหนดให้



จงหา $\sin A$, $\cos A$, $\cot A$, $\operatorname{cosec} B$, $\tan B$ และ $\sec B$

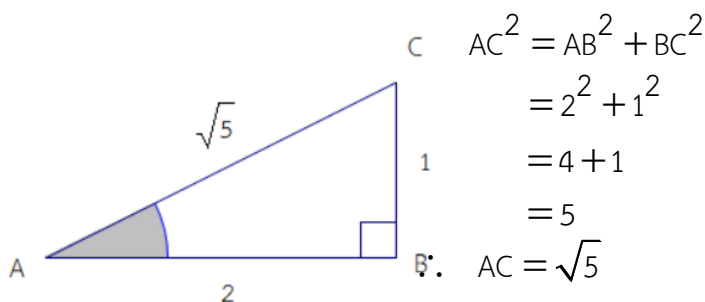
วิธีทำ

$$\begin{array}{lll} \sin A = \frac{5}{13} & \cos A = \frac{12}{13} & \cot A = \frac{12}{5} \\ \operatorname{cosec} B = \frac{13}{12} & \tan B = \frac{12}{5} & \sec B = \frac{13}{5} \quad \square \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง \hat{B} เป็นมุมฉาก และ $\tan A = \frac{1}{2}$

จงหา $\tan C$, $\sec C$, $\operatorname{cosec} C$, $\sin A$, $\cot A$ และ $\sec A$

วิธีทำ จาก กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง \hat{B} เป็นมุมฉาก จะได้ว่า



$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 2^2 + 1^2 \\ &= 4 + 1 \\ &= 5 \\ \therefore AC &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \tan C = 2 & \sec C = \sqrt{5} & \operatorname{cosec} C = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \sin A = \frac{1}{\sqrt{5}} & \cot A = 2 & \sec A = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \square \end{array}$$

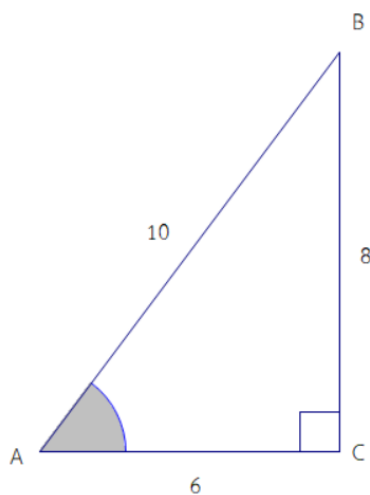
ตัวอย่างที่ 4 ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง \hat{C} เป็นมุมฉาก และ $10\sin A = 8$

จงหาค่าของ

1. $\cos A + \sin B$
2. $\tan B + \cot A$
3. $\operatorname{cosec} A - \sec B$

วิธีทำ จาก $10\sin A = 8$ จะได้ว่า $\sin A = \frac{8}{10}$

และ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง \hat{C} เป็นมุมฉาก จะได้ว่า



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

$$= 10^2 - 8^2$$

$$= 100 - 64$$

$$= 36$$

เนื่องจาก AC เป็นความยาวด้านของ

รูปสามเหลี่ยม ABC

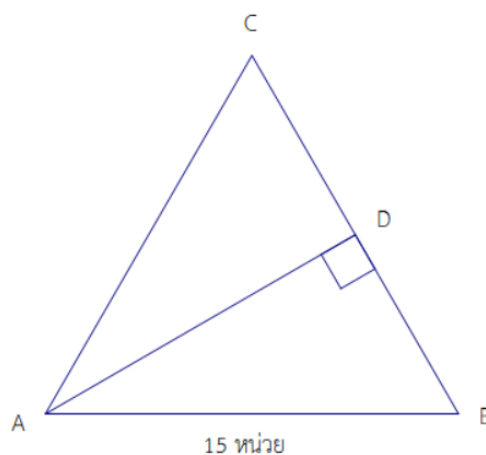
$$\therefore AC = \sqrt{36} = 6$$

$$1. \quad \cos A + \sin B = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \quad \square$$

$$2. \quad \tan B + \cot A = \frac{6}{8} + \frac{6}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \square$$

$$3. \quad \operatorname{cosec} A - \sec B = \frac{10}{8} - \frac{10}{8} = 0 \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC มีด้าน AD เป็นส่วนสูง และ AB ยาว 15 หน่วย ดังรูป จงหาความยาวของ AD

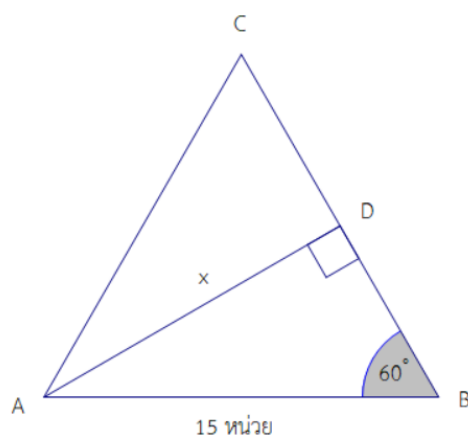


วิธีทำ

กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC และ AB ยาว 15 หน่วย

จากสมบัติรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จะได้ $\angle B = 60^\circ$

ให้ x แทนความยาวของ AD จะได้



จากรูปสามเหลี่ยม ABD จะได้

$$\sin \hat{ABC} = \frac{AD}{AB}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{15}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{15}$$

$$x = 15 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น ความยาวของ AD เท่ากับ $15 \frac{\sqrt{3}}{2}$ หน่วย

□



ใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

- 1) ใช้การสื่อสารเพื่อนำเสนอการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และสถานการณ์ที่กำหนดได้
- 2) ใช้การแก้ปัญหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หรือสถานการณ์ที่กำหนดได้

คำชี้แจง

ให้นักเรียนร่วมกันระดมความคิด แก้ปัญหา แลกเปลี่ยนเรียนรู้กับสมาชิกในกลุ่มในการทำใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” แล้วนำเสนอคำตอบที่ถูกต้องชัดเจนที่สุด

ชื่อกลุ่ม.....

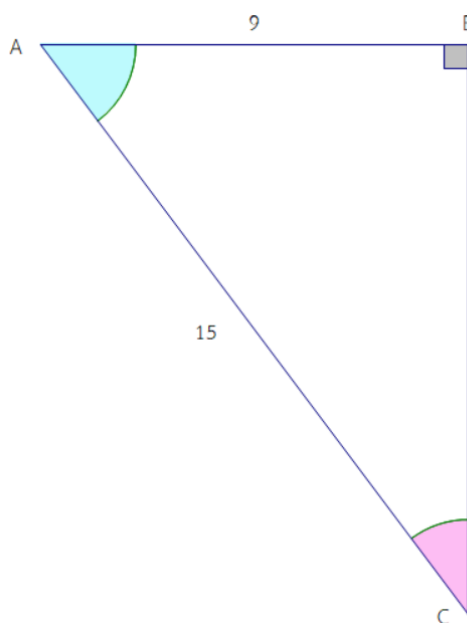
สมาชิกในกลุ่ม

1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....
บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ
2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....
บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ
3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....
บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ
4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....
บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที

ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีความยาวด้านต่าง ๆ ดังรูป จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A และมุม C ทุกอัตราส่วน



วิธีทำ จากรูปหาความยาวด้าน BC จาก

.....

.....

.....

.....

.....

.....

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A

1) $\sin A =$

4) $\operatorname{cosec} A =$

2) $\cos A =$

5) $\sec A =$

3) $\tan A =$

6) $\cot A =$

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม C

1) $\sin C =$

4) $\operatorname{cosec} C =$

2) $\cos C =$

5) $\sec C =$

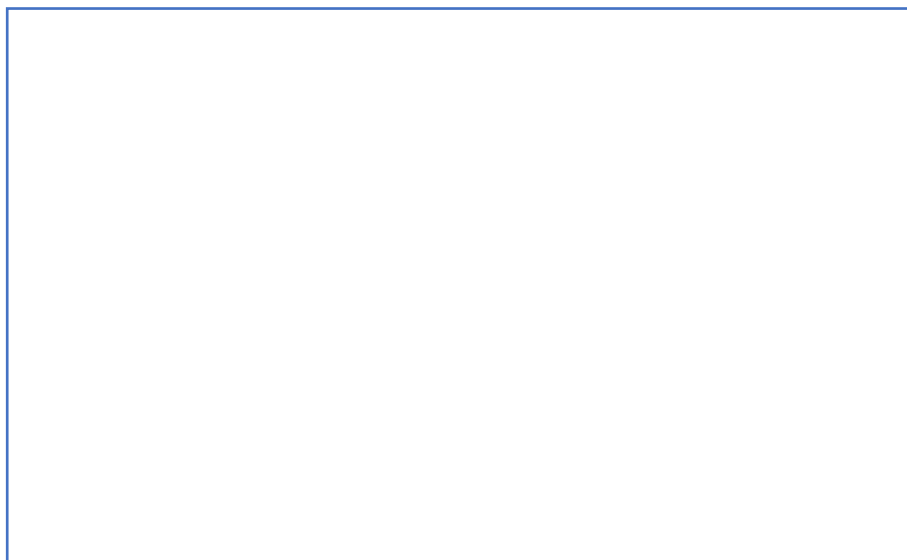
3) $\tan C =$

6) $\cot C =$

ได้คะแนน.....คะแนน

3. พาดบันไดกับกำแพงโดยให้ปลายบันไดตอนบนจรดขอบกำแพงพอดี ถ้าบันไดยาว 6.5 เมตร และโคนบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 4 เมตร แล้วบันไดทำมุมกับพื้นดินกี่องศาและกำแพงสูงประมาณเท่าใด (ใช้ตารางตรีโกณมิติ)

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถวาดรูปได้ดังนี้



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

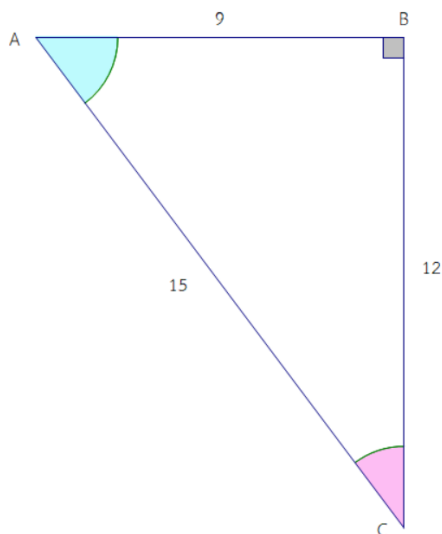
.....

.....

ได้คะแนน.....คะแนน

เฉลยใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”

1.



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

จะได้ $BC^2 = AC^2 - AB^2$

$$= 15^2 - 9^2$$

$$= 225 - 81$$

$$= 144$$

นั่นคือ $BC = \pm\sqrt{144}$

เนื่องจาก BC เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม

ดังนั้น $BC = \sqrt{144} = 12$ หน่วย

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A

$$1) \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad 4) \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$2) \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0.6 \quad 5) \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \approx 1.67$$

$$3) \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \approx 1.33 \quad 6) \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75$$

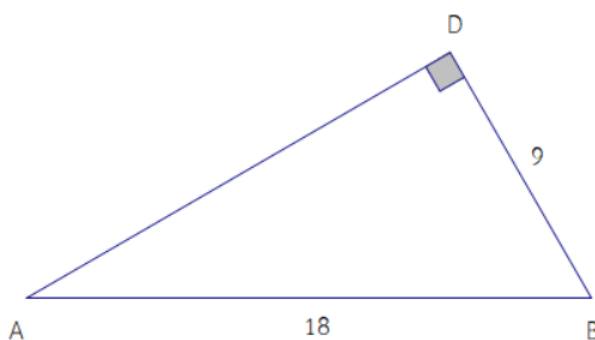
อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม C

$$1) \sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0.6 \quad 4) \operatorname{cosec} C = \frac{1}{\sin C} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \approx 1.67$$

$$2) \cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad 5) \sec C = \frac{1}{\cos C} = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$3) \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad 6) \cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

2. เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
 จะได้ว่า $AB = AC = BC = 18$ หน่วย และ
 เนื่องจาก $AB = AC$
 รูปสามเหลี่ยม ABC จึงเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและจากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วด้วย
 นั่นคือ $BD = CD = \frac{18}{2}$ หรือ 9 หน่วย
 พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD ที่มีมุม D เป็นมุมฉาก ดังรูป



จาก

$$\sin B = \frac{AD}{AB}$$

$$AD = AB \sin B$$

$$= 18 \sin 60^\circ$$

$$= 18 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 9\sqrt{3}$$

ดังนั้น ความยาวของ \overline{AD} ยาวประมาณ $9\sqrt{3} \approx 15.59$ หน่วย

หรือ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$= 18^2 - 9^2$$

$$= 324 - 81$$

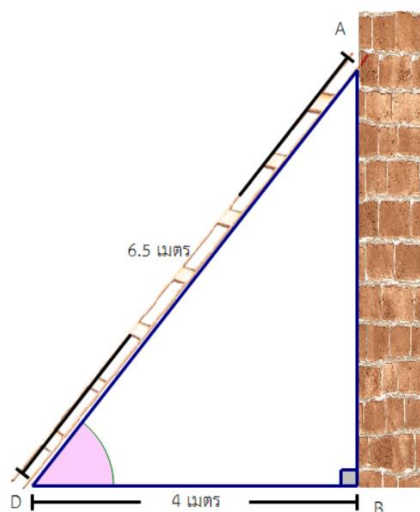
$$= 243$$

นั่นคือ $AD = \pm \sqrt{243}$

เนื่องจาก AD เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม จะได้ $AD = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$

ดังนั้น ความยาวของ \overline{AD} ยาวประมาณ $9\sqrt{3} \approx 15.59$ หน่วย

3. จากที่กำหนดให้สามารถวาดรูปได้ดังนี้



ให้ AB เป็นความสูงของกำแพง

AC เป็นบันไดซึ่งยาว 6.5 เมตร

และ BC เป็นระยะห่างโคนบันไดกับกำแพง

หาขนาดของมุมที่บันไดทำกับพื้นดิน ได้ดังนี้

กำหนดมุมระหว่างบันไดทำกับพื้นดิน คือ $\hat{ACB} = \theta$

จาก $\cos \hat{ACB} = \frac{BC}{AC}$

จะได้ $\cos \theta = \frac{BC}{AC}$
 $= \frac{4}{6.5}$

$$\approx 0.6154$$

นั่นคือ $\theta \approx 52^\circ$

หาความสูงของกำแพงได้ดังนี้

จาก $\sin \hat{ACB} = \frac{AB}{AC}$

จะได้ $\sin \theta = \frac{AB}{AC}$

$$\begin{aligned} AB &= AC \sin \theta \\ &= 6.5 \sin 52^\circ \\ &\approx 6.5(0.7880) \end{aligned}$$

นั่นคือ ≈ 5.122

ดังนั้น บันไดทำมุมกับพื้นดินประมาณ 52° องศาและกำแพงสูงประมาณ 5.122 เมตร



แบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

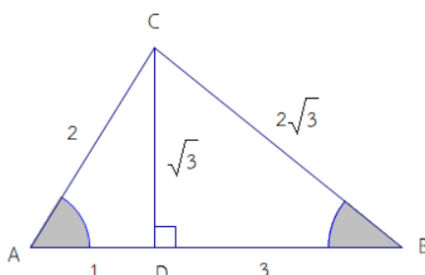
ด้านความรู้

- 1) หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ได้

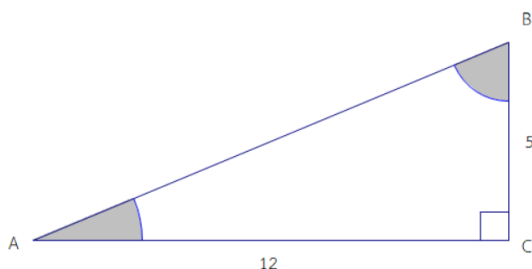
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- 1) ใช้การแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้
- 2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีความยาวด้านต่าง ๆ ดังรูป จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A และมุม B ทุกอัตราส่วน



2. จากรูปที่กำหนดให้ จงหา



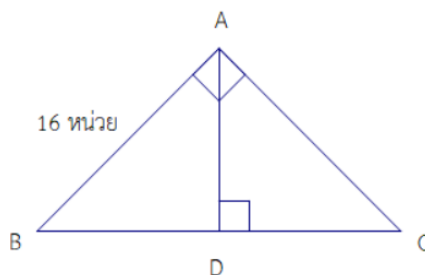
- 1) $\sin A$
- 2) $\sec A$
- 3) $\cot B + \cot A$
- 4) $\sec B - \operatorname{cosec} A$
- 5) $2\tan A - \tan B$
- 6) $\cos^2 A + \cos^2 B$

3. ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากและ $\cos B = 0.25$ ซึ่ง \hat{A} เป็นมุมฉาก

จงหาค่าของ $(\tan B - \cot C)\sin C$

4. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก \hat{B} เป็นมุมฉาก ถ้า $\sec C = \sqrt{5}$ จงหา $\tan A + \tan C$

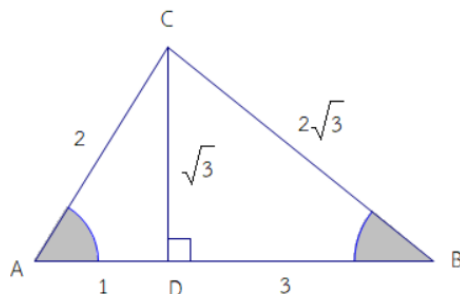
5. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC มี AD เป็นส่วนสูง และ AB ยาว 16 หน่วย ดังรูป จงหาความยาวของ AD



6. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มี $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ และมุม A มีขนาด 28° ด้าน BC ยาว 12 หน่วย จงหาความยาวรอบรูปสามเหลี่ยม ABC
7. เด็กชายตรีโกณกำลังเล่นว่าวอยู่ มือข้างที่ถือเชือก (A) อยู่สูงจากพื้นดิน 1.5 เมตร และเส้นเชือกทำมุมกับแนวระดับ 60 องศา โดยที่เชือกจากมือถึงว่าว (B) ยาว 10.5 เมตร อยากทราบว่า ว่าวตัวนี้อยู่สูงจากพื้นดินเท่าใด
8. เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งยาว 7 เซนติเมตร และทำมุม 65 องศา กับด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมนี้ จงหาความยาวและความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”

1.



$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{cosec} A = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos A = \frac{1}{2} \qquad \sec A = 2$$

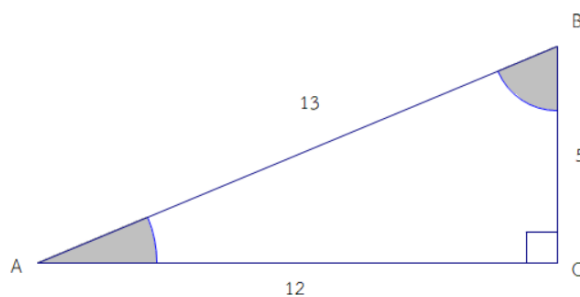
$$\tan A = \sqrt{3} \qquad \cot A = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{cosec} B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

$$\cos B = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec B = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot B = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \qquad \square$$

2. จากรูปสามเหลี่ยม ABC จะได้



$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= 12^2 + 5^2 \\ &= 144 + 25 \\ &= 169 \\ AB &= 13 \end{aligned}$$

$$1) \sin A = \frac{5}{13} \qquad 2) \sec A = \frac{13}{12} \qquad \square$$

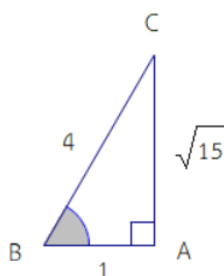
$$3) \cot B + \cot A = \frac{5}{12} + \frac{12}{5} = \frac{25}{60} + \frac{144}{60} = \frac{169}{60} \qquad \square$$

$$4) \sec B - \operatorname{cosec} A = \frac{13}{5} - \frac{13}{5} = 0 \qquad \square$$

$$5) 2 \tan A - \tan B = 2 \left(\frac{5}{12} \right) - \frac{12}{5} = \frac{5}{6} - \frac{12}{5} = \frac{25}{30} - \frac{72}{30} = -\frac{47}{30} \quad \square$$

$$6) \cos^2 A + \cos^2 B = \left(\frac{12}{13} \right)^2 + \left(\frac{5}{13} \right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1 \quad \square$$

3. จากกำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\cos B = 0.25$ จะได้ว่า $\cos B = \frac{1}{4}$ และ \hat{A} เป็นมุมฉาก ดังรูป



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$4^2 = 1^2 + AC^2$$

$$AC^2 = 16 - 1$$

$$= 15$$

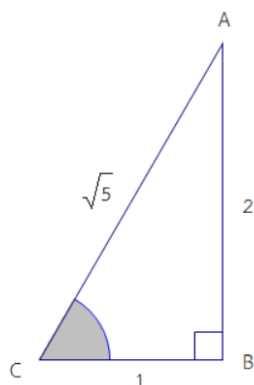
$$AC = \sqrt{15}$$

$$\text{หาค่า } (\tan B - \cot C) \sin C = (\sqrt{15} - \sqrt{15}) \frac{1}{4} = (0) \frac{1}{4} = 0$$

ดังนั้น ค่าของ $(\tan B - \cot C) \sin C$ เท่ากับ 0

□

4. จากกำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก \hat{B} เป็นมุมฉาก และ $\sec C = \sqrt{5}$ จะได้ว่า



$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$\sqrt{5}^2 = 1^2 + AB^2$$

$$AB^2 = 5 - 1$$

$$= 4$$

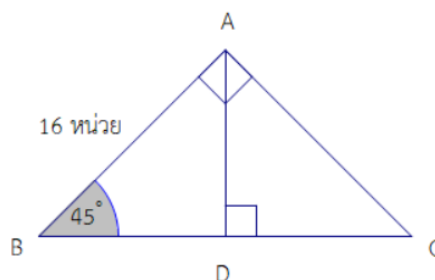
$$AB = 2$$

$$\text{หาค่า } \tan A + \tan C = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} = \frac{5}{2}$$

ดังนั้น ค่าของ $\tan A + \tan C$ เท่ากับ $\frac{5}{2}$

□

5. จากรูปกำหนดให้รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC มุมยอดเป็นมุมฉาก จะได้ว่า มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยม ABC มีขนาดเท่ากัน เท่ากับ 45° มี AD เป็นส่วนสูง และ AB ยาว 16 หน่วย ดังรูป



จากรูปสามเหลี่ยม ABD จะได้ว่า

$$\sin B = \frac{AD}{AB}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{AD}{16}$$

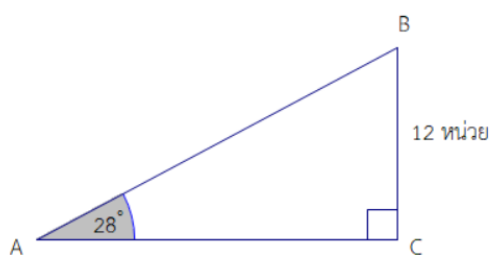
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AD}{16}$$

$$AD = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

ดังนั้น ความยาวของ AD เท่ากับ $8\sqrt{2}$ หน่วย

□

6. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มี $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ และมุม A มีขนาด 28° ด้าน BC ยาว 12 หน่วย ดังรูป จงหาความยาวรอบรูปสามเหลี่ยม ABC



หาความยาว AB จาก

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\sin 28^\circ = \frac{12}{AB}$$

$$AB \approx \frac{12}{0.4695} \quad (\sin 28^\circ \approx 0.4695)$$

$$AB \approx 25.5591$$

และ หาความยาว AC จาก

$$\tan A = \frac{BC}{AC}$$

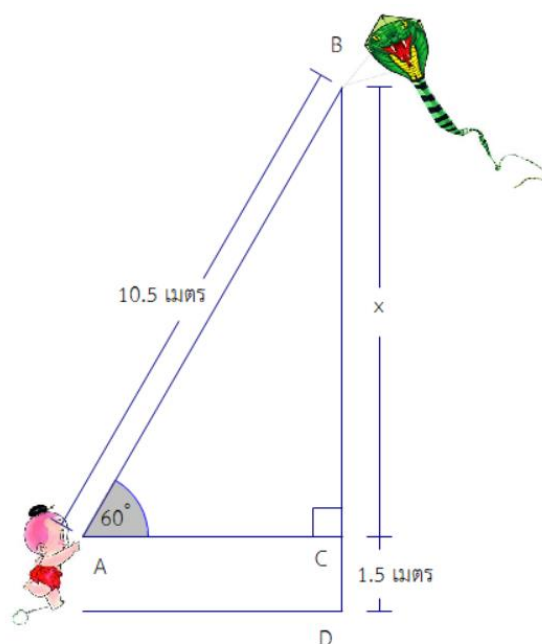
$$\tan 28^\circ = \frac{12}{AC}$$

$$AC \approx \frac{12}{0.5317} \quad (\tan 28^\circ \approx 0.5317)$$

$$AC \approx 22.5691$$

ดังนั้น ความยาวรอบรูปสามเหลี่ยม ABC ยาวประมาณ 60.1282 หน่วย \square

7. จากโจทย์สามารถเขียนรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป



ให้ x แทน ความสูงจากแนวระดับถึงว่าว

จากรูปสามเหลี่ยม ABC จะได้

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{10.5}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10.5}$$

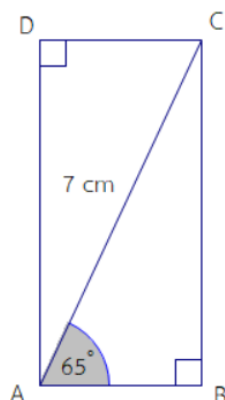
$$x = 10.5 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

นั่นคือ

$$x \approx 9.093$$

ดังนั้น ว่าวตัวนี้อยู่สูงจากพื้นดินประมาณ 10.593 เมตร \square

8. จากโจทย์สามารถเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD



ให้ AB แทน ด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

BC แทน ด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จากรูปสามเหลี่ยม ABC จะได้ว่า

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin 65^\circ = \frac{BC}{7}$$

$$0.9063 \approx \frac{BC}{7} \quad (\sin 65^\circ \approx 0.9063)$$

$$BC \approx (0.9063)(7)$$

$$BC \approx 6.3441$$

และ

$$\cos A = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos 65^\circ = \frac{AB}{7}$$

$$AB \approx (0.4226)(7) \quad , \cos 65^\circ \approx 0.4226$$

$$AB \approx 2.9582$$

ดังนั้น ความยาวและความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาวประมาณ 6.3441

เซนติเมตร และ 2.9582 เซนติเมตร ตามลำดับ

□

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” หน้า 1 - 3



"อัตราส่วนตรีโกณมิติ"

ชื่อน คำแปลตรีโกณมิติ

วิชาที่เกี่ยวกับการศึกษาความสัมพันธ์เกี่ยวกับส่วนประกอบต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งความยาวด้านและขนาดของมุม เช่น ที่พีทาโกรัสได้ศึกษาไว้ เรียกว่า **ตรีโกณมิติ**


โดยศัพท์มูลวิทยาแล้ว ตรีโกณมิติ หรือ trigonometry มาจากการรวมของคำสามคำ คือ

ตรี หรือ tri	ซึ่งแปลว่า สาม
โกณ หรือ gon	ซึ่งแปลว่า มุมหรือเหลี่ยม
และมิติ หรือ metric	ซึ่งแปลว่า การวัด

ซึ่งรวมความทั้งสามคำได้ว่า **การวัดรูปสามเหลี่ยม** หรือ **วิชาที่ว่าด้วยการวัดรูปสามเหลี่ยม**

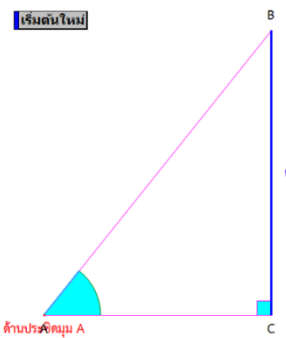


ก่อนหน้า จิตสำโสม นายอภิรักษ์ สิงขรนอก ดำเนินงาน ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนเทพศิรินทร์พญาไท ส.บ.อมตะ อ.ต.ป.อุ.จ.น.ก. 82380 โทร 0835207928 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัชฌิมศึกษา เขต 14 **หน้าต่อไป**



"อัตราส่วนตรีโกณมิติ"

เริ่มต้นใหม่




ด้านตรงข้ามมุม A

ด้านประชิดมุม A

มุม A	ไซนัสของมุม A	คือ	ความยาวด้านตรงข้ามมุม A	นิยมเขียนเป็น	$\sin A$
สรุปนิยาม	โคไซน์ของมุม A	คือ	ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก	นิยมเขียนเป็น	$\sin A$
	โคไซน์ของมุม A	คือ	ความยาวด้านประชิดมุม A	นิยมเขียนเป็น	$\cos A$
	แทนเจนต์ของมุม A	คือ	ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก	นิยมเขียนเป็น	$\tan A$
	โคซีแคนต์ของมุม A	คือ	ความยาวด้านประชิดมุม A	นิยมเขียนเป็น	$\tan A$
	ซีแคนต์ของมุม A	คือ	ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก	นิยมเขียนเป็น	$\sec A$
	โคแทนเจนต์ของมุม A	คือ	ความยาวด้านประชิดมุม A	นิยมเขียนเป็น	$\csc A$
		คือ	ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก	นิยมเขียนเป็น	$\sec A$
		คือ	ความยาวด้านประชิดมุม A	นิยมเขียนเป็น	$\csc A$
		คือ	ความยาวด้านประชิดมุม A	นิยมเขียนเป็น	$\cot A$
		คือ	ความยาวด้านตรงข้ามมุม A	นิยมเขียนเป็น	$\cot A$

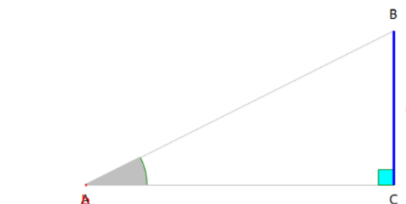
ก่อนหน้า จิตสำโสม นายอภิรักษ์ สิงขรนอก ดำเนินงาน ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนเทพศิรินทร์พญาไท ส.บ.อมตะ อ.ต.ป.อุ.จ.น.ก. 82380 โทร 0835207928 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัชฌิมศึกษา เขต 14 **หน้าต่อไป**




"อัตราส่วนตรีโกณมิติ"

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีความยาวด้านต่าง ๆ ดังรูป

วิธีทำ จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A ทุกอัตราส่วน






$\sin A$	$= \frac{a}{c}$	$\csc A$	$= \frac{c}{a}$
$\cos A$	$= \frac{b}{c}$	$\sec A$	$= \frac{c}{b}$
$\tan A$	$= \frac{a}{b}$	$\cot A$	$= \frac{b}{a}$



ก่อนหน้า จิตสำโสม นายอภิรักษ์ สิงขรนอก ดำเนินงาน ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนเทพศิรินทร์พญาไท ส.บ.อมตะ อ.ต.ป.อุ.จ.น.ก. 82380 โทร 0835207928 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัชฌิมศึกษา เขต 14 **หน้าต่อไป**

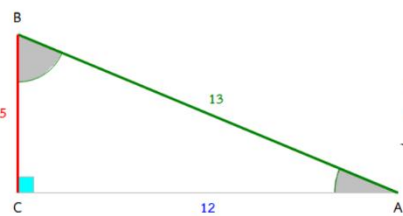

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” หน้า 4 - 6

"อัตราส่วนตรีโกณมิติ"

เริ่มต้นใหม่ ตัวอย่างที่ 2 จากรูปที่กำหนดให้ จงหา $\sin A$, $\cos A$, $\cot A$, $\operatorname{cosec} B$, $\tan B$ และ $\sec B$

วิธีทำ

$\sin A = \frac{5}{13}$

$\cos A = \frac{12}{13}$




$\cot A = \frac{12}{5}$

$\operatorname{cosec} B = \frac{13}{12}$

$\tan B = \frac{12}{5}$

$\sec B = \frac{13}{5}$

ก่อนหน้า จัดทำโดย นายอรรถวิทย์ สิริทองกุล ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสืบทอดวิชา สมอแขวน อ.เมือง จ.พิจิตร 82180 โทร 0835207728 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 14 **หน้าต่อไป**

"อัตราส่วนตรีโกณมิติ"

เริ่มต้นใหม่ ตัวอย่างที่ 3 ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง \hat{B} เป็นมุมฉาก และ $\tan A = \frac{1}{2}$

วิธีทำ จงหา $\tan C$, $\sec C$, $\operatorname{cosec} C$, $\sin A$, $\cot A$ และ $\sec A$

รูปสามเหลี่ยม ABC

BC

AB

ด้าน AC

AC

มุม A

มุม C

มุม B เป็นมุมฉาก

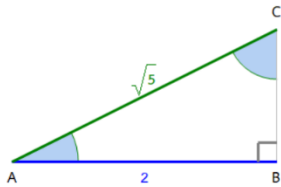
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 2^2 + 1^2$$

$$= 4 + 1$$

$$= 5$$

$$\therefore AC = \sqrt{5}$$



$\tan C = \frac{2}{1} = 2$


$\sec C = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

$\operatorname{cosec} C = \frac{\sqrt{5}}{2}$




$\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cot A = \frac{2}{1} = 2$

$\sec A = \frac{\sqrt{5}}{2}$



ก่อนหน้า จัดทำโดย นายอรรถวิทย์ สิริทองกุล ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสืบทอดวิชา สมอแขวน อ.เมือง จ.พิจิตร 82180 โทร 0835207728 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 14 **หน้าต่อไป**

"อัตราส่วนตรีโกณมิติ"

เริ่มต้นใหม่ ตัวอย่างที่ 4 ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่ง \hat{C} เป็นมุมฉาก และ $10\sin A = 8$ จงหาค่าของ

วิธีทำ

- $\cos A + \sin B$
- $\tan B + \cot A$
- $\operatorname{cosec} A - \sec B$

รูปสามเหลี่ยม ABC

BC

AB

ด้าน AC

AC

มุม A

มุม B

มุม C เป็นมุมฉาก

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

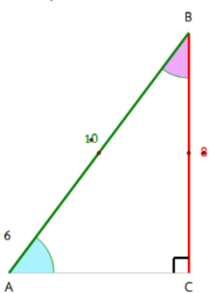
$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

$$= 10^2 - 8^2$$

$$= 100 - 64$$

$$= 36$$


$$\therefore AC = \sqrt{36} = 6$$



$\cos A + \sin B = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

$\tan B + \cot A = \frac{6}{8} + \frac{6}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$\operatorname{cosec} A - \sec B = \frac{10}{8} - \frac{10}{8} = 0$



คำตอบ

ก่อนหน้า จัดทำโดย นายอรรถวิทย์ สิริทองกุล ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสืบทอดวิชา สมอแขวน อ.เมือง จ.พิจิตร 82180 โทร 0835207728 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 14 **หน้าต่อไป**

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” หน้า 7 - 10

"อัตราส่วนตรีโกณมิติ"

เริ่มต้นใหม่ ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC มีด้าน AD เป็นส่วนสูง และ AB ยาว 15 หน่วย จงหาความยาวของ AD

วิธีทำ

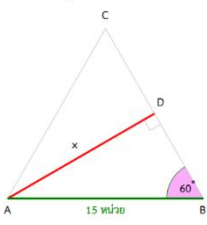
รูปสามเหลี่ยม ABC

AD

AB

มุม ABC

คำตอบ



$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB}$$

$$= \frac{x}{15}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{15}$$

$$x = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น ความยาวของ AD เท่ากับ $15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ หน่วย

ข้อควรระวัง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ใช้ได้เฉพาะสามเหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น ในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมใด ๆ ต้องระบุให้ชัดเจนว่ามุมนั้นอยู่ในสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ

"อัตราส่วนตรีโกณมิติ"

เริ่มต้นใหม่ 1. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีความยาวด้านต่าง ๆ ดังรูป จงหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A และมุม C ทุกอัตราส่วน

วิธีทำ

รูปสามเหลี่ยม ABC

AB

AC

ด้าน BC

มุม A

มุม C

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

จะได้ $BC^2 = AC^2 - AB^2$

$= 25^2 - 9^2$

$= 225 - 81$

$= 144$

เนื่องจาก BC เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม ดังนั้น $BC = \sqrt{144} = 12$ หน่วย

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม A

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{25} = 0.48$

$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{25} = 0.36$

$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \approx 1.33$

$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{AC}{BC} = \frac{25}{12} \approx 2.08$

$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{AC}{AB} = \frac{25}{9} \approx 2.78$

$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{12} = 0.75$

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม C

$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{9}{25} = 0.36$

$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{25} = 0.48$

$\tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{12} = 0.75$

$\csc C = \frac{1}{\sin C} = \frac{AC}{AB} = \frac{25}{9} \approx 2.78$

$\sec C = \frac{1}{\cos C} = \frac{AC}{BC} = \frac{25}{12} \approx 2.08$

$\cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{9} = 1.33$

ข้อควรระวัง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ใช้ได้เฉพาะสามเหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น ในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมใด ๆ ต้องระบุให้ชัดเจนว่ามุมนั้นอยู่ในสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ

"อัตราส่วนตรีโกณมิติ"

เริ่มต้นใหม่ 2. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC มี AB ยาว 18 หน่วย และ AD แบ่งครึ่งมุม A จงหาความยาวของ AD

วิธีทำ

รูปสามเหลี่ยม ABC

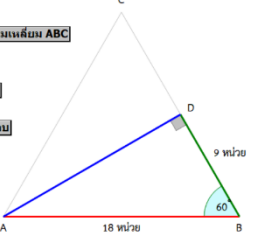
AB

BD

มุม B

AD

คำตอบ



$\sin B = \frac{AD}{AB}$

$= \frac{x}{18}$

$AD = AB \sin B$

$= 18 \sin 60^\circ$

$= 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 9\sqrt{3}$

ดังนั้น ความยาวของ AD เท่ากับ $9\sqrt{3}$ หน่วย

จาก พหุคูณพีทาโกรัส

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

หรือ $AD^2 = AB^2 - BD^2$

$= 18^2 - 9^2$

$= 324 - 81$

$= 243$

ดังนั้น ความยาวของ AD เท่ากับ $\sqrt{243} = 9\sqrt{3} \approx 15.59$ หน่วย (ความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม)

ข้อควรระวัง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ใช้ได้เฉพาะสามเหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น ในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมใด ๆ ต้องระบุให้ชัดเจนว่ามุมนั้นอยู่ในสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ

"อัตราส่วนตรีโกณมิติ"

เริ่มต้นใหม่ 3. พวดินได้ปักกำแพงไม้ไผ่ยาว 4 เมตร ตั้งฉากกับกำแพงคอนกรีตสูง 6.5 เมตร ถ้าบันไดยาว 6.5 เมตร และบันไดยันติดอยู่กับกำแพง 4 เมตร จงหาความสูงของกำแพง (ใช้ตารางตรีโกณมิติ)

วิธีทำ

กำแพง

บันได

รูปสามเหลี่ยม ABC

AB

AC

BC

กำแพงสูงจากกำแพง

มุม ACB

AB เป็นความสูงของกำแพง

AC เป็นบันไดสูง 6.5 เมตร

BC เป็นระยะทางจากบันไดยันติดกับกำแพง 4 เมตร

หาบันไดที่ยาวมุมที่ขึ้น

จาก $\cos \theta = \frac{BC}{AC}$

$= \frac{4}{6.5}$

≈ 0.6154

นั่นคือ $\theta \approx 52^\circ$

ดังนั้น บันไดที่ยาวมุมที่ขึ้นประมาณ 52 องศา

จาก $\sin \theta = \frac{AB}{AC}$

$AB = AC \sin \theta$

$= 6.5 \sin 52^\circ$

$\approx 6.5(0.7880)$

≈ 5.122

ดังนั้น ความสูงของกำแพง 5.122 เมตร

ข้อควรระวัง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ใช้ได้เฉพาะสามเหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น ในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมใด ๆ ต้องระบุให้ชัดเจนว่ามุมนั้นอยู่ในสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ

เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อที่ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ทั้ง 2 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อที่ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์เป็นส่วนใหญ่	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อที่ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์บางส่วน	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อที่ 1 และข้อ 2 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
4	5
3	4
2	3
1	2
0	1

เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้การแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 - 6 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้แก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	สามารถแสดงวิธีทำสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 - 6 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการแสดงวิธีทำสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ในแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ข้อ 3 - ข้อ 8 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลงการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ” โดยไม่ คัดลอกจากผู้อื่น	ทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ” โดย คัดลอกจากผู้อื่น เป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ” โดย คัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ” คัดลอกจากผู้อื่น
2) มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อย โดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อย บางส่วนแก้ไขเมื่อ ได้รับการตักเตือน	แต่งกายไม่ เรียบร้อยหรือไม่ แก้ไขเมื่อได้รับการ ตักเตือน
3) ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรง เวลา	การเข้าเรียนสายไม่ เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสาย เกิน 5 นาทีแต่ไม่ เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสาย เกิน 15 นาที
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ” ครบ ทุกข้อและถูกต้อง สมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ” ครบ ทุกข้อและถูกต้อง เป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ” ครบ ทุกข้อและถูกต้อง เป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ” ไม่ครบ ทุกข้อหรือครบทุก ข้อแต่ไม่ถูกต้อง หรือไม่ทำ แบบฝึกหัดที่ 1 “อัตราส่วน ตรีโกณมิติ”

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ใช้การสื่อสารเพื่อนำเสนอการหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติเมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาโจทย์และสถานการณ์ที่กำหนดได้	นำเสนอหรือเขียนใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 ข้อ	นำเสนอหรือเขียนใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ	นำเสนอหรือเขียนใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการนำเสนอหรือเขียนใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์หรือไม่ทำใบงาน “อัตราส่วน
2) ใช้การแก้ปัญหาคำถามอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือแก้ปัญหาโจทย์หรือสถานการณ์ที่กำหนดได้	แก้ปัญหาในใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 ข้อ	แก้ปัญหาในใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 2 ข้อ	แก้ปัญหาในใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้ อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการแก้ปัญหาในใบงาน “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์หรือไม่ทำใบงาน “อัตราส่วน
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	ไม่มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน ไม่แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มหรือช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ได้	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหาทุกครั้ง	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นส่วนใหญ่	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นบางครั้ง	ไม่ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “อัตราส่วนตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหา

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

แบบบันทึกสรุปคะแนนแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2
อัตราส่วนตรีโกณมิติ

[illegible]

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน
พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ :
บริษัท ธนัชการพิมพ์ จำกัด.
- พิชิต ฤทธิจรูญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : แฮสออฟ
เคอร์มิสท์.
- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็น
สำคัญ.** พระนครศรีอยุธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัย
เทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.
- ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฏานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-
NET คณิตศาสตร์ ม.6.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.**
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตาม
หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ:
โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.** พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย.
- สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 5. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.
- อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรง
พิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.