



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201

ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

สาระการเรียนรู้ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

เวลา 3 ชั่วโมง

1. ผลการเรียนรู้

เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 เขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้

4.1.2 หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้

4.2.2 ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.2 มีวินัย

4.3.3 ใฝ่เรียนรู้

4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญ of นักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

4.4.1 ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ได้

4.4.2 ใช้การคิดในการเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้

4.4.3 ใช้การแก้ปัญหาหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้ได้

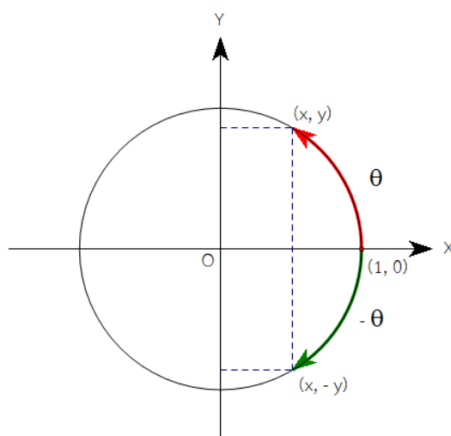
4.4.4 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้

4.4.5 ใช้เทคโนโลยี เพื่อหาบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ได้

5. เนื้อหา/สาระ

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณาจำนวนจริง $\theta > 0$ และ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปทิศทางทวนเข็มนาฬิกาที่ยาว θ หน่วย (เนื่องจาก $\theta > 0$ จึงได้ $|\theta| = \theta$) เมื่อสะท้อนจุด (x, y) โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จะได้จุด $(x, -y)$ เป็นภาพสะท้อน จุด $(x, -y)$ จึงเป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมดังกล่าวที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาที่ยาว θ หน่วย ดังรูป หรือกล่าวตามข้อตกลงเรื่องการวัดส่วนโค้งที่กล่าวมาแล้วได้ว่า $(x, -y)$ เป็นจุดปลายของส่วนโค้งที่เกิดจากจำนวนจริง $-\theta$



จากจุด (x, y) และ $(x, -y)$

สรุปได้ว่า $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ และ $x = \cos(-\theta)$, $-y = \sin(-\theta)$

ดังนั้น

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

นั่นคือ ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้ ก็สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบที่เป็นตัวผกผันการบวกของจำนวนจริงนั้น ๆ ได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ และ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ และ $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{จะได้ } \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

□

$$\text{และ } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

□

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ และ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\text{จะได้ } \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

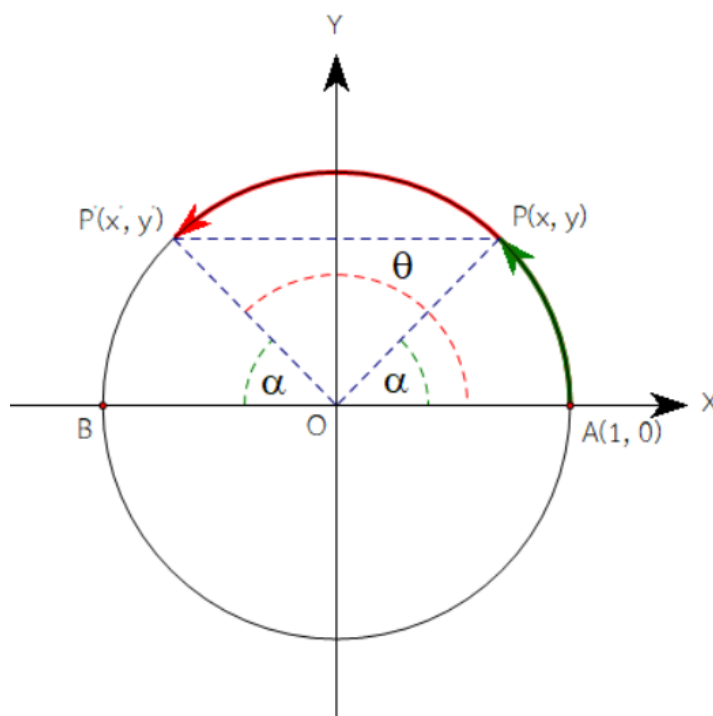
$$\text{และ } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

□

จากที่ทราบเมื่อหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้ ก็หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงได้ แต่เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยมีแกน X และแกน Y เป็นแกนสมมาตร การหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จึงหาได้จากการหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ทำได้ดังนี้

1. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคที่ 2 $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$



ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin\theta$ และ $x' = \cos\theta$

ให้ $\alpha = \pi - \theta$ จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้ง P'B ยาว α หน่วย
ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่าส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = y$, $x' = -x$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin \alpha$ และ $x = \cos \alpha$

แต่ $y = y' = \sin \theta = \sin(\pi - \alpha)$

และ $-x = x' = \cos \theta = \cos(\pi - \alpha)$

สรุปได้ว่า

$$\begin{array}{ll} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha & \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha & \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{12} \approx \frac{13}{50}$ จงหาค่าประมาณของ

1) $\sin \frac{11\pi}{12}$

2) $\cos \frac{11\pi}{12}$

วิธีทำ 1) $\sin \frac{11\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$
 $= \sin \frac{\pi}{12}$
 $\approx \frac{13}{50}$

