



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 16

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระการเรียนรู้ ทดสอบหลังเรียน

ภาคเรียนที่ 1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เวลา 2 ชั่วโมง

1. ผลการเรียนรู้

-

2. สาระการเรียนรู้

ทดสอบหลังเรียน

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ได้

4.1.2 บอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้

4.1.3 หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้

4.1.4 เขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้

4.1.5 หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้

4.1.6 หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงใด ๆ ได้

4.17 เปลี่ยนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศาหรือมุมที่มีหน่วยเป็นองศาเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนได้

4.1.8 หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้

4.1.9 เขียนกราฟของกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

4.1.10 หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์จากกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

4.1.11 หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

4.1.12 แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

4.1.13 หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.1.14 แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.1.15 พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.1.16 แก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.1.17 ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้

4.1.18 ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้

4.1.19 นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาระยะทางและความสูงได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

-

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

-

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

-

5. เนื้อหา/สาระ

5.1 วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

5.2 วัดความพึงพอใจต่อการเรียนรู้ เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ได้ 2) บอกตำแหน่งของจุดปลาย ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้ 3) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์ของจำนวนจริงบาง จำนวนได้ 4) เขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ จำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้ 5) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้ 6) หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุก ฟังก์ชันของจำนวนจริงใด ๆ ได้ 7) เปลี่ยนขนาดของมุมที่มีหน่วย เป็นเรเดียนเป็นมุมที่มีหน่วย เป็นองศาหรือมุมที่มีหน่วยเป็น องศาเป็นมุมที่มีหน่วยเป็น เรเดียนได้ 8) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ มุมที่กำหนดให้ได้ 9) เขียนกราฟของกราฟของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ 10) หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์จาก กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้	ตรวจแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียน เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	แบบทดสอบวัด ผลสัมฤทธิ์ทางการ เรียน เรื่อง ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ	นักเรียนมีคะแนนสอบ ร้อยละ 60 ขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
11) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้ 12) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้ 13) หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้ 14) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้ 15) พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้ 16) แก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้ 17) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้ 18) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้ 19) นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาระยะทางและความสูงได้			
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ -	-	-	-
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ -	-	-	-
ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน -	-	-	-

7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

7.1 ครูแจ้งผลเก็บคะแนนระหว่างเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมให้นักเรียนทราบ สำหรับนักเรียนที่ได้คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากเอกสารประกอบการจัดการเรียนรู้โดยใช้การสอนแบบนิรนัย การเรียนแบบร่วมมือร่วมกับการใช้สื่อ The Geometer's Sketchpad เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อการสอบซ่อมเสริมต่อไป

7.2 ครูให้นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยย้ำ ให้นักเรียนทำแบบทดสอบ ด้วยความซื่อสัตย์และตั้งใจทำ โดยใช้เวลา 90 นาที

7.3 หลังสอบเสร็จครูซักถามนักเรียนว่า “นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ มาใช้ในการทำแบบทดสอบได้หรือไม่” และมีเรื่องใดที่นักเรียนคิดว่ายังเป็นปัญหา ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมหรือทบทวนจากเอกสารที่ได้รับหรือสื่อประกอบการจัดการเรียนรู้โดยใช้การสอนแบบนิรนัย การเรียนแบบร่วมมือร่วมกับการใช้สื่อ The Geometer's Sketchpad เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

7.4 ครูบอกนักเรียนว่า “นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไปใช้ในการเรียนระดับมหาวิทยาลัยหรือนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันต่อไปได้”

7.5 ครูให้นักเรียนทุกคนตอบแบบความพึงพอใจต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยประกอบการจัดการเรียนรู้โดยใช้การสอนแบบนิรนัย การเรียนแบบร่วมมือร่วมกับการใช้สื่อ The Geometer's Sketchpad เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนทับปุดวิทยา จังหวัดพังงา

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	-	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้ - ประเมินความรู้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทั้ง ฉบับ ตามเกณฑ์ร้อยละ 60				
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ -				
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน -				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางวาสนา ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้บริหารโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา



แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ”
รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201 ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจง

- 1) ข้อสอบฉบับนี้เป็นข้อสอบแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 25 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน ใช้เวลาทำข้อสอบ 90 นาที
- 2) ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวแล้วทำเครื่องหมาย (X) ลงในกระดาษคำตอบ
- 3) ให้นักเรียนเขียนชื่อในกระดาษทดแล้วส่งพร้อมกับกระดาษคำตอบ
- 4) ห้ามใช้เครื่องคำนวณ โทรศัพท์มือถือในขณะทำแบบทดสอบ

ผลการเรียนรู้

- 1) เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 2) แก้สมการตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
- 3) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

