



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระการเรียนรู้ เอกลักษณะและสมการตรีโกณมิติ

ภาคเรียนที่ 1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เวลา 3 ชั่วโมง

1. ผลการเรียนรู้

แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

เอกลักษณะและสมการตรีโกณมิติ

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

การพิสูจน์เอกลักษณะเป็นการแสดงให้เห็นว่าจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการเท่ากันจริง โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การแก้สมการตรีโกณมิติทำได้ทำนองเดียวกันกับการแก้สมการทั่วไป โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 พิสูจน์เอกลักษณะของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การแก้ปัญหาในการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.2.2 ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการพิสูจน์

เอกลักษณะของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.2.3 ใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณะของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.2 มีวินัย

4.3.3 ใฝ่เรียนรู้

4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

4.4.1 ใช้การสื่อสารในการนำเสนอพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.4.2 ใช้การคิดในแก้ปัญหาการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.4.3 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้

5. เนื้อหา/สาระ

เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์

พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \text{ เมื่อ } \tan \theta \neq 0, \quad \sin \theta = \cos \theta$$

จะเห็นว่า สมการทั้งสองเป็นสมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ เราเรียกสมการเช่นนี้ว่า สมการ

ตรีโกณมิติสมการ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันที่ปรากฏ

อยู่ในสมการนั้นได้ คือ ค่าของ $\cot \theta$, $\tan \theta$ และ $\frac{1}{\tan \theta}$ เรียกสมการที่มีสมบัติเช่นสมการ

$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ ว่า **เอกลักษณ์** ส่วนสมการ $\sin \theta = \cos \theta$ จะเป็นจริงสำหรับบางค่าของ θ ที่อยู่

ในโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองนั้น ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ผ่านมาได้มีการพิสูจน์เอกลักษณ์มาบ้างแล้ว เช่น เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

การพิสูจน์เอกลักษณ์เป็นการแสดงให้เห็นว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการเท่ากันจริง โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ การพิสูจน์เอกลักษณ์จึงช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ต่าง ๆ ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติและเอกลักษณ์ที่พิสูจน์แล้วสามารถนำไปอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ ได้

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า $\frac{2\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1}{\cos\theta} = 3\cos\theta$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \frac{2\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1}{\cos\theta} &= \frac{2\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) + 1}{\cos\theta} \\ &= \frac{2\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta + 1}{\cos\theta} \\ &= \frac{3\cos^2\theta}{\cos\theta} \\ &= 3\cos\theta\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} &= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} \\ &= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta-1)} \\ &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} \\ &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \tan\theta\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 4 จงพิสูจน์ว่า $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \cot \frac{\theta}{2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta &= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
 &= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \\
 &= \frac{1 + \cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
 &= \frac{1 + \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right)}{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
 &= \cot \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 5 จงพิสูจน์ว่า $\frac{1 + \sin \theta - \cos 2\theta}{\cos \theta + \sin 2\theta} = \tan \theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + \sin \theta - \cos 2\theta}{\cos \theta + \sin 2\theta} &= \frac{1 + \sin \theta - (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta + (2 \sin \theta \cos \theta)} \\
 &= \frac{\sin \theta + 2 \sin^2 \theta}{\cos \theta + (2 \sin \theta \cos \theta)} \\
 &= \frac{\sin \theta (1 + 2 \sin \theta)}{\cos \theta (1 + 2 \sin \theta)} \\
 &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \tan \theta
 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

จงพิสูจน์ว่า $\sin \alpha - \sin \beta \cos \gamma = \cos \beta \sin \gamma$

วิธีทำ จาก $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ จะได้ $\beta + \gamma = \pi - \alpha$
จะได้ $\sin(\beta + \gamma) = \sin(\pi - \alpha)$

$$\begin{aligned}\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma &= \sin \alpha \\ \cos \beta \sin \gamma &= \sin \alpha - \sin \beta \cos \gamma \\ \text{ดังนั้น } \sin \alpha - \sin \beta \cos \gamma &= \cos \beta \sin \gamma\end{aligned}\quad \square$$

สมการตรีโกณมิติ

การแก้สมการตรีโกณมิติทำได้ทำนองเดียวกันกับการแก้สมการทั่วไป เช่น สมการเอกซ์โพเนนเชียลหรือสมการลอการิทึม โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อหาคำตอบของสมการ

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ อาจซ้ำกันได้ ดังนั้น ในการหาคำตอบของสมการ ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งแล้ว คำตอบควรจะอยู่ในรูปของค่าทั่วไป

ตัวอย่างที่ 7 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\cos x = \frac{1}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

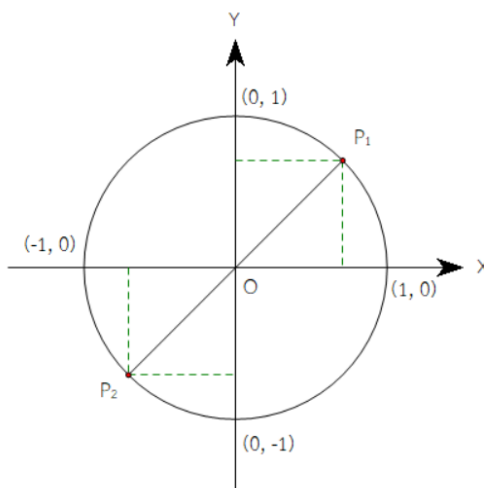
วิธีทำ เนื่องจากค่าของ x ในช่วง $(0, \frac{\pi}{2})$ ที่ทำให้ $\cos x = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียว
ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$ \square

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $\sin \theta = \frac{1}{2}$

วิธีทำ ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi]$ ที่ทำให้ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$
เนื่องจาก $\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$
และ $\sin\left(2n\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$
ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{6}$
และ $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม \square