□

2) เนื่องจาก $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

จะได้ $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1$

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{12}$$

$$\approx 1 - \left(\frac{13}{50}\right)^2$$

$$\approx \frac{2331}{2500}$$

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{12}$ หน่วย เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
อยู่ในจตุภาคที่ 1

ดังนั้น $\cos \frac{\pi}{12} \approx \frac{\sqrt{2331}}{50}$

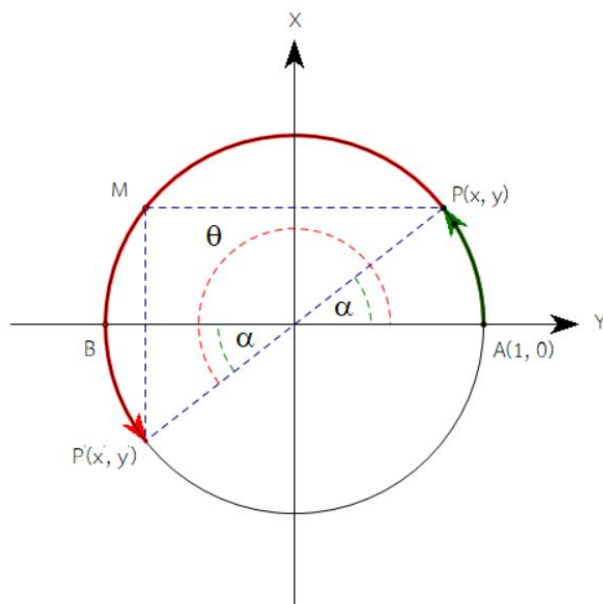
จะได้ $\cos \frac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$

$$= -\cos \frac{\pi}{12}$$

$$\approx -\frac{\sqrt{2331}}{50}$$

□

2. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคที่ 3 $(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2})$



ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin \theta$ และ $x' = \cos \theta$

ให้ $\alpha = \theta - \pi$ จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้ง BP' ยาว α หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน และ

จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด M โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่าส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = -y$, $x' = -x$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin \alpha$ และ $x = \cos \alpha$

แต่ $-y = y' = \sin \theta = \sin(\pi + \alpha)$

และ $-x = x' = \cos \theta = \cos(\pi + \alpha)$

สรุปได้ว่า

\

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{17}{100}$ จงหาค่าประมาณของ

1) $\sin \frac{19\pi}{18}$

2) $\cos \frac{19\pi}{18}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1) \sin \frac{19\pi}{18} &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{18}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{18} \\ &\approx -\frac{17}{100} \end{aligned}$$

□

2) เนื่องจาก $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\text{จะได้ } \sin^2 \frac{\pi}{18} + \cos^2 \frac{\pi}{18} = 1$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{18} = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{18}$$

$$\approx 1 - \left(\frac{17}{100}\right)^2$$

$$\approx \frac{9,711}{10,000}$$

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{18}$ หน่วย เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา อยู่ในจุดภาคที่ 1

$$\text{ดังนั้น} \quad \cos \frac{\pi}{18} \approx \frac{\sqrt{9,711}}{100}$$

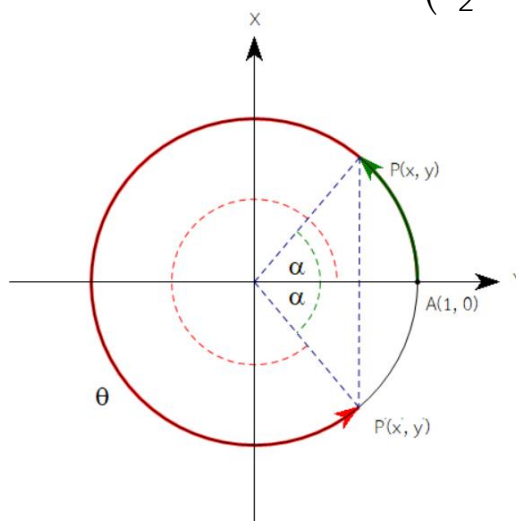
$$\text{จะได้} \quad \cos \frac{19\pi}{18} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{18}\right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{18}$$

$$\approx -\frac{\sqrt{9711}}{100}$$

□

3. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคที่ 4 $\left(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right)$



ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin \theta$ และ $x' = \cos \theta$

ให้ $\alpha = 2\pi - \theta$ จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง $P'A$ ยาว α หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่าส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = -y$, $x' = x$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin \alpha$ และ $x = \cos \alpha$

แต่ $-y = y' = \sin \theta = \sin(2\pi - \alpha)$

และ $x = x' = \cos \theta = \cos(2\pi - \alpha)$

สรุปได้ว่า

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ $\frac{11\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \sin \frac{11\pi}{6} &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \square$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \cos \frac{11\pi}{6} &= \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \square \end{aligned}$$

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงหนึ่งหน่วยมีความยาว 2π หน่วย ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $2n\pi + \theta$ หน่วย จะเป็นจุดเดียวกับส่วนปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะวัดระยะในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา n รอบ แต่ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบ จะวัดระยะในทิศทางตามเข็มนาฬิกา n รอบ จึงสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} \sin(2n\pi + \theta) &= \sin \theta \\ \cos(2n\pi + \theta) &= \cos \theta \end{aligned}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