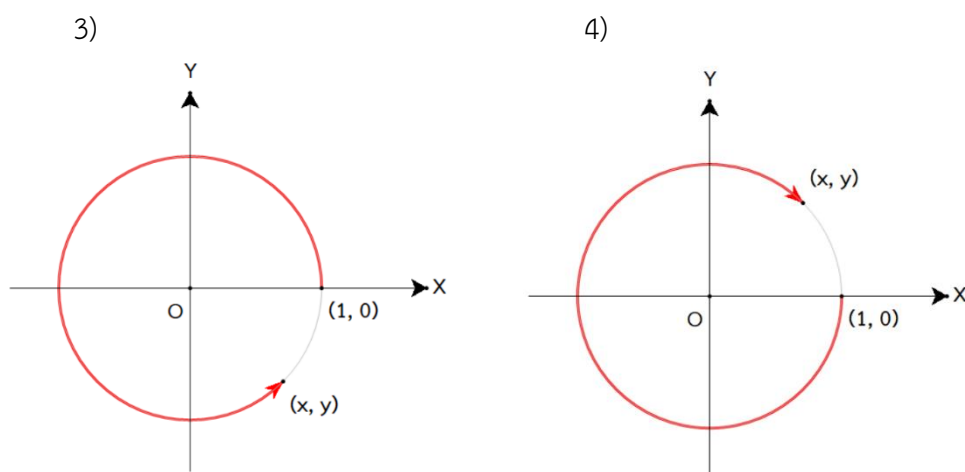
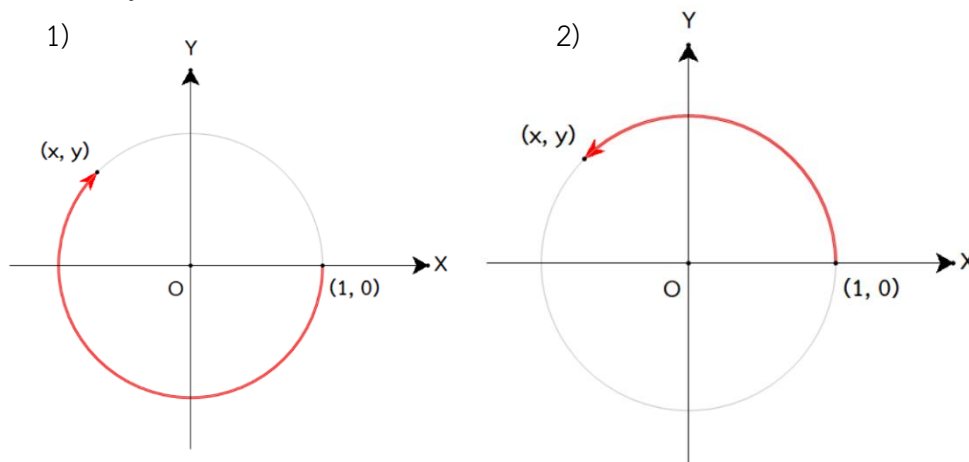
จุดประสงค์การเรียนรู้ หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ เมื่อกำหนดความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้ได้

1. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี C เป็นมุมฉาก ถ้ามุม A เท่ากับ 60° และ $AB = 5$ หน่วยแล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใด

2) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ ตารางหน่วย	2) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ตารางหน่วย
3) $\frac{25\sqrt{3}}{8}$ ตารางหน่วย	4) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ ตารางหน่วย

จุดประสงค์การเรียนรู้ บอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย
เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้

2. จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง $\theta = -\frac{7\pi}{4}$
ตรงกับรูปในข้อใด



จุดประสงค์การเรียนรู้ หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้

3. ค่าของ $\frac{\sin(-2\pi) + \cos \pi}{\cos(-3\pi) - \sin 5\pi} + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ เท่ากับข้อใด

- 1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

จุดประสงค์การเรียนรู้ เขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้

4. ข้อใดไม่ถูกต้อง

1) $\cos \frac{17\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}$

2) $\sin \frac{14\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3}$

3) $\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$

4) $\sin\left(-\frac{37\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้

5. ค่าของ $\frac{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos \frac{\pi}{4}}{\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \cos \frac{3\pi}{4}}$ เท่ากับข้อใด

1) -1

2) 1

3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงใด ๆ ได้

6. ถ้ากำหนดให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\operatorname{cosec} \theta = 1.25$ ข้อใดเป็นค่าของ $\tan \theta + \cot \theta$

1) $\frac{25}{12}$

2) $\frac{36}{12}$

3) $\frac{7}{25}$

4) $\frac{12}{25}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ เปลี่ยนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศาหรือมุมที่มีหน่วยเป็นองศาเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนได้

7. ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

1) มุม 415 องศา เท่ากับ $\frac{83\pi}{32}$ เรเดียน

2) มุม $\frac{8\pi}{12}$ เรเดียน เท่ากับ 115 องศา

3) มุม 520 องศา เท่ากับ $\frac{26\pi}{9}$ เรเดียน

4) มุม $\frac{11\pi}{15}$ เรเดียน เท่ากับ 131 องศา

จุดประสงค์การเรียนรู้ หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้

8. ค่าของ $\frac{\sin(-210^\circ) + \sec^2 225^\circ}{\cot 300^\circ}$ เท่ากับข้อใด

1) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

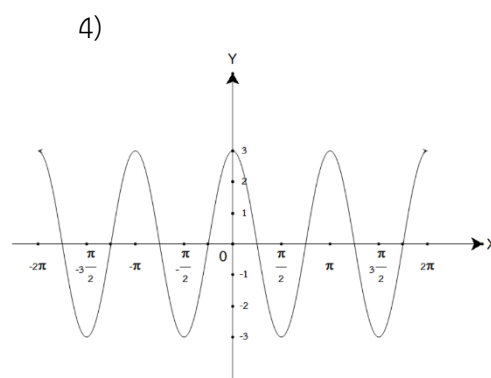
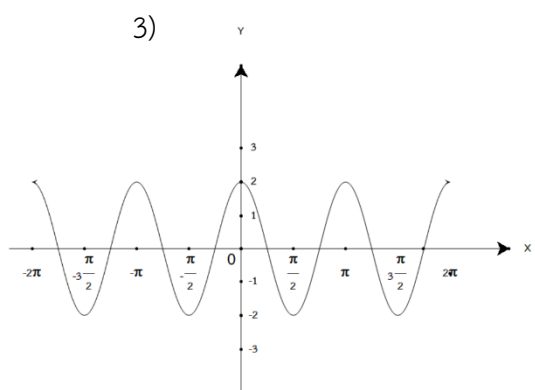
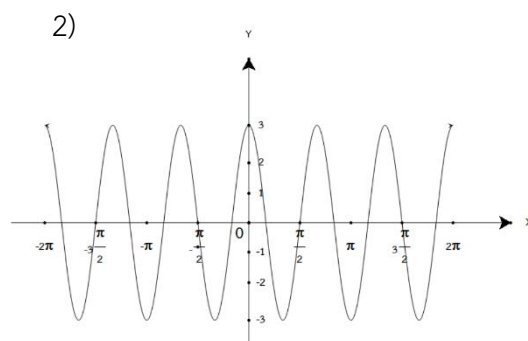
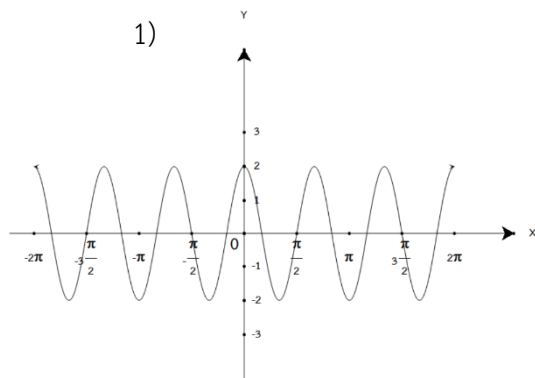
2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

3) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$

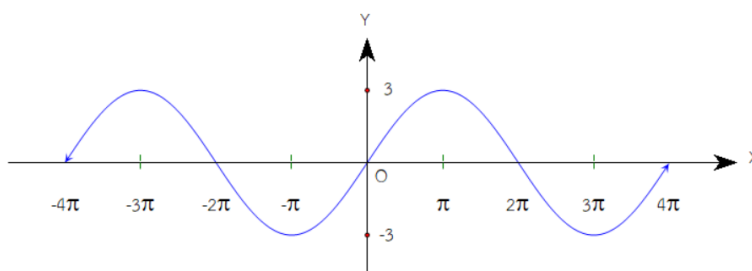
จุดประสงค์การเรียนรู้ เขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

9. ข้อใดเป็นกราฟของฟังก์ชัน $y = 3\cos 2x$



จุดประสงค์การเรียนรู้ หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์จากกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

10. กำหนดกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังรูป ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง



1) แอมพลิจูดของฟังก์ชัน คือ 3

2) เรนจ์ฟังก์ชัน คือ $[-3, 3]$

3) คาบของฟังก์ชัน คือ 2π

4) กราฟของฟังก์ชัน $y = 3\sin \frac{x}{2}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

11. ถ้ากำหนดให้ A เป็นค่าของ $\cos 37^\circ \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \sin 23^\circ$ และ B เป็นค่าของ $\sin 112^\circ \cos 68^\circ + \sin 68^\circ \cos 112^\circ$ แล้วค่าของ A + B เท่ากับข้อใด
- 1) 0 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) 2

จุดประสงค์การเรียนรู้ แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

12. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$(1) \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B \qquad (2) \frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A} = 2$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ข้อ (1) และข้อ (2) ถูกต้อง
 2) ข้อ (1) ไม่ถูกต้องแต่ข้อ (2) ถูกต้อง
 3) ข้อ (1) ถูกต้องแต่ข้อ (2) ไม่ถูกต้อง
 4) ข้อ (1) และข้อ (2) ไม่ถูกต้อง

จุดประสงค์การเรียนรู้ หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

13. ค่าของ $\sin(\arctan(-\frac{4}{3}) + \arccos(\frac{5}{13}))$

- 1) $\frac{16}{65}$ 2) $\frac{33}{65}$ 3) $\frac{63}{65}$ 4) $\frac{79}{65}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

14. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$(1) \arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ เมื่อ } 0 \leq x \leq 1$$

$$(2) \sin(\frac{\pi}{2} + 2\arccos \frac{x}{2}) = \frac{x^2}{2} - 1 \text{ เมื่อ } 0 \leq x \leq 1$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ข้อ (1) และข้อ (2) ถูกต้อง
 2) ข้อ (1) ไม่ถูกต้องแต่ข้อ (2) ถูกต้อง
 3) ข้อ (1) ถูกต้องแต่ข้อ (2) ไม่ถูกต้อง
 4) ข้อ (1) และข้อ (2) ไม่ถูกต้อง

จุดประสงค์การเรียนรู้ พิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

15. $\frac{\cos A}{1-\sin A}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1) $\frac{1+\sin A}{\cos A}$

2) $\frac{1-\sin A}{\cos A}$

3) $\tan A - \sec A$

4) $\tan A + \sec A$

จุดประสงค์การเรียนรู้ แก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

16. ค่า x จากสมการ $\tan x - \cot x = \operatorname{cosec} x$ เมื่อ $x \in [0, 2\pi]$ คือเซตคำตอบในข้อใด

1) $\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

2) $\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$

2) $\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi\}$

4) $\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ ใช้กฎของโคไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้

17. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี $a = 7$, $b = 5$ และ $c = 3$ แล้ว มุมที่ใหญ่ที่สุดจะวางกึ่งกลาง

1) 110°

2) 120°

3) 135°

4) 150°

จุดประสงค์การเรียนรู้ ใช้กฎของไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้

18. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีด้าน a ยาว 2 หน่วย ด้าน c ยาว $\sqrt{6}$ และมุม C มีขนาด 60° องศา แล้ว มุม A มีขนาดเท่ากับข้อใด

1) 45°

2) 135°

3) 45° หรือ 135°

4) 45° และ 135°

19. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี มุม B เป็น 30° องศา c เท่ากับ 150 หน่วย และ b เท่ากับ $50\sqrt{3}$ หน่วย ข้อใดต่อไปนี้สรุปถูกต้อง

1) รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

2) รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

3) รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

4) รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วและรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

จุดประสงค์การเรียนรู้ นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาระยะทางและความสูงได้

20. เสือยืนอยู่ทางทิศตะวันตกของเสาธงมองยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60 องศา และสิ่งที่ยืนทางใต้ของเสาธงมองยอดเสาธงเป็นมุมเงย 30 องศา ถ้าเสาธงสูง 150 ฟุต เสือกับสิ่งที่ยืนห่างกันเท่าใด

1) $100 + \sqrt{3}$ ฟุต

2) $100\sqrt{2}$ ฟุต

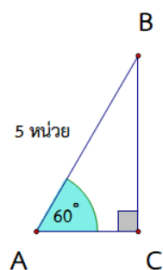
3) $200\sqrt{3}$ ฟุต

4) $100\sqrt{6}$ ฟุต

เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

1. ตอบ ข้อ 3)

จากโจทย์สามารถเขียนรูปได้ดังนี้



จะได้ $\sin 60^\circ = \frac{BC}{AB}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{5}$$

นั่นคือ $BC = 5 \frac{\sqrt{3}}{2}$ หน่วย

และ $\cos 60^\circ = \frac{AC}{AB}$

$$\frac{1}{2} = \frac{AC}{5}$$

นั่นคือ $AC = \frac{5}{2}$ หน่วย

ดังนั้น พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \times BC \times AC$

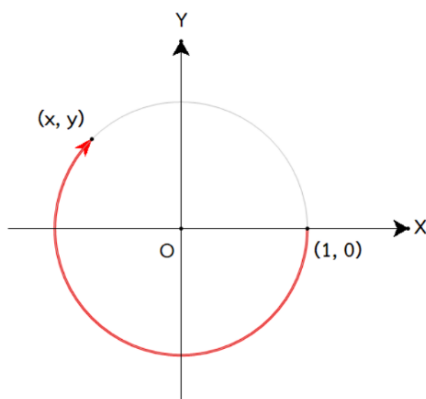
$$= \frac{1}{2} \times 5 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{5}{2}$$

$$= \frac{25\sqrt{3}}{8} \quad \text{ตารางหน่วย}$$

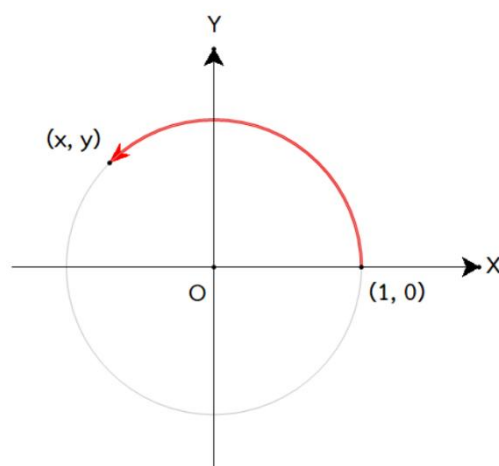
2. ตอบ ข้อ 4)

จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

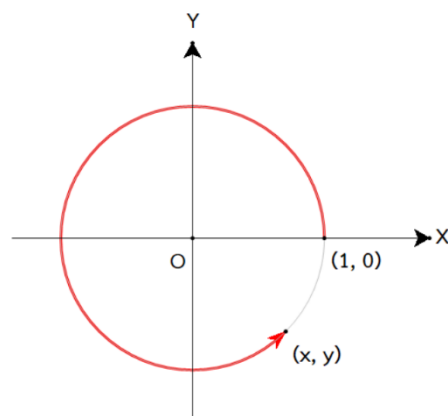
1)



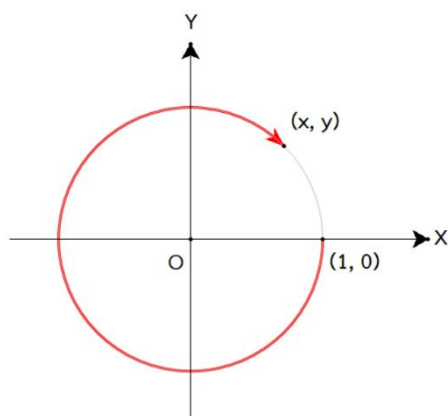
2) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง $\theta = \frac{3\pi}{4}$



3) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง $\theta = \frac{7\pi}{4}$



4) จุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง $\theta = -\frac{7\pi}{4}$



3. ตอบ ข้อ 3)

จากโจทย์หาค่า $\sin(-2\pi)=0$, $\cos\pi=-1$, $\cos(-3\pi)=-1$, $\sin5\pi=0$,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1 \text{ และ } \cos\frac{3\pi}{2}=0$$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \frac{\sin(-2\pi)+\cos\pi}{\cos(-3\pi)-\sin5\pi} + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ = \frac{0+(-1)}{(-1)-0} + (-1)^2 + 0^2 \\ = 1+1 \\ = 2 \end{aligned}$$

4. ตอบ ข้อ 2)

$$1) \text{ จะได้ } \cos\frac{17\pi}{6} = \cos(2\pi + \frac{5\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6}$$

นั่นคือ ข้อ 1) ถูกต้อง

$$2) \text{ จะได้ } \sin\frac{14\pi}{3} = \sin(4\pi + \frac{2\pi}{3}) = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3}$$

นั่นคือ ข้อ 2) ไม่ถูกต้อง

$$\begin{aligned} 3) \text{ จะได้ } \cos(-\frac{23\pi}{4}) &= \cos\frac{23\pi}{4} = \cos(4\pi + \frac{7\pi}{4}) = \cos\frac{7\pi}{4} \\ &= \cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

นั่นคือ ข้อ 3) ถูกต้อง

$$\begin{aligned} 4) \text{ จะได้ } \sin(-\frac{37\pi}{4}) &= -\sin\frac{37\pi}{4} = -\sin(8\pi + \frac{5\pi}{4}) = -\sin\frac{5\pi}{4} \\ &= -\sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -(-\sin\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

นั่นคือ ข้อ 4) ถูกต้อง

5. ตอบ ข้อ 2)

$$\text{จากโจทย์หาค่า } \sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{และ } \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{\sin(-\frac{2\pi}{3}) + \cos\frac{\pi}{4}}{\cos(-\frac{5\pi}{6}) - \cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}}{-\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{2}{-\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\
 &= \frac{2}{-\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{2}}{-\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\
 &= \frac{-2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(-\sqrt{3} + \sqrt{2})(-\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\
 &= \frac{-2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(-\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\
 &= \frac{-2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} \\
 &= -2(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\sin(-\frac{2\pi}{3}) + \cos\frac{\pi}{4}}{\cos(-\frac{5\pi}{6}) - \cos\frac{3\pi}{4}}$ เท่ากับ 1

6. ตอบ ข้อ 1)

จาก $\operatorname{cosec} \theta = 1.25$

จะได้ $\operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{4}$

นั่นคือ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

เนื่องจาก $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

จะได้ $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

นั่นคือ $\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

เนื่องจาก $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะอยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้ $\cos \theta = \frac{3}{5}$

ดังนั้น $\sin \theta = \frac{4}{5}$ และ $\cos \theta = \frac{3}{5}$

หาค่า $\tan \theta + \cot \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} + \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{3}{4} \\
 &= \frac{16}{12} + \frac{9}{12} \\
 &= \frac{25}{12}
 \end{aligned}$$

7. ตอบ ข้อ 3)

จากมุม 415 องศา เท่ากับ $415 \times \frac{\pi}{180} = \frac{83\pi}{36}$ เรเดียน จะได้ว่า ข้อ 1) ไม่ถูกต้อง

จากมุม $\frac{8\pi}{12}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{8\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = 120$ องศา จะได้ว่า ข้อ 2) ไม่ถูกต้อง

จากมุม 520 องศา เท่ากับ $520 \times \frac{\pi}{180} = \frac{26\pi}{9}$ เรเดียน จะได้ว่า ข้อ 3) ถูกต้อง

จากมุม $\frac{11\pi}{15}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{11\pi}{15} = \frac{11\pi}{15} \times \frac{180}{\pi} = 132$ องศา ข้อ 4) ไม่ถูกต้อง

8. ตอบ ข้อ 1)