ตัวอย่างที่ 9 จงแก้สมการ $\tan \theta = 1$

วิธีทำ จาก $\tan \theta = 1$
จะได้ $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$
 $\sin \theta = \cos \theta$



จากรูป ถ้า $\sin \theta = \cos \theta$ แสดงว่าจุด P_1 และ P_2 มีพิกัดแรกและพิกัดที่สองเท่ากัน

นั่นคือ $x = \frac{\pi}{4}$ และ $x = \frac{5\pi}{4}$

ดังนั้น ค่าค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{4}$

และ $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

□

ตัวอย่างที่ 10 จงแก้สมการ $2\sin^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$ เมื่อ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

วิธีทำ

$$2\sin^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$$

$$2(1 - \cos^2 \theta) + 3\cos \theta - 3 = 0$$

$$2 - 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$$

$$2\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 1 = 0$$

$$(2\cos \theta - 1)(\cos \theta - 1) = 0$$

นั่นคือ $\cos \theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\cos \theta = 1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ]$ ที่ทำให้ $\cos \theta = \frac{1}{2}$ คือ 60°

และ 300°

และ ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ]$ ที่ทำให้ $\cos \theta = 1$ คือ 0°

และ 360°

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ]$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง

คือ $0^\circ, 60^\circ, 300^\circ$ และ 360°

□

ตัวอย่างที่ 11 จงแก้สมการ $\sin 5\theta \cos 3\theta - \cos 5\theta \sin 3\theta = \cos \theta$

เมื่อ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

วิธีทำ

$$\text{จาก } \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\text{จะได้ } \sin 5\theta \cos 3\theta - \cos 5\theta \sin 3\theta = \sin(5\theta - 3\theta)$$

$$= \sin 2\theta$$

$$\text{จาก } \sin 5\theta \cos 3\theta - \cos 5\theta \sin 3\theta = \cos \theta$$

$$\text{จะได้ } \sin 2\theta = \cos \theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \cos \theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta (2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } \cos \theta = 0 \text{ หรือ } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{ค่าของ } \theta \text{ ในช่วง } [0^\circ, 360^\circ] \text{ ที่ทำให้ } \cos \theta = 0 \text{ คือ } 90^\circ$$

$$\text{และ } 270^\circ$$

$$\text{และ ค่าของ } \theta \text{ ในช่วง } [0^\circ, 360^\circ] \text{ ที่ทำให้ } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ คือ } 30^\circ$$

$$\text{และ } 150^\circ$$

$$\text{ดังนั้น ค่าของ } \theta \text{ ในช่วง } [0^\circ, 360^\circ] \text{ ที่ทำให้สมการเป็นจริง}$$

$$\text{คือ } 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ \text{ และ } 270^\circ$$

□

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจสอบแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และ สมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1	- แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และ สมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน ความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และ สมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อยู่ในระดับดี ขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาในการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 2 - ข้อ 3	- แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 10) - ข้อ 17)) - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาโจทย์ในการหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1	- แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1	- แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต	ตรวจการทำแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”	- แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
2) มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีวินัย อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึกการเข้าเรียน - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนใฝ่เรียนรู้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	- การส่งแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”	- แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมุ่งมั่นในการทำงานอยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน			
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”	- ใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การสื่อสารในการนำเสนอพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การคิดในแก้ปัญหาการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”	- ใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การคิดในแก้ปัญหาการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึก ประเมินผลด้าน สมรรถนะสำคัญของ ผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิต ในการทำกิจกรรม กลุ่มร่วมกับสมาชิกได้ อยู่ในระดับดีขึ้น

7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้ให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน

7.2 ครูทบทวนเรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยการสนทนากลุ่มต่อนักเรียนและใช้ สื่อ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” หน้าที่ 1 และหน้าที่ 2 ประกอบ ดังรูป

หน้าที่ 1

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"

นิยาม **เริ่มต้นใหม่**

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

นิยาม 1 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$

นิยาม 2 $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$

นิยาม 3 $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ เมื่อ $\sin \theta \neq 0$

นิยาม 4 $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ เมื่อ $\sin \theta \neq 0$

โดเมนของฟังก์ชัน \tan และ \sec

$$\mathbb{R} - \left\{ x \mid x = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

โดเมนของฟังก์ชัน \cot และ cosec

$$\mathbb{R} - \{ x \mid x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$$

เรนจ์ของฟังก์ชัน \tan และ \cot

$$\mathbb{R}$$

เรนจ์ของฟังก์ชัน \sec และ cosec

$$\mathbb{R} - \{ x \mid -1 < x < 1 \}$$

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"

หน้าที่ 2

เริ่มต้นใหม่

ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ

(1) $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ เมื่อ $\tan \theta \neq 0$

(2) $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$

(3) $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$ เมื่อ $\sin \theta \neq 0$

แสดง (1)

จงแสดงว่า $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ เมื่อ $\tan \theta \neq 0$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{1}{\tan \theta} \text{ เมื่อ } \tan \theta \neq 0$$

แสดง (2)

จงแสดงว่า $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta \text{ เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

ขั้นตอนและอธิบายทฤษฎี

7.3 ครูให้นักเรียนศึกษายกตัวอย่างที่ 1 ถึง ตัวอย่างที่ 6 จากใบความรู้ “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” เรื่อง เอกลักษณ์ แล้วสุ่มให้นักเรียนอธิบายตัวอย่างที่ 1 ถึง ตัวอย่างที่ 6 ตามลำดับ ครูและเพื่อนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียนร่วมกับอธิบายเพิ่มเติม โดยการสนทนากลุ่มตอบระหว่างครูกับนักเรียน

ชั่วโมงที่ 2

7.4 ครูให้ศึกษายกตัวอย่างที่ 7 ถึง ตัวอย่างที่ 11 จากใบความรู้ “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” เรื่อง สมการตรีโกณมิติ แล้วสุ่มให้นักเรียนอธิบายตัวอย่างที่ 7 ถึง ตัวอย่างที่ 11 ตามลำดับ ครูและเพื่อนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียนร่วมกับอธิบายเพิ่มเติมโดยการสนทนากลุ่มตอบระหว่างครูกับนักเรียน