จากสมบัติข้างต้น จะเห็นว่าถ้าหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π แล้ว จะสามารถหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงทุกจำนวนได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\sin \frac{33\pi}{4}$ และ $\cos \left(-\frac{17\pi}{3} \right)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \sin \frac{33\pi}{4} &= \sin \left(8\pi + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \cos \left(-\frac{17\pi}{3} \right) &= \cos \left(-6\pi + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \quad \square \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

$$1) \frac{5\pi}{8} \qquad 2) \frac{7\pi}{6} \qquad 3) -\frac{16\pi}{7}$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 1) \quad \sin \frac{5\pi}{8} &= \sin \left(\pi - \frac{3\pi}{8} \right) = \sin \frac{3\pi}{8} \\ \cos \frac{5\pi}{8} &= \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{8} \right) = -\cos \frac{3\pi}{8} \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \sin \frac{7\pi}{6} &= \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} \\
\cos \frac{7\pi}{6} &= \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} \quad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \sin \left(-\frac{16\pi}{7} \right) &= -\sin \frac{16\pi}{7} \\
&= -\sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{7} \right) \\
&= -\sin \frac{2\pi}{7} \quad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos \left(-\frac{16\pi}{7} \right) &= \cos \frac{16\pi}{7} \\
&= \cos \left(2\pi + \frac{2\pi}{7} \right) \\
&= \cos \frac{2\pi}{7} \quad \square
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

$$1) -\frac{7\pi}{4}$$

$$2) \frac{17\pi}{3}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
1) \quad \sin \left(-\frac{7\pi}{4} \right) &= -\sin \frac{7\pi}{4} \\
&= -\sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= -\left(-\sin \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos \left(-\frac{7\pi}{4} \right) &= \cos \frac{7\pi}{4} \\
&= \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \sin \frac{17\pi}{3} &= \sin \left(4\pi + \frac{5\pi}{3} \right) \\
&= \sin \frac{5\pi}{3} \\
&= \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right)
\end{aligned}$$

$$= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \square$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{17\pi}{3} &= \cos \left(4\pi + \frac{5\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{5\pi}{3} \\ &= \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \square \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่า $\sin \frac{8\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}$

วิธีทำ

$$\sin \frac{8\pi}{3} = \sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

แทนค่าจะได้

$$\begin{aligned} \sin \frac{8\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าของ $\sin \frac{8\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}$ เท่ากับ 0 \square

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) เขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 2	- แบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 2 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 2 ได้ ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60
2) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 3 และ ข้อ 4	- แบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 3 และ ข้อ 4 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 3 และ ข้อ 4 ได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 60
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 3 และ ข้อ 4	- แบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 3 และ ข้อ 4 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 5	- แบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 5 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
<p>ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์</p> <p>1) ซื่อสัตย์สุจริต</p>	<p>ตรวจการทำ แบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์ของจำนวนจริง ใด ๆ”</p>	<p>- แบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์ของจำนวน จริงใด ๆ” - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน คุณลักษณะที่พึง ประสงค์</p>	<p>นักเรียนมีความ ซื่อสัตย์สุจริต อยู่ใน ระดับดีขึ้นไป</p>
<p>2) มีวินัย</p>	<p>บันทึกการแต่งกาย</p>	<p>- แบบบันทึก การแต่งกาย - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน คุณลักษณะที่พึง ประสงค์</p>	<p>นักเรียนมีวินัย อยู่ใน ระดับดีขึ้นไป</p>
<p>3) ใฝ่เรียนรู้</p>	<p>บันทึกการเข้าเรียน</p>	<p>- แบบบันทึก การเข้าเรียน - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน คุณลักษณะที่พึง ประสงค์</p>	<p>นักเรียนใฝ่เรียนรู้ อยู่ ในระดับดีขึ้นไป</p>
<p>4) มุ่งมั่นในการทำงาน</p>	<p>การส่งแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์ของจำนวนจริง ใด ๆ”</p>	<p>- แบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์ของจำนวน จริงใด ๆ” - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน คุณลักษณะที่พึง ประสงค์</p>	<p>นักเรียนมุ่งมั่นในการ ทำงานอยู่ในระดับดี ขึ้นไป</p>

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ” ข้อ 2	- ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ” ข้อ 2 - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การคิดในการเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ” ข้อ 1	- ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ” ข้อ 1 - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การคิดในการเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใช้การแก้ปัญหาหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ” ข้อ 3	- ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ” ข้อ 3 - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้ ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึกการทำงานกลุ่ม - แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
5) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ได้	ตรวจการใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ”	- สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้เทคโนโลยีเพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

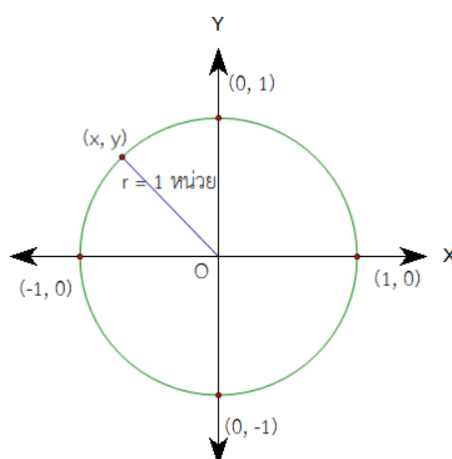
ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน

7.2 ครูทบทวนเรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” โดยการสนทนาถามตอบกับนักเรียนและใช้ สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ประกอบ