จากโจทย์หาค่า

$$\sin(-210^\circ) = -\sin 210^\circ = -\sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \sec 225^\circ &= \frac{1}{\cos 225^\circ} = \frac{1}{\cos(180^\circ + 45^\circ)} = \frac{1}{-\cos 45^\circ} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot(300^\circ) &= \frac{\cos 300^\circ}{\sin 300^\circ} = \frac{\cos(360^\circ - 60^\circ)}{\sin(360^\circ - 60^\circ)} = \frac{\cos 60^\circ}{-\sin 60^\circ} \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{-\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

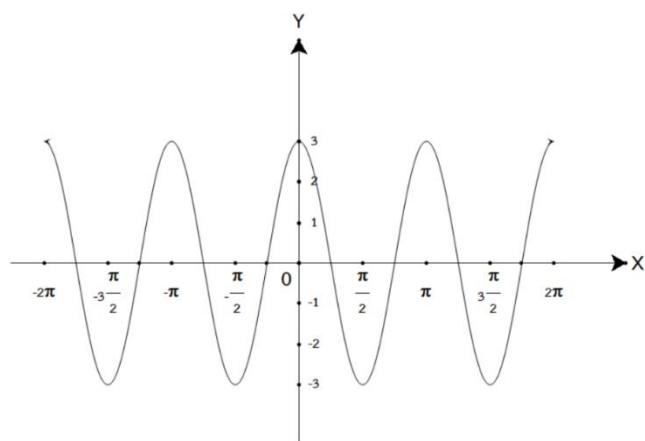
แทนค่าในโจทย์จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin(-210^\circ) + \sec^2 225^\circ}{\cot 300^\circ} &= \frac{-\frac{1}{2} + (-\sqrt{2})^2}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2} + 2}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\sin(-210^\circ) + \sec^2 225^\circ}{\cot 300^\circ}$ เท่ากับ $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

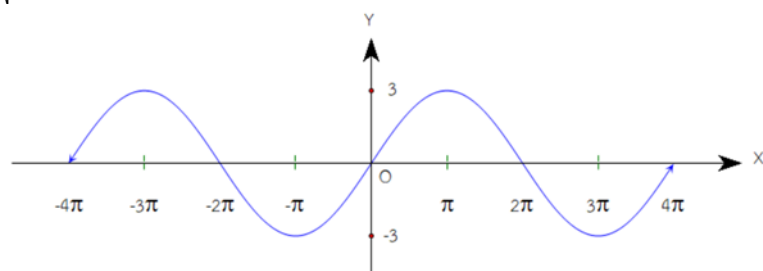
9. ตอบ ข้อ 4)

จากฟังก์ชัน $y = 3\cos 2x$ เขียนกราฟได้ดังต่อไปนี้



10. ตอบ ข้อ 3)

จากกราฟ



จะได้ แอมพลิจูด คือ 3 ข้อ 1) ถูกต้อง

เรนจ์ คือ $[-3, 3]$ ข้อ 2) ถูกต้อง

คาบ คือ 4π ข้อ 3) ไม่ถูกต้อง

และกราฟเป็นกราฟของฟังก์ชัน $y = 3\sin\frac{x}{2}$ ข้อ 4) ถูกต้อง

11. ตอบ ข้อ 2)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ว่า } \cos 37^\circ \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \sin 23^\circ &= \cos(37^\circ + 23^\circ) \\ &= \cos 60^\circ\end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } A = \frac{1}{2} \text{ และ}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ว่า } \sin 112^\circ \cos 68^\circ + \sin 68^\circ \cos 112^\circ &= \sin(112^\circ + 68^\circ) \\ &= \sin 180^\circ\end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } B = 0$$

$$\text{ดังนั้น ค่าของ } A + B \text{ เท่ากับ } \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

12. ตอบ ข้อ 2)

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} &= \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B} \\ &= \frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B} \\ &= \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B} \\ &= \tan A - \tan B\end{aligned}$$

นั่นคือ ข้อ 1) ไม่ถูกต้อง

$$\begin{aligned}(2) \quad \frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A} &= \frac{\sin 3A \cos A - \cos 3A \sin A}{\sin A \cos A} \\ &= \frac{\sin(3A-A)}{\sin A \cos A} \\ &= \frac{\sin 2A}{\sin A \cos A} \\ &= \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A \cos A}\end{aligned}$$

$$= 2$$

นั่นคือ ข้อ 2) ถูกต้อง

ดังนั้น สรุปได้ว่าข้อ (1) ไม่ถูกต้องแต่ข้อ (2) ถูกต้อง

13. ตอบ ข้อ 1)

$$\text{ให้ } \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) = A \text{ จะได้ } \tan A = -\frac{4}{3}$$

$$\text{หาค่า } A \text{ ที่ } -\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2} \text{ และ } \tan A = -\frac{4}{3}$$

$$\text{เนื่องจาก } \tan A < 0 \text{ และ } -\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2} \text{ จะได้ } -\frac{\pi}{2} < A \leq 0$$

$$\text{จาก } \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \sec^2 A &= 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{16}{9} \\ &= \frac{25}{9} \end{aligned}$$