7.5 ครูอธิบายเพิ่มเติมการพิสูจน์เอกลักษณ์นักเรียนต้องมีหลักการดังนี้

- เอกลักษณ์เป็นสมการที่เป็นจริงเสมอ
- เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญที่เราควรรู้จักและทำความเข้าใจเพื่อนำไปใช้ประโยชน์ในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ คือเอกลักษณ์จากวงกลมหนึ่งหน่วย
- การพิสูจน์เอกลักษณ์ คือ การพิสูจน์ให้เห็นจริงว่า พจน์ด้านซ้ายมือและพจน์ด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ เท่ากันเสมอทุก ๆ ค่าของตัวแปร

7.6 ครูอธิบายเพิ่มเติมการแก้สมการตรีโกณมิติ นักเรียนต้องมีหลักการดังนี้

- นักเรียนต้องใช้ความรู้ในเรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามและการแก้สมการพหุนาม มาช่วยแก้สมการโดยการเปลี่ยนรูปแบบของโจทย์ที่กำหนดให้ ให้อยู่ผลคูณของตัวประกอบของอัตราส่วนตรีโกณมิติ
- ใช้การแก้สมการของพหุนาม ในการหาคำตอบร่วมกับ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อระบุขนาดของมุมหรือจำนวนจริงที่มีค่าเท่ากับคำตอบของสมการ

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.7 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ในชั่วโมงที่ 1 และ 2 ประกอบครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

7.8 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” โดยครูสนทนากลุ่มตอบกับนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม หน้าชั้นเรียน ครูอธิบายและนักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมอธิบายเพิ่มเติม

ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.9 จากการทำใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” และศึกษาใบความรู้ “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ให้นักเรียนสรุปหลักการพิสูจน์เอกลักษณ์และการแก้สมการตรีโกณมิติ ลงในสมุดหรือกระดาษ A4 เพื่อนำไปใช้ต่อไป

ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.10 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” เป็น การบ้าน

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- ใบความรู้ “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” - ใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” - แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”	สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ”	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้ 1) พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาในการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้				
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้				
3) ใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้				

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์				
1) ซื่อสัตย์สุจริต				
2) มีวินัย				
3) ใฝ่เรียนรู้				
4) มุ่งมั่นในการทำงาน				
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน				
1) ใช้การคิดในแก้ปัญหาการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้				
2) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้				
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้บริหารโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา



ใบความรู้ “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้
- 2) ใช้การแก้ปัญหาในการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

เอกลักษณ์

พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \text{ เมื่อ } \tan \theta \neq 0, \quad \sin \theta = \cos \theta$$

จะเห็นว่า สมการทั้งสองเป็นสมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ เราเรียกสมการเช่นนี้ว่า สมการตรีโกณมิติสมการ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันที่ปรากฏอยู่ในสมการนั้นได้ คือ ค่าของ $\cot \theta$, $\tan \theta$ และ $\frac{1}{\tan \theta}$ เรียกสมการที่มีสมบัติเช่นสมการ

$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ ว่า **เอกลักษณ์** ส่วนสมการ $\sin \theta = \cos \theta$ จะเป็นจริงสำหรับบางค่าของ θ ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองนั้น ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ผ่านมาได้มีการพิสูจน์เอกลักษณ์มาบ้างแล้ว เช่น เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

การพิสูจน์เอกลักษณ์เป็นการแสดงให้เห็นว่าจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการเท่ากันจริง โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ การพิสูจน์เอกลักษณ์จึงช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ต่าง ๆ ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติและเอกลักษณ์ที่พิสูจน์แล้วสามารถนำไปอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ ได้

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า $\frac{2\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1}{\cos\theta} = 3\cos\theta$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\frac{2\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1}{\cos\theta} &= \frac{2\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) + 1}{\cos\theta} \\ &= \frac{2\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta + 1}{\cos\theta} \\ &= \frac{3\cos^2\theta}{\cos\theta} \\ &= 3\cos\theta\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} &= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} \\ &= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta-1)} \\ &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta} \\ &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \tan\theta\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 4 จงพิสูจน์ว่า $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \cot \frac{\theta}{2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta &= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
 &= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \\
 &= \frac{1 + \cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
 &= \frac{1 + \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right)}{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
 &= \cot \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 5 จงพิสูจน์ว่า $\frac{1 + \sin \theta - \cos 2\theta}{\cos \theta + \sin 2\theta} = \tan \theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + \sin \theta - \cos 2\theta}{\cos \theta + \sin 2\theta} &= \frac{1 + \sin \theta - (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta + (2 \sin \theta \cos \theta)} \\
 &= \frac{\sin \theta + 2 \sin^2 \theta}{\cos \theta + (2 \sin \theta \cos \theta)} \\
 &= \frac{\sin \theta (1 + 2 \sin \theta)}{\cos \theta (1 + 2 \sin \theta)} \\
 &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \tan \theta
 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

จงพิสูจน์ว่า $\sin \alpha - \sin \beta \cos \gamma = \cos \beta \sin \gamma$

วิธีทำ จาก $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ จะได้ $\beta + \gamma = \pi - \alpha$
จะได้ $\sin(\beta + \gamma) = \sin(\pi - \alpha)$

$$\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma = \sin \alpha$$

$$\cos \beta \sin \gamma = \sin \alpha - \sin \beta \cos \gamma$$

$$\text{ดังนั้น } \sin \alpha - \sin \beta \cos \gamma = \cos \beta \sin \gamma \quad \square$$

สมการตรีโกณมิติ

การแก้สมการตรีโกณมิติทำได้ทำนองเดียวกันกับการแก้สมการทั่วไป เช่น สมการเอกซ์โพเนนเชียลหรือสมการลอการิทึม โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อหาคำตอบของสมการ

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ อาจซ้ำกันได้ ดังนั้น ในการหาคำตอบของสมการ ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งแล้ว คำตอบควรจะอยู่ในรูปของค่าทั่วไป

ตัวอย่างที่ 7 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\cos x = \frac{1}{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ เนื่องจากค่าของ x ในช่วง $(0, \frac{\pi}{2})$ ที่ทำให้ $\cos x = \frac{1}{2}$ คือ

$$\frac{\pi}{3} \text{ เพียงค่าเดียว}$$

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\left\{ \frac{\pi}{3} \right\} \quad \square$

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $\sin \theta = \frac{1}{2}$

วิธีทำ ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi]$ ที่ทำให้ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$

$$\text{เนื่องจาก } \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{และ } \sin\left(2n\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{Z}$$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{6}$

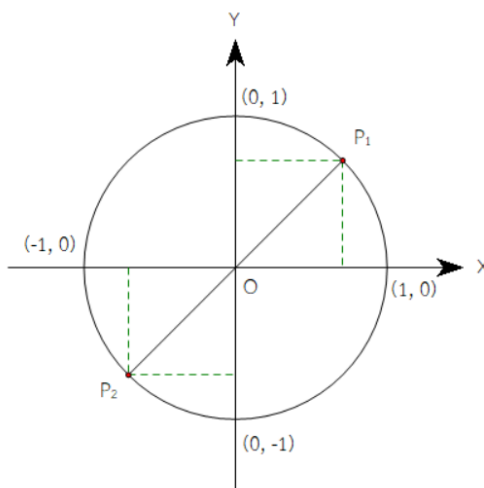
และ $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม \square

ตัวอย่างที่ 9 จงแก้สมการ $\tan \theta = 1$

วิธีทำ จาก $\tan \theta = 1$

$$\text{จะได้ } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$$

$$\sin \theta = \cos \theta$$



จากรูป ถ้า $\sin \theta = \cos \theta$ แสดงว่าจุด P_1 และ P_2 มีพิกัดแรกและพิกัดที่สองเท่ากัน

นั่นคือ $x = \frac{\pi}{4}$ และ $x = \frac{5\pi}{4}$

ดังนั้น ค่าค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{4}$

และ $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

□

ตัวอย่างที่ 10 จงแก้สมการ $2\sin^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$ เมื่อ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

วิธีทำ

$$2\sin^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$$

$$2(1 - \cos^2 \theta) + 3\cos \theta - 3 = 0$$

$$2 - 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$$

$$2\cos^2 \theta - 3\cos \theta + 1 = 0$$

$$(2\cos \theta - 1)(\cos \theta - 1) = 0$$

นั่นคือ $\cos \theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\cos \theta = 1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ]$ ที่ทำให้ $\cos \theta = \frac{1}{2}$ คือ 60°

และ 300°

และ ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ]$ ที่ทำให้ $\cos \theta = 1$ คือ 0°

และ 360°

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ]$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง

คือ $0^\circ, 60^\circ, 300^\circ$ และ 360°

□

ตัวอย่างที่ 11 จงแก้สมการ $\sin 5\theta \cos 3\theta - \cos 5\theta \sin 3\theta = \cos \theta$

เมื่อ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

วิธีทำ

จาก $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

จะได้ $\sin 5\theta \cos 3\theta - \cos 5\theta \sin 3\theta = \sin(5\theta - 3\theta)$

$$= \sin 2\theta$$

จาก $\sin 5\theta \cos 3\theta - \cos 5\theta \sin 3\theta = \cos \theta$

จะได้ $\sin 2\theta = \cos \theta$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \cos \theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta (2 \sin \theta - 1) = 0$$

นั่นคือ $\cos \theta = 0$ หรือ $\sin \theta = \frac{1}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ]$ ที่ทำให้ $\cos \theta = 0$ คือ 90°

และ 270°

และ ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ]$ ที่ทำให้ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ คือ 30°

และ 150°

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ]$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง

คือ $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$ และ 270°

□



ใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

- 1) ใช้การคิดในแก้ปัญหาการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้
- 2) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. รับใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”
2. ให้นักเรียนจับฉลากหมายเลขข้อที่ได้รับมอบหมายกลุ่มละ 1 ข้อ
3. ให้นักเรียนระดมความคิดในการแก้ปัญหาโจทย์โดยใช้ความรู้เรื่อง “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”
4. นักเรียนแต่ละกลุ่มออกนำเสนอวิธีทำโจทย์ของกลุ่มและบันทึกแลกเปลี่ยนเรียนรู้ลงในใบงาน
5. นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ แสดงความคิดเห็นและตอบคำถามเพิ่มเติม

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที

ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....

กลุ่มที่ 1	โจทย์ จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin 2A + \sin A}{\cos 2A + \cos A + 1} = \tan A$	
	เอกลักษณ์	

ข้อที่ 2	โจทย์ จงพิสูจน์ว่า $\frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$	
วิธีทำ	เอกลักษณ์	

ข้อที่ 3	โจทย์ จงพิสูจน์ว่า $\frac{1-\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{1-\sin A} = 2\sec A$	
วิธีทำ	เอกลักษณ์	

ข้อที่ 4	โจทย์ จงพิสูจน์ว่า $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$	
วิธีทำ	เอกลักษณ์	

ข้อที่ 5	โจทย์ จงแก้สมการ $\cos^2 \theta + \cos \theta = \sin^2 \theta$ เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$	
วิธีทำ	เอกลักษณ์	

ข้อที่ 6	โจทย์ จงแก้สมการ $3\sec \theta - \cos \theta + 2 = 0$ เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$	
วิธีทำ	เอกลักษณ์	

ข้อที่ 7	โจทย์ จงแก้สมการ $2\cos^2\theta + 2\cos 2\theta = 1$ เมื่อ $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$	
วิธีทำ	เอกลักษณ์	

ข้อที่ 8	โจทย์ จงแก้สมการ $4\operatorname{cosec}\theta - 4\sin\theta = 2\sqrt{2}\cot\theta$ เมื่อ $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$	
วิธีทำ	เอกลักษณ์	

เฉลยใบงาน “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”

กลุ่มที่ 1	โจทย์ จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sin 2A + \sin A}{\cos 2A + \cos A + 1} = \tan A$	
$\begin{aligned} \frac{\sin 2A + \sin A}{\cos 2A + \cos A + 1} &= \frac{2 \sin A \cos A + \sin A}{2 \cos^2 A - 1 + \cos A + 1} \\ &= \frac{\sin A (2 \cos A + 1)}{2 \cos^2 A + \cos A} \\ &= \frac{\sin A (2 \cos A + 1)}{\cos A (2 \cos A + 1)} \\ &= \frac{\sin A}{\cos A} \\ &= \tan A \end{aligned}$	<p style="text-align: center;">เอกลักษณ์</p> $\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \end{aligned}$	

ข้อที่ 2	โจทย์ จงพิสูจน์ว่า $\frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$	
$\begin{aligned} &\frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\sin A}{1 - \cot A} \\ &= \frac{\cos A}{1 - \frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}} \\ &= \frac{\cos A}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A} \\ &= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} - \frac{\sin^2 A}{\cos A - \sin A} \\ &= \frac{(\cos A - \sin A)(\cos A + \sin A)}{\cos A - \sin A} \\ &= \cos A + \sin A \end{aligned}$	<p style="text-align: center;">เอกลักษณ์</p> $\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$	

ข้อที่ 3	โจทย์ จงพิสูจน์ว่า $\frac{1-\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{1-\sin A} = 2\sec A$
$\begin{aligned} & \frac{1-\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{1-\sin A} \\ &= \frac{(1-\sin A)(1-\sin A) + \cos^2 A}{\cos A(1-\sin A)} \\ &= \frac{1-2\sin A + \sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A(1-\sin A)} \\ &= \frac{1-2\sin A + 1}{\cos A(1-\sin A)} \\ &= \frac{2-2\sin A}{\cos A(1-\sin A)} \\ &= \frac{2(1-\sin A)}{\cos A(1-\sin A)} \\ &= \frac{2}{\cos A} \\ &= 2\sec A \end{aligned}$	<p style="text-align: center;">เอกลักษณ์</p> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

ข้อที่ 4	โจทย์ จงพิสูจน์ว่า $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$
$\begin{aligned} \cot A - \tan A &= \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\cos A} \\ &= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin A \cos A} \\ &= \frac{2(\cos^2 A - \sin^2 A)}{2 \sin A \cos A} \\ &= \frac{2 \cos 2A}{\sin 2A} \\ &= 2\cot 2A \end{aligned}$	<p style="text-align: center;">เอกลักษณ์</p> $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

ข้อที่ 5	โจทย์ จงแก้สมการ $\cos^2 \theta + \cos \theta = \sin^2 \theta$ เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$
<p>จาก $\cos^2 \theta + \cos \theta = \sin^2 \theta$ จะได้ $\cos^2 \theta + \cos \theta = 1 - \cos^2 \theta$ $2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$ $(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$ นั่นคือ $\cos \theta = \frac{1}{2}$ และ $\cos \theta = -1$ ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$ ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = -1$ คือ π ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{3}, \pi$ และ $\frac{5\pi}{3}$</p>	<p>เอกลักษณ์ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$</p>
ข้อที่ 6	โจทย์ จงแก้สมการ $3\sec \theta - \cos \theta + 2 = 0$ เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$
<p>จาก $3\sec \theta - \cos \theta + 2 = 0$ จะได้ $3\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta + 2 = 0$ $3 - \cos^2 \theta + 2\cos \theta = 0$ $\cos^2 \theta - 2\cos \theta - 3 = 0$ $(\cos \theta - 3)(\cos \theta + 1) = 0$ นั่นคือ $\cos \theta = 3$ และ $\cos \theta = -1$ เนื่องจาก $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ ดังนั้นไม่มีค่า ของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = 3$ และ ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = -1$ คือ π ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำ ให้สมการเป็นจริง คือ π</p>	<p>เอกลักษณ์ $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$</p>

ข้อที่ 7	โจทย์ จงแก้สมการ $2\cos^2\theta + 2\cos 2\theta = 1$ เมื่อ $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$
<p>จาก $2\cos^2\theta + 2\cos 2\theta = 1$ จะได้ $2\cos^2\theta + 2(2\cos^2\theta - 1) = 1$ $2\cos^2\theta + 4\cos^2\theta - 2 = 1$ $6\cos^2\theta - 3 = 0$ $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$ นั่นคือ $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ คือ 45° และ 315° ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ คือ 135° และ 225° ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำ ให้สมการเป็นจริง คือ $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$ และ 315°</p>	<p>เอกลักษณ์ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$</p>

ข้อที่ 8	โจทย์ จงแก้สมการ $4 \operatorname{cosec} \theta - 4 \sin \theta = 2\sqrt{2} \cot \theta$ เมื่อ $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$
<p>จาก $4 \operatorname{cosec} \theta - 4 \sin \theta = 2\sqrt{2} \cot \theta$</p> <p>จะได้ $4 \frac{1}{\sin \theta} - 4 \sin \theta = 2\sqrt{2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$</p> $4 - 4 \sin^2 \theta = 2\sqrt{2} \cos \theta$ $4 - 4(1 - \cos^2 \theta) = 2\sqrt{2} \cos \theta$ $4 - 4 + 4 \cos^2 \theta = 2\sqrt{2} \cos \theta$ $4 \cos^2 \theta - 2\sqrt{2} \cos \theta = 0$ $2 \cos \theta (2 \cos \theta - \sqrt{2}) = 0$ <p>นั่นคือ $\cos \theta = 0$ และ $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$</p> <p>ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = 0$ คือ 90° และ 270°</p> <p>ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ คือ 45° และ 315°</p> <p>ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $45^\circ, 90^\circ, 270^\circ$ และ 315°</p>	<p>เอกลักษณ์</p> $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$



แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- 1) พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- 1) ใช้การแก้ปัญหาในการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้
- 2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้
- 3) ใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

1. จงพิสูจน์ว่า

- 1) $\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = \sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta$
- 2) $\frac{\cos \theta}{\sec \theta} + \frac{\sin \theta}{\operatorname{cosec} \theta} = 1$
- 3) $(\tan \theta + \cot \theta)^2 = \sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta$
- 4) $(\sec \theta - 1)(\sec \theta + 1) = \tan^2 \theta$
- 5) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2$
- 6) $\sin^2 \theta \cot^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1$
- 7) $\frac{\sec \theta}{\operatorname{cosec} \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 \tan \theta$
- 8) $1 - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \sin \theta$
- 9) $\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = \frac{\cot \theta + 1}{\cot \theta - 1}$
- 10) $\sec \theta + \cos \theta + \sin^2 \theta \sec \theta = \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta \tan \theta}$
- 11) $\cos(45^\circ - \theta) - \sin(45^\circ + \theta) = 0$
- 12) $\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan \theta$

$$13) \left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 = 1 - \sin \theta$$

$$14) \tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$$

$$15) \text{ ถ้า } A + B + C = \frac{\pi}{4} \text{ จงพิสูจน์ว่า}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = 1 - \tan A \tan B - \tan A \tan C - \tan B \tan C + \tan A \tan B \tan C$$

2. จงแก้สมการต่อไปนี้ เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$

$$1) 2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 0$$

$$2) 2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$$

$$3) \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$$

$$4) \tan \theta \sin \theta + \tan \theta = 0$$

$$5) 4 \sin^3 \theta - \sin \theta = 0$$

$$6) \cot \theta + 2 \sin \theta = \operatorname{cosec} \theta$$

3. จงหาเซตของสมการต่อไปนี้ เมื่อ $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

$$1) \sin^2 \theta + \sin \theta = 0$$

$$2) 3 \tan^2 \theta - 1 = 0$$

$$3) 4 \tan^2 \theta - 3 \sec^2 \theta = 0$$

$$4) \sin 2\theta + \sin \theta = 0$$

$$5) \sec \theta = \cos \theta - \tan \theta$$

$$6) \sin 5\theta + \sin 3\theta = 0$$

4. จงแก้สมการ

$$1) 4 \sin^2 \theta = 1$$

$$2) 2 \cos^2 \theta + 5 \sin \theta + 1 = 0$$

$$3) \sec^2 \theta - 2 \tan \theta = 0$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ”

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \\
 &= \sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{\cos \theta}{\sec \theta} + \frac{\sin \theta}{\operatorname{cosec} \theta} &= \frac{\cos \theta}{\frac{1}{\cos \theta}} + \frac{\sin \theta}{\frac{1}{\sin \theta}} \\
 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 3) \quad (\tan \theta + \cot \theta)^2 &= (\tan \theta + \cot \theta)(\tan \theta + \cot \theta) \\
 &= \tan^2 \theta + 2 \tan \theta \cot \theta + \cot^2 \theta \\
 &= \tan^2 \theta + 2 + \cot^2 \theta \\
 &= (\tan^2 \theta + 1) + (1 + \cot^2 \theta) \\
 &= \sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 4) \quad (\sec \theta - 1)(\sec \theta + 1) &= \sec^2 \theta + \sec \theta - \sec \theta + 1 \\
 &= \sec^2 \theta - 1 \\
 &= \tan^2 \theta
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 5) \quad (\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\
 &= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
 &= 2(1)
 \end{aligned}$$

$$= 2$$

□

$$\begin{aligned} 6) \quad \sin^2 \theta \cot^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta &= \sin^2 \theta \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned} 7) \quad \frac{\sec \theta}{\cos \sec \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= \frac{\frac{1}{\cos \theta}}{\frac{1}{\sin \theta}} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \tan \theta + \tan \theta \\ &= 2 \tan \theta \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned} 8) \quad 1 - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} &= \frac{1 + \sin \theta - \cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{1 + \sin \theta - (1 - \sin^2 \theta)}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta (1 + \sin \theta)}{1 + \sin \theta} \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned} 9) \quad \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} &= \frac{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta \frac{1}{\sin \theta} + \sin \theta \frac{1}{\sin \theta}}{\cos \theta \frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta \frac{1}{\sin \theta}} \\ &= \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 1}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cot \theta + 1}{\cot \theta - 1}$$

□

$$\begin{aligned}
 10) \sec \theta + \cos \theta + \sin^2 \theta \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta + \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\
 &= \frac{1 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{1 + 1}{\cos \theta} \\
 &= \frac{2}{\cos \theta} \\
 &= \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\
 &= \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta \sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta}} \\
 &= \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\
 &= \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta \tan \theta}
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 11) \cos(45^\circ - \theta) - \sin(45^\circ + \theta) \\
 &= (\cos 45^\circ \cos \theta + \sin 45^\circ \sin \theta) - (\sin 45^\circ \cos \theta + \cos 45^\circ \sin \theta) \\
 &= \cos 45^\circ \cos \theta + \sin 45^\circ \sin \theta - \sin 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 12) \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1 + 2 \cos^2 \theta - 1} \\
 &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta} \\
 &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} \\
 &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \tan \theta
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 13) \quad \left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}\right)^2 &= \left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}\right) \left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2}\right) \\
 &= \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
 &= 1 - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\
 &= 1 - \sin \left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) \\
 &= 1 - \sin \theta
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 14) \quad \tan 3\theta &= \tan(2\theta + \theta) \\
 &= \frac{\tan 2\theta + \tan \theta}{1 - \tan 2\theta \tan \theta} \\
 &= \frac{\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} + \tan \theta}{1 - \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \cdot \tan \theta} \\
 &= \frac{2 \tan \theta + (1 - \tan^2 \theta) \tan \theta}{\frac{1 - \tan^2 \theta}{(1 - \tan^2 \theta) - 2 \tan^2 \theta}} \\
 &= \frac{2 \tan \theta + (1 - \tan^2 \theta) \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \times \frac{1 - \tan^2 \theta}{(1 - \tan^2 \theta) - 2 \tan^2 \theta} \\
 &= \frac{2 \tan \theta + \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} \\
 &= \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}
 \end{aligned}$$

□

15) จาก $A + B + C = \frac{\pi}{4}$ จะได้ $A + B = \frac{\pi}{4} - C$

จะได้ $\tan(A + B) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - C\right)$

นั่นคือ $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan C}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan C}$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{1 - \tan C}{1 + \tan C}$$

$$(\tan A + \tan B)(1 + \tan C) = (1 - \tan C)(1 - \tan A \tan B)$$

$$\tan A + \tan A \tan C + \tan B + \tan B \tan C = 1 - \tan A \tan B - \tan C + \tan A \tan B \tan C$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = 1 - \tan A \tan B - \tan A \tan C - \tan B \tan C + \tan A \tan B \tan C$$

2. 1) จาก $2\cos^2 \theta + \cos \theta = 0$

จะได้ $\cos \theta (2\cos \theta + 1) = 0$

นั่นคือ $\cos \theta = 0$ หรือ $2\cos \theta + 1 = 0$

จะได้ $\cos \theta = 0$ หรือ $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = 0$ คือ $\frac{\pi}{2}$ และ $\frac{3\pi}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{4\pi}{3}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

และ $\frac{3\pi}{2}$

□

2) จาก $2\sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$

จะได้ $(2\sin \theta + 1)(\sin \theta - 1) = 0$

นั่นคือ $2\sin \theta + 1 = 0$ หรือ $\sin \theta - 1 = 0$

จะได้ $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ หรือ $\sin \theta = 1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = 1$ คือ $\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}$

และ $\frac{11\pi}{6}$

□

3) จาก $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$

จะได้ $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = (\sqrt{2})^2$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 2$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = 1$$

นั่นคือ $\sin 2\theta = 1$

จะได้ $2\theta = \frac{\pi}{2}$ หรือ $2\theta = \frac{5\pi}{2}$

นั่นคือ $\theta = \frac{\pi}{4}$ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi)$ หรือ $\theta = \frac{5\pi}{4}$ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi)$

ตรวจคำตอบ

แทน $\theta = \frac{\pi}{4}$ ในสมการ $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$

จะได้ $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \text{เป็นจริง}$$

แทน $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ในสมการ $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$

จะได้ $\sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} = \sqrt{2}$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \text{เป็นเท็จ}$$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{\pi}{4}$

□

4) จาก $\tan \theta \sin \theta + \tan \theta = 0$

จะได้ $\tan \theta (\sin \theta + 1) = 0$

นั่นคือ $\tan \theta = 0$ หรือ $\sin \theta + 1 = 0$

จะได้ $\tan \theta = 0$ หรือ $\sin \theta = -1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\tan \theta = 0$ คือ 0 และ π

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = -1$ คือ $\frac{3\pi}{2}$

แต่เนื่องจาก $\tan \frac{3\pi}{2}$ ไม่นิยาม

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ 0 และ π \square

5) จาก $4\sin^3 \theta - \sin \theta = 0$

จะได้ $\sin \theta (4\sin^2 \theta - 1) = 0$

นั่นคือ $\sin \theta = 0$ หรือ $4\sin^2 \theta - 1 = 0$

จะได้ $\sin \theta = 0$ หรือ $\sin^2 \theta = \frac{1}{4}$

$$\sin \theta = 0 \text{ หรือ } \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\sin \theta = 0 \text{ หรือ } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ หรือ } \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = 0$ คือ 0 และ π

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$

และ ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, π , $\frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$ \square

6) จาก $\cot \theta + 2\sin \theta = \operatorname{cosec} \theta$

จะได้ $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 2\sin \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ เมื่อ $\sin \theta \neq 0$

$$\cos \theta + 2\sin^2 \theta = 1$$

$$\cos \theta + 2(1 - \cos^2 \theta) = 1$$

$$\cos \theta + 2 - 2\cos^2 \theta = 1$$

$$2\cos^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$$

$$(2\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) = 0$$

นั่นคือ $2\cos \theta + 1 = 0$ หรือ $\cos \theta - 1 = 0$

จะได้ $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ หรือ $\cos \theta = 1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{4\pi}{3}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = 1$ คือ 0

แต่เนื่องจาก $\sin \theta \neq 0$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\frac{2\pi}{3}$ และ $\frac{4\pi}{3}$ \square

3. 1) จาก $\sin^2 \theta + \sin \theta = 0$
 จะได้ $\sin \theta (\sin \theta + 1) = 0$
 นั่นคือ $\sin \theta = 0$ หรือ $\sin \theta + 1 = 0$
 จะได้ $\sin \theta = 0$ หรือ $\sin \theta = -1$
 ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = 0$ คือ 0° และ 180°
 ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = -1$ คือ 270°
 ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{0^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$ □
- 2) จาก $3 \tan^2 \theta - 1 = 0$
 จะได้ $\tan^2 \theta = \frac{1}{3}$

$$\tan \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$
 นั่นคือ $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ หรือ $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
 ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ 30° และ 210°
 ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ 150° และ 330°
 ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$ □
- 3) จาก $4 \tan^2 \theta - 3 \sec^2 \theta = 0$
 จะได้ $4 \tan^2 \theta - 3(1 + \tan^2 \theta) = 0$

$$4 \tan^2 \theta - 3 - 3 \tan^2 \theta = 0$$

$$\tan^2 \theta - 3 = 0$$

$$\tan^2 \theta = 3$$

$$\tan \theta = \pm \sqrt{3}$$
 นั่นคือ $\tan \theta = \sqrt{3}$ หรือ $\tan \theta = -\sqrt{3}$
 ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\tan \theta = \sqrt{3}$ คือ 60° และ 240°
 ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\tan \theta = -\sqrt{3}$ คือ 120° และ 300°

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ\}$ □

4) จาก $\sin 2\theta + \sin \theta = 0$

จะได้ $2\sin \theta \cos \theta + \sin \theta = 0$

$$\sin \theta (2\cos \theta + 1) = 0$$

นั่นคือ $\sin \theta = 0$ หรือ $2\cos \theta + 1 = 0$

จะได้ $\sin \theta = 0$ หรือ $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = 0$ คือ 0° และ 180°

ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ คือ 120° และ 240°

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{0^\circ, 180^\circ, 120^\circ, 240^\circ\}$ □

5) จาก $\sec \theta = \cos \theta - \tan \theta$

จะได้ $\frac{1}{\cos \theta} = \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ เมื่อ $\cos \theta \neq 0$

$$1 = \cos^2 \theta - \sin \theta$$

$$1 = (1 - \sin^2 \theta) - \sin \theta$$

$$\sin^2 \theta + \sin \theta = 1 - 1$$

$$\sin^2 \theta + \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta (\sin \theta + 1) = 0$$

จะได้ $\sin \theta = 0$ หรือ $\sin \theta + 1 = 0$

นั่นคือ $\sin \theta = 0$ หรือ $\sin \theta = -1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = 0$ คือ 0° และ 180°

ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = -1$ คือ 270°

แต่เนื่องจาก $\cos \theta \neq 0$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{0^\circ, 180^\circ\}$ □

6) จาก $\sin 5\theta + \sin 3\theta = 0$
 จะได้ $2\sin\left(\frac{5\theta+3\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{5\theta-3\theta}{2}\right) = 0$
 $2\sin 4\theta \cos \theta = 0$
 นั่นคือ $\sin 4\theta = 0$ หรือ $\cos \theta = 0$
 ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\sin 4\theta = 0$ คือ $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ,$
 $180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$ และ 315°
 ค่าของ θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\cos \theta = 0$ คือ 90° และ 270°
 ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ
 $\{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ\}$ □

4. 1) จาก $4\sin^2 \theta = 1$
 จะได้ $\sin^2 \theta = \frac{1}{4}$
 $\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$
 นั่นคือ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\sin \theta = -\frac{1}{2}$
 ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$
 ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$
 ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $n\pi - \frac{\pi}{6}$ และ $n\pi + \frac{\pi}{6}$
 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม □

2) จาก $2\cos^2 \theta + 5\sin \theta + 1 = 0$
 จะได้ $2(1 - \sin^2 \theta) + 5\sin \theta + 1 = 0$
 $2 - 2\sin^2 \theta + 5\sin \theta + 1 = 0$
 $2\sin^2 \theta - 5\sin \theta - 3 = 0$
 $(2\sin \theta + 1)(\sin \theta - 3) = 0$

นั่นคือ $2\sin\theta + 1 = 0$ หรือ $\sin\theta - 3 = 0$

จะได้ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ หรือ $\sin\theta = 3$

ไม่นิยามเนื่องจาก $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ คือ $\frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{7\pi}{6}$ และ $2n\pi + \frac{11\pi}{6}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

□

3) จาก $\sec^2\theta - 2\tan\theta = 0$

จะได้ $(1 + \tan^2\theta) - 2\tan\theta = 0$

$$\tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0$$

$$(\tan\theta - 1)(\tan\theta - 1) = 0$$

นั่นคือ $\tan\theta - 1 = 0$

จะได้ $\tan\theta = 1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi)$ ที่ทำให้ $\tan\theta = 1$ คือ $\frac{\pi}{4}$ และ $\frac{5\pi}{4}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ และ $2n\pi + \frac{5\pi}{4}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

□

เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1. พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 13 – 15 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 10 - 12 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 - 9 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ ต่ำกว่า 6 ข้อ หรือ มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2

เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้การแก้ปัญหาในการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 2 - ข้อ 3 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 10 - 12 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 2 - ข้อ 3 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 9 - 11 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 2 - ข้อ 3 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 6 - 8 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 2 - ข้อ 3 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ต่ำกว่า 6 ข้อหรือมีร่องรอยของความพยายามในการแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 2 - ข้อ 3 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	สามารถเขียนแสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 13 - 15 ข้อ	สามารถเขียนแสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 10 - 12 ข้อ	สามารถเขียนแสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 - 9 ข้อ	สามารถเขียนแสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ ต่ำกว่า 6 ข้อ หรือมีร่องรอยของความพยายามในการเขียนแสดงการพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
3) ใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	สามารถใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 13 – 15 ข้อ	สามารถใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 10 – 12 ข้อ	สามารถใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 – 9 ข้อ	สามารถใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ ต่ำกว่า 6 ข้อ หรือมีร่องรอยของความพยายามในการใช้เหตุผลในการพิสูจน์เอกลักษณ์ในแบบฝึกหัดที่ 9 “เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ” ข้อ 1 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

การแปลงผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

--	--	--	--	--	--	--	--

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ : บริษัท ธนัชการพิมพ์ จำกัด.
- พิชิต ฤทธิ์จัญญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : แฮสออฟ เคอร์มิสท์.
- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ**. พระนครศรีอยุธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.
- ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฏานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-NET คณิตศาสตร์ ม.6**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์**.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**. พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 5. กทม. : ประสานการพิมพ์.
- อนุวัติ คุณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.