7.3 ครูยกตัวอย่างวงกลมหนึ่งหน่วย ดังรูป



แล้วถามคำถาม จากรูป จุดพิกัด (x, y) อยู่ในจุดภาคใดบ้าง แล้วค่าของ x และ y เป็นอย่างไร

แนวคำตอบ

- อยู่ในจุดภาคที่ 1 ค่า x เป็นบวกและ ค่า y เป็นบวก
- อยู่ในจุดภาคที่ 2 ค่า x เป็นลบและ ค่า y เป็นบวก
- อยู่ในจุดภาคที่ 3 ค่า x เป็นลบและ ค่า y เป็นลบ
- อยู่ในจุดภาคที่ 2 ค่า x เป็นบวกและ ค่า y เป็นลบ

ขั้นตอนและอธิบายทฤษฎี

7.4 ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” โดยการพิจารณาจำนวนกลุ่มนักเรียนในชั้นเรียน ให้นักเรียนส่งตัวแทนจับฉลากเนื้อหาที่ศึกษาจากใบความรู้

- หมายเลข 1 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เมื่อจุดปลายส่วนโค้งเป็น $-\theta$
- หมายเลข 2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

อยู่ในจุดภาคที่ 2 $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$

- หมายเลข 3 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

อยู่ในจุดภาคที่ 3 $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$

- หมายเลข 4 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

อยู่ในจุดภาคที่ 4 $\left(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right)$

และ - หมายเลข 5 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เมื่อจุดปลายส่วนโค้งบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $2n\pi + \theta$ หน่วย

7.5 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มอธิบายเนื้อหาจากใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ที่ได้รับมอบหมายในข้อ 7.4 ครูคอยแนะนำเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 2

7.6 ครูอธิบายตัวอย่างและการแก้ปัญหาโจทย์ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” (หน้า 1 - 15) โดยการสุ่มนักเรียนในชั้นเรียนตอบคำถามหรือสนทนากลุ่มต่อนักเรียนระหว่างการอธิบาย นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.7 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ในชั่วโมงที่ 1 ครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

7.8 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” โดยครูสนทนาถามตอบกับนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม

7.9 ครูเฉลยใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” เพิ่มเติม ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” (หน้า 16 - 19)

ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.10 จากการทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” และศึกษาใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” นักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้อย่างไร

7.11 ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน พร้อมเขียนสูตรสรุปการหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.12 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” เป็นการบ้าน

7.13 ครูมอบหมายให้นักเรียนทบทวนบทเรียนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” เพื่อเป็นการทบทวนและศึกษาความรู้เพิ่มเติมด้วยตัวเอง

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- ใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” - ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” - แบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ”	สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ”	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้ 1) เขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้				
2) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้				
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้				

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์				
1) ซื่อสัตย์สุจริต				
2) มีวินัย				
3) ใฝ่เรียนรู้				
4) มุ่งมั่นในการทำงาน				
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน				
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ได้				
2) ใช้การคิดในการเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้				
3) ใช้การแก้ปัญหาหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้				
4) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				
5) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้บริหารโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา



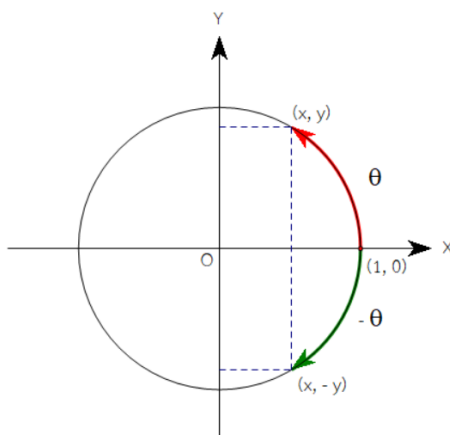
ใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) เขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้
- 2) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณาจำนวนจริง $\theta > 0$ และ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปทิศทวนเข็มนาฬิกาที่ยาว θ หน่วย (เนื่องจาก $\theta > 0$ จึงได้ $|\theta| = \theta$) เมื่อสะท้อนจุด (x, y) โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จะได้จุด $(x, -y)$ เป็นภาพสะท้อน จุด $(x, -y)$ จึงเป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมดังกล่าวที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาที่ยาว θ หน่วย ดังรูป หรือกล่าวตามข้อตกลงเรื่องการวัดส่วนโค้งที่กล่าวมาแล้วได้ว่า $(x, -y)$ เป็นจุดปลายของส่วนโค้งที่เกิดจากจำนวนจริง $-\theta$



จากจุด (x, y) และ $(x, -y)$

สรุปได้ว่า $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ และ $x = \cos(-\theta)$, $-y = \sin(-\theta)$

ดังนั้น

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

นั่นคือ ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้ ก็สามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบที่เป็นตัวผกผันการบวกของจำนวนจริงนั้น ๆ ได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ และ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ และ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{จะได้ } \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \square$$

$$\text{และ } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ และ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