$$\text{จาก } -\frac{\pi}{2} < A \leq 0 \text{ จะได้ } \sec A = \frac{5}{3}$$

$$\text{นั่นคือ } \cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{3}{5} \text{ และ}$$

$$\text{จาก } \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\text{จะได้ } \sin A = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\text{ให้ } \arccos \frac{5}{13} = B \text{ จะได้ } \cos B = \frac{5}{13}$$

$$\text{จะได้ } \cos B = \frac{5}{13} \text{ โดยที่ } 0 \leq B \leq \pi$$

$$\text{เนื่องจาก } \cos B > 0 \text{ และ } 0 \leq B \leq \pi \text{ จะได้ } 0 \leq B < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{จาก } \cos^2 B + \sin^2 B = 1$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \sin^2 B &= 1 - \cos^2 B \\ &= 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{25}{169} \\ &= \frac{144}{169} \end{aligned}$$

$$\text{จาก } 0 \leq B < \frac{\pi}{2} \text{ จะได้ } \sin B = \frac{12}{13}$$

$$\begin{aligned}
\text{ดังนั้น } \sin(\arctan(-\frac{4}{3}) + \arctan(\frac{5}{13})) &= \sin(A+B) \\
&= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\
&= (-\frac{4}{5})(\frac{5}{13}) + (\frac{3}{5})(\frac{12}{13}) \\
&= (-\frac{4}{5})(\frac{5}{13}) + (\frac{3}{5})(\frac{12}{13}) \\
&= \frac{16}{65}
\end{aligned}$$

14. ตอบ ข้อ 1)

ข้อ (1) ให้ $\arcsin x = A$ จะได้ $\sin A = x$ โดยที่ $0 \leq x \leq 1$

$$\text{จาก } \cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

$$\text{จะได้ } \cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - x^2 \\
\text{นั่นคือ } \cos A &= \sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{จาก } \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \\
&= \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } A = \arctan \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{ดังนั้น } \arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{ข้อ (1) ถูกต้อง}$$

ข้อ (2) ให้ $A = \arccos \frac{x}{2}$ จะได้ $\cos A = \frac{x}{2}$ โดยที่ $0 \leq x \leq 1$

$$\text{จาก } \sin(\frac{\pi}{2} + 2\arccos \frac{x}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2A)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos 2A \\
&= 2\cos^2 A - 1 \\
&= 2(\frac{x}{2})^2 - 1 \\
&= \frac{x^2}{2} - 1
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(\frac{\pi}{2} + 2\arccos \frac{x}{2}) = \frac{x^2}{2} - 1 \quad \text{ข้อ (2) ถูกต้อง}$$

15. ตอบ ข้อ 4)

$$\begin{aligned}
 \frac{\cos A}{1-\sin A} &= \frac{\cos A}{1-\sin A} \cdot \frac{1+\sin A}{1+\sin A} \\
 &= \frac{\cos A(1+\sin A)}{1-\sin^2 A} \\
 &= \frac{\cos A(1+\sin A)}{\cos^2 A} \\
 &= \frac{1+\sin A}{\cos A} \\
 &= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \\
 &= \sec A + \tan A
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{1+\sin A}{\cos A}$ มีค่าเท่ากับ $\sec A + \tan A$

16. ตอบ ข้อ 2)

$$\begin{aligned}
 \tan x - \cot x &= \operatorname{cosec} x \\
 \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} &= \frac{1}{\sin x} \\
 \sin^2 x - \cos^2 x &= \cos x \\
 (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x &= \cos x \\
 1 - 2\cos^2 x &= \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\cos^2 x + \cos x - 1 &= 0 \\
 (2\cos x - 1)(\cos x + 1) &= 0
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $2\cos x - 1 = 0$ หรือ $\cos x + 1 = 0$

ค่าของ x ในช่วง $[0, 2\pi]$ ที่ทำให้ $\cos x = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{3}$ และ $\frac{5\pi}{3}$

และ ค่าของ x ในช่วง $[0, 2\pi]$ ที่ทำให้ $\cos x = -1$ คือ π

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $\tan x - \cot x = \operatorname{cosec} x$ เมื่อ $x \in [0, 2\pi]$

ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$

17. ตอบ ข้อ 2)

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี $a = 7$, $b = 5$ และ $c = 3$

มุมที่ใหญ่ที่สุดจะอยู่ตรงข้ามด้านที่ยาวที่สุด

$$\text{จาก } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
 &= \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2(5)(3)} \\
 &= \frac{25 + 9 - 49}{2(5)(3)} \\
 &= \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

มุม A ที่ทำให้ $\cos A = -\frac{1}{2}$ คือ 120°

ดังนั้น มุมที่ใหญ่ที่สุดจะกาง 120 องศา

18. ตอบ ข้อ 1)

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีด้าน a ยาว 2 หน่วย ด้าน c ยาว $\sqrt{6}$ และมุม C มีขนาด 60 องศา

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

นั่นคือ $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{6}}$

$$\begin{aligned}
 \sin A &= \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{6}} \\
 &= \frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\sqrt{6}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sin A > 0$ ดังนั้น มุม A อาจเป็นมุมแหลม ($0^\circ < A < 90^\circ$)

หรือมุม B อาจเป็นมุมป้าน ($90^\circ < A < 180^\circ$)

พิจารณา $0^\circ < A < 90^\circ$ จาก $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = A$

จะได้ $A = 45^\circ$

พิจารณา $90^\circ < A < 180^\circ$ เนื่องจาก $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$

นั่นคือ $\sin A = \sin(180^\circ - A)$

จะได้ $A = 180^\circ - 45^\circ$ หรือ $A = 135^\circ$

ถ้า $A = 45^\circ$ จะได้ $A + C = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$ ซึ่งน้อยกว่า 180°

แสดงว่า มุม $A = 45^\circ$ เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

ถ้า $A = 135^\circ$ จะได้ $A + C = 135^\circ + 60^\circ = 195^\circ$ ซึ่งมากกว่า 180°

แสดงว่า มุม $A = 135^\circ$ ไม่เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

ดังนั้น ขนาดของมุม A คือ 45 องศา

19. ตอบ ข้อ 3)

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี มุม B เป็น 30 องศา c เท่ากับ 150 หน่วย และ b เท่ากับ $50\sqrt{3}$ หน่วย

จากกฎของไซน์
$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$$

นั่นคือ
$$\frac{\sin C}{150} = \frac{\sin 30^\circ}{50\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}\sin C &= \frac{150 \sin 30^\circ}{50\sqrt{3}} \\ &= \frac{150(\frac{1}{2})}{50\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sin C > 0$ ดังนั้น มุม C อาจเป็นมุมแหลม ($0^\circ < C < 90^\circ$)

หรือมุม C อาจเป็นมุมป้าน ($90^\circ < C < 180^\circ$)

พิจารณา $0^\circ < C < 90^\circ$ จาก $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ จะได้ $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = C$

จะได้ $C = 60^\circ$

พิจารณา $90^\circ < C < 180^\circ$ เนื่องจาก $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$

นั่นคือ $\sin C = \sin(180^\circ - C)$

จะได้ $C = 180^\circ - 60^\circ$ หรือ $C = 120^\circ$

ถ้า $C = 60^\circ$ จะได้ $C + B = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ ซึ่งน้อยกว่า 180°

แสดงว่า มุม $C = 60^\circ$ เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC และ

$$\text{จะได้ มุม } A = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\text{ถ้า } C = 120^\circ \text{ จะได้ } C + B = 120^\circ + 30^\circ = 150^\circ \text{ ซึ่งน้อยกว่า } 180^\circ$$

แสดงว่า มุม $C = 120^\circ$ เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC และ

$$\text{จะได้ มุม } A = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

20. ตอบ ข้อ 4)

จากโจทย์

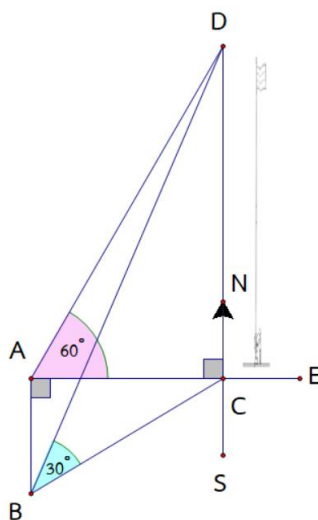
ให้ A แทน เสื่อยืนอยู่ทางทิศตะวันตกของเสาธงมองยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60 องศา

B แทน สิ่งยืนอยู่ทางใต้ของเสาธงมองยอดเสาธงเป็นมุมเงย 30 องศา

CD แทน เสาธงสูง 150 ฟุต และ

AB แทน ระยะห่างระหว่างเสากับสิ่ง

ดังรูป



พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD จะได้

$$\begin{aligned} \tan 60^\circ &= \frac{150}{AC} \\ AC &= \frac{150}{\tan 60^\circ} \\ &= \frac{150}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{150\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$= 50\sqrt{3}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\tan 30^\circ = \frac{150}{BC}$$

$$BC = \frac{150}{\tan 30^\circ}$$

$$= \frac{150}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= 150\sqrt{3}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จะได้

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$

$$= (150\sqrt{3})^2 - (50\sqrt{3})^2$$

$$= (150\sqrt{3} - 50\sqrt{3})(150\sqrt{3} + 50\sqrt{3})$$

$$= (100\sqrt{3})(200\sqrt{3})$$

$$= 20,000(3) = 60,000$$

นั่นคือ $AB = 100\sqrt{6}$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเสากับสิ่งเท่ากับ $100\sqrt{6}$ ฟุต

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน
พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ :
บริษัท ธนัชการพิมพ์ จำกัด.
- พิชิต ฤทธิจรูญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : แฮสออฟ
เคอร์มิสท์.
- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็น
สำคัญ.** พระนครศรีอยุธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัย
เทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.
- ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฏานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-
NET คณิตศาสตร์ ม.6.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.**
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตาม
หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ :
โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.** พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย.
- สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 5. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.
- อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรง
พิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.