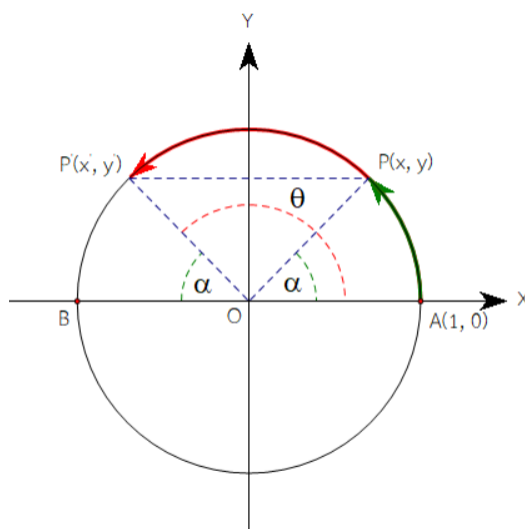
$$\text{จะได้ } \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \square$$

$$\text{และ } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \quad \square$$

จากที่ทราบเมื่อหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงได้ แต่เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วยมีแกน X และแกน Y เป็นแกนสมมาตร การหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จึงหาได้จากการหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ทำได้ดังนี้

1. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคที่ 2 $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$



ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin \theta$ และ $x' = \cos \theta$

ให้ $\alpha = \pi - \theta$ จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่าส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = y$, $x' = -x$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin \alpha$ และ $x = \cos \alpha$

แต่ $y = y' = \sin \theta = \sin(\pi - \alpha)$

และ $-x = x' = \cos \theta = \cos(\pi - \alpha)$

สรุปได้ว่า

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{12} \approx \frac{13}{50}$ จงหาค่าประมาณของ

3) $\sin \frac{11\pi}{12}$

2) $\cos \frac{11\pi}{12}$

วิธีทำ

1) $\sin \frac{11\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$

$$= \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\approx \frac{13}{50}$$

□

4) เนื่องจาก $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

จะได้ $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1$

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{12}$$

$$\approx 1 - \left(\frac{13}{50}\right)^2$$

$$\approx \frac{2331}{2500}$$

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{12}$ หน่วย เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา อยู่ในจตุภาคที่ 1

สรุปได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha && \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha && \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{17}{100}$ จงหาค่าประมาณของ

$$3) \sin \frac{19\pi}{18} \qquad 2) \cos \frac{19\pi}{18}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}1) \sin \frac{19\pi}{18} &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{18}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{18} \\ &\approx -\frac{17}{100}\end{aligned}$$

□

$$4) \text{ เนื่องจาก } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\text{จะได้ } \sin^2 \frac{\pi}{18} + \cos^2 \frac{\pi}{18} = 1$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{\pi}{18} &= 1 - \sin^2 \frac{\pi}{18} \\ &\approx 1 - \left(\frac{17}{100}\right)^2 \\ &\approx \frac{9,711}{10,000}\end{aligned}$$

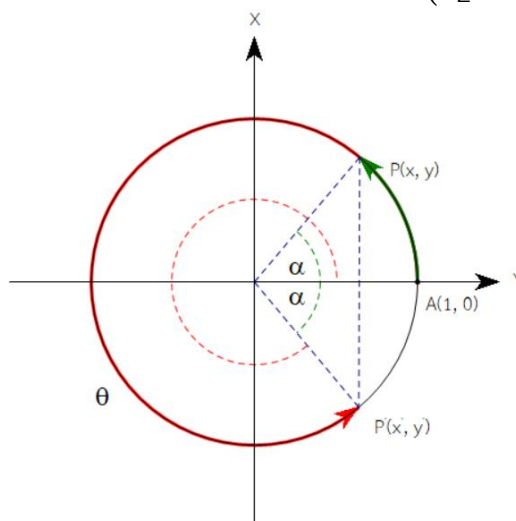
เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{18}$ หน่วย เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา อยู่ในจตุภาคที่ 1

$$\text{ดังนั้น } \cos \frac{\pi}{18} \approx \frac{\sqrt{9,711}}{100}$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \cos \frac{19\pi}{18} &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{18}\right) \\ &= -\cos \frac{\pi}{18} \\ &\approx -\frac{\sqrt{9711}}{100}\end{aligned}$$

□

3. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคที่ 4 ($\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$)



ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin \theta$ และ $x' = \cos \theta$

ให้ $\alpha = 2\pi - \theta$ จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง $P'A$ ยาว α หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่าส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = -y$, $x' = x$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin \alpha$ และ $x = \cos \alpha$

แต่ $-y = y' = \sin \theta = \sin(2\pi - \alpha)$

และ $x = x' = \cos \theta = \cos(2\pi - \alpha)$

สรุปได้ว่า

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ $\frac{11\pi}{6}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin \frac{11\pi}{6} &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}\text{และ } \cos \frac{11\pi}{6} &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

□

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงหนึ่งหน่วยมีความยาว 2π หน่วย ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $2n\pi + \theta$ หน่วย จะเป็นจุดเดียวกับส่วนปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะวัดระยะในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา n รอบ แต่ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบ จะวัดระยะในทิศทางตามเข็มนาฬิกา n รอบ จึงสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin(2n\pi + \theta) &= \sin \theta \\ \cos(2n\pi + \theta) &= \cos \theta\end{aligned}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

จากสมบัติข้างต้น จะเห็นว่าถ้าหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π แล้ว จะสามารถหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงทุกจำนวนได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\sin \frac{33\pi}{4}$ และ $\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin \frac{33\pi}{4} &= \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}\text{และ } \cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right) &= \cos\left(-6\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3) $\frac{5\pi}{8}$

2) $\frac{7\pi}{6}$

3) $-\frac{16\pi}{7}$

วิธีทำ

1) $\sin \frac{5\pi}{8} = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = \sin \frac{3\pi}{8}$

$\cos \frac{5\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos \frac{3\pi}{8}$ □

4) $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6}$

$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6}$ □

5) $\sin\left(-\frac{16\pi}{7}\right) = -\sin \frac{16\pi}{7}$

$= -\sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{7}\right)$

$= -\sin \frac{2\pi}{7}$ □

$\cos\left(-\frac{16\pi}{7}\right) = \cos \frac{16\pi}{7}$

$= \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{7}\right)$

$= \cos \frac{2\pi}{7}$ □

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

1) $-\frac{7\pi}{4}$

2) $\frac{17\pi}{3}$

วิธีทำ

1) $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin \frac{7\pi}{4}$

$= -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= -\left(-\sin \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ □

$\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \cos \frac{7\pi}{4}$

$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \square$$

$$\begin{aligned} 2) \sin \frac{17\pi}{3} &= \sin \left(4\pi + \frac{5\pi}{3} \right) \\ &= \sin \frac{5\pi}{3} \\ &= \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{17\pi}{3} &= \cos \left(4\pi + \frac{5\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{5\pi}{3} \\ &= \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \square \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่า $\sin \frac{8\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}$

วิธีทำ

$$\sin \frac{8\pi}{3} = \sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

แทนค่าจะได้

$$\begin{aligned} \sin \frac{8\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าของ $\sin \frac{8\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}$ เท่ากับ 0 \square



ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

- 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ได้
- 2) ใช้การคิดในการเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้
- 3) ใช้การแก้ปัญหาหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้

คำชี้แจง

ให้นักเรียนร่วมกันระดมความคิด แก้ปัญหา แลกเปลี่ยนเรียนรู้กับสมาชิกในกลุ่มในการทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” แล้วนำเสนอคำตอบที่ถูกต้องชัดเจนที่สุด

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....
 บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ
2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....
 บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ
3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....
 บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ
4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....
 บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที

ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....

1. ให้นักเรียนเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ พร้อมบอกจุดปลายส่วนโค้งของจำนวนจริงอยู่ในจตุภาคใด

1) $\frac{5\pi}{3}$

$$\sin \frac{5\pi}{3} = \dots\dots\dots$$

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \dots\dots\dots$$

จุดปลายส่วนโค้งของ $\frac{5\pi}{3}$ อยู่ใน.....

2) $\frac{7\pi}{6}$

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \dots\dots\dots$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \dots\dots\dots$$

จุดปลายส่วนโค้งของ $\frac{7\pi}{6}$ อยู่ใน.....

3) $\frac{9\pi}{5}$

$$\sin \frac{9\pi}{5} = \dots\dots\dots$$

$$\cos \frac{9\pi}{5} = \dots\dots\dots$$

จุดปลายส่วนโค้งของ $\frac{9\pi}{5}$ อยู่ใน.....

4) $-\frac{7\pi}{10}$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right) = \dots\dots\dots$$

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{10}\right) = \dots\dots\dots$$

จุดปลายส่วนโค้งของ $-\frac{7\pi}{10}$ อยู่ใน.....

5) $-\frac{37\pi}{12}$

$$\sin\left(-\frac{37\pi}{12}\right) = \dots\dots\dots$$

$$\cos\left(-\frac{37\pi}{12}\right) = \dots\dots\dots$$

จุดปลายส่วนโค้งของ $-\frac{37\pi}{12}$ อยู่ใน.....

2. จำนวนจริง θ ต่อไปนี้ ให้นักเรียนหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$

ข้อ	จำนวนจริง θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
1)	$\pi - \frac{\pi}{3}$		
2)	$2\pi + \frac{\pi}{6}$		
3)	$\pi + \frac{3\pi}{4}$		
4)	$-\frac{7\pi}{3}$		
5)	$\frac{13\pi}{3}$		
6)	$-\frac{7\pi}{4}$		
7)	$2\pi - \frac{\pi}{3}$		
8)	$\frac{13\pi}{6}$		

3. จงหาค่า $\frac{\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right) + \cos\frac{31\pi}{4}}{\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right)}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลยใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ”

1. 1) $\sin \frac{5\pi}{3} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3}$
 $\cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3}$
จุดปลายส่วนโค้งของ $\frac{5\pi}{3}$ อยู่ใน จตุภาคที่ 4

- 2) $\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6}$
 $\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6}$
จุดปลายส่วนโค้งของ $\frac{7\pi}{6}$ อยู่ใน จตุภาคที่ 3

- 3) $\sin \frac{9\pi}{5} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{5} \right) = -\sin \frac{\pi}{5}$
 $\cos \frac{9\pi}{5} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \frac{\pi}{5}$
จุดปลายส่วนโค้งของ $\frac{9\pi}{5}$ อยู่ใน จตุภาคที่ 4

- 4) $\sin \left(\frac{-7\pi}{10} \right) = -\sin \frac{7\pi}{10} = -\sin \left(\pi - \frac{3\pi}{10} \right) = -\sin \frac{3\pi}{10}$
 $\cos \left(\frac{-7\pi}{10} \right) = \cos \frac{7\pi}{10} = \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{10} \right) = -\cos \frac{3\pi}{10}$
จุดปลายส่วนโค้งของ $-\frac{7\pi}{10}$ อยู่ใน จตุภาคที่ 3

- 5) $\sin \left(\frac{-37\pi}{12} \right) = -\sin \frac{37\pi}{12} = -\sin \left(2\pi + \frac{13\pi}{12} \right) = -\sin \frac{13\pi}{12}$
 $\phantom{\sin \left(\frac{-37\pi}{12} \right)} = -\sin \left(\pi + \frac{\pi}{12} \right) = -\left(-\sin \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{12}$
 $\cos \left(\frac{-37\pi}{12} \right) = \cos \frac{37\pi}{12} = \cos \left(2\pi + \frac{13\pi}{12} \right) = \cos \frac{13\pi}{12}$
 $\phantom{\cos \left(\frac{-37\pi}{12} \right)} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{12} \right) = -\cos \frac{\pi}{12}$
จุดปลายส่วนโค้งของ $-\frac{37\pi}{12}$ อยู่ใน จตุภาคที่ 3

2. จำนวนจริง θ ต่อไปนี้ให้นักเรียนหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$

ข้อ	จำนวนจริง θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
1)	$\pi - \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2)	$2\pi + \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
3)	$\pi + \frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
4)	$-\frac{7\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
5)	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
6)	$-\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
7)	$2\pi - \frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
8)	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. วิธีทำ หาค่า $\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = -\sin\frac{13\pi}{4} = -\sin\left(2\pi + \frac{5\pi}{4}\right)$
 $= -\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= -\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\cos\frac{31\pi}{4} = \cos\left(6\pi + \frac{7\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{4}$
 $= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right) = \cos\frac{29\pi}{6} = \cos\left(4\pi + \frac{5\pi}{6}\right)$
 $= \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad \frac{\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right) + \cos\frac{31\pi}{4}}{\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right)} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
 &= -\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$



แบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- เขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้
- หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้
- ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้

1. จงหาจำนวนจริง θ มา 5 จำนวนที่ทำให้

- | | | |
|--|--|--------------------------------|
| 1) $\sin \theta = -1$ | 2) $\cos \theta = -1$ | 3) $\cos \theta = \frac{1}{2}$ |
| 4) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 5) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 6) $\sin \theta = 0$ |

2. จงเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) $\frac{7\pi}{6}$ | 2) $-\frac{7\pi}{6}$ | 3) $\frac{13\pi}{3}$ |
| 4) $\frac{11\pi}{5}$ | 5) $-\frac{25\pi}{7}$ | 6) $\frac{11\pi}{10}$ |

3. จงหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $\frac{5\pi}{4}$ | 2) $2\pi - \frac{5\pi}{6}$ | 3) $-\frac{7\pi}{3}$ |
| 4) $\pi - \frac{\pi}{6}$ | 5) $\frac{19\pi}{4}$ | 6) $13\pi + \frac{\pi}{6}$ |

4. จงหาค่า

1) $\sin \frac{37\pi}{6} + \cos \frac{31\pi}{6}$

2) $\cos \frac{31\pi}{4} - \sin \frac{31\pi}{4}$

3) $\frac{\cos^2\left(-\frac{29\pi}{6}\right) + \sin^2\left(-\frac{29\pi}{6}\right)}{\cos \frac{34\pi}{3}}$

4) $\cos \frac{34\pi}{3} \cos \frac{25\pi}{6} - \sin \frac{34\pi}{3} \sin \frac{25\pi}{6}$

5. กำหนดให้ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \alpha = 0.25$ จงหาค่าของ

1) $\sin(\pi - \alpha)$

2) $\sin(-\alpha)$

3) $\cos(\pi + \alpha)$

4) $\cos(2\pi - \alpha)$

5) $\cos(\alpha - \pi)$

6) $\sin(\alpha - 2\pi)$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ”

1. ตัวอย่างคำตอบ

$$1) \quad \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$$

$$2) \quad \pi, 3\pi, 5\pi, -\pi, -3\pi$$

$$3) \quad \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{3}$$

$$4) \quad \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$$

$$5) \quad \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}$$

$$6) \quad 0, \pi, 2\pi, -\pi, -3\pi$$

2.

$$1) \quad \sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6}$$

$$2) \quad \sin \left(-\frac{7\pi}{6} \right) = -\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\left(-\sin \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \left(-\frac{7\pi}{6} \right) = \cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6}$$

$$3) \quad \sin \frac{13\pi}{3} = \sin \left(4\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{13\pi}{3} = \cos \left(4\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$4) \quad \sin \frac{11\pi}{5} = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{5} \right) = \sin \frac{\pi}{5}$$

$$\cos \frac{11\pi}{5} = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{5} \right) = \cos \frac{\pi}{5}$$

$$5) \quad \sin \left(-\frac{25\pi}{7} \right) = -\sin \left(\frac{25\pi}{7} \right) = -\sin \left(2\pi + \frac{11\pi}{7} \right) = -\sin \frac{11\pi}{7}$$

$$= -\sin \left(2\pi - \frac{3\pi}{7} \right) = -\left(-\sin \frac{3\pi}{7} \right) = \sin \frac{3\pi}{7}$$

$$\cos \left(-\frac{25\pi}{7} \right) = \cos \left(\frac{25\pi}{7} \right) = \cos \left(2\pi + \frac{11\pi}{7} \right) = \cos \frac{11\pi}{7}$$

$$= \cos \left(2\pi - \frac{3\pi}{7} \right) = \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$6) \quad \sin \frac{11\pi}{10} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{10} \right) = -\sin \frac{\pi}{10}$$

$$\cos \frac{11\pi}{10} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{10} \right) = -\cos \frac{\pi}{10}$$

3.

- 1) $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\cos \frac{5\pi}{4} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 2) $\sin \left(2\pi - \frac{5\pi}{6} \right) = -\sin \frac{5\pi}{6} = -\sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
 $\cos \left(2\pi - \frac{5\pi}{6} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3) $\sin \left(-\frac{7\pi}{3} \right) = -\sin \left(\frac{7\pi}{3} \right) = -\sin \left(2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos \left(-\frac{7\pi}{3} \right) = \cos \left(\frac{7\pi}{3} \right) = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- 4) $\sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
 $\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 5) $\sin \frac{19\pi}{4} = \sin \left(4\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = \sin \frac{3\pi}{4} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\cos \frac{19\pi}{4} = \cos \left(4\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = \cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 6) $\sin \left(13\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left(12\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
 $\cos \left(13\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(12\pi + \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.

- 1) $\sin \frac{37\pi}{6} + \cos \frac{31\pi}{6}$
 วิธีทำ หาค่า $\sin \frac{37\pi}{6} = \sin \left(6\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
 $\cos \frac{37\pi}{6} = \cos \left(6\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 แทนค่า จะได้ $\sin \frac{37\pi}{6} + \cos \frac{31\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
 ดังนั้น ค่าของ $\sin \frac{37\pi}{6} + \cos \frac{31\pi}{6}$ เท่ากับ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

□

$$2) \cos \frac{31\pi}{4} - \sin \frac{31\pi}{4}$$

วิธีทำ หาค่า

$$\sin \frac{31\pi}{4} = \sin \left(6\pi + \frac{7\pi}{4} \right) = \sin \frac{7\pi}{4} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{31\pi}{4} = \cos \left(6\pi + \frac{7\pi}{4} \right) = \cos \frac{7\pi}{4} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า จะได้ } \cos \frac{31\pi}{4} - \sin \frac{31\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น ค่าของ } \cos \frac{31\pi}{4} - \sin \frac{31\pi}{4} \text{ เท่ากับ } \sqrt{2}$$

□

$$3) \frac{\cos^2 \left(-\frac{29\pi}{6} \right) + \sin^2 \left(-\frac{29\pi}{6} \right)}{\cos \frac{34\pi}{3}}$$

$$\text{วิธีทำ หาค่า } \cos \left(-\frac{29\pi}{6} \right) = \cos \left(\frac{29\pi}{6} \right) = \cos \left(4\pi + \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$= \cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \left(-\frac{29\pi}{6} \right) = -\sin \left(\frac{29\pi}{6} \right) = -\sin \left(4\pi + \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$= -\sin \frac{5\pi}{6} = -\sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{34\pi}{3} = \cos \left(10\pi + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \frac{4\pi}{3} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า จะได้ } \frac{\cos^2 \left(-\frac{29\pi}{6} \right) + \sin^2 \left(-\frac{29\pi}{6} \right)}{\cos \frac{34\pi}{3}} &= \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2}{\left(-\frac{1}{2} \right)} \\ &= \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} \\
 &= -2 \\
 \text{ดังนั้น ค่าของ } &\frac{\cos^2\left(-\frac{29\pi}{6}\right) + \sin^2\left(-\frac{29\pi}{6}\right)}{\cos\frac{34\pi}{3}} \text{ เท่ากับ } -2 \quad \square
 \end{aligned}$$

$$4) \cos\frac{34\pi}{3} \cos\frac{25\pi}{6} - \sin\frac{34\pi}{3} \sin\frac{25\pi}{6}$$

วิธีทำ หาค่า

$$\cos\frac{34\pi}{3} = \cos\left(10\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{25\pi}{6} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{34\pi}{3} = \sin\left(10\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{25\pi}{6} = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

แทนค่า จะได้

$$\begin{aligned}
 \cos\frac{34\pi}{3} \cos\frac{25\pi}{6} - \sin\frac{34\pi}{3} \sin\frac{25\pi}{6} &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น ค่าของ } \cos\frac{34\pi}{3} \cos\frac{25\pi}{6} - \sin\frac{34\pi}{3} \sin\frac{25\pi}{6} \text{ เท่ากับ } 0 \quad \square$$

$$5. \quad \text{เนื่องจาก } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\text{จะได้ } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\text{จาก } \sin \alpha = 0.25 = \frac{1}{4} \text{ จะได้ } \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

เนื่องจาก $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะอยู่ใน

$$\text{จุดภาคที่ 1 จะได้ } \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

ดังนั้น $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ และ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

หาค่าของ

$$1) \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$2) \sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -\frac{1}{4}$$

$$3) \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$




$$4) \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\begin{aligned} 5) \cos(\alpha - \pi) &= \cos(-(\pi - \alpha)) = \cos(\pi - \alpha) \\ &= -\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \sin(\alpha - 2\pi) &= \sin(-(2\pi - \alpha)) = -\sin(2\pi - \alpha) \\ &= -(-\sin \alpha) = \sin \alpha = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

□

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” หน้า 1 – 3

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

หน้า 1

เริ่มต้นใหม่

$P(x, y)$
 $P(x, -y)$
เส้นประ

เมื่อคลิกที่ $P(x, y)$

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

$x = \cos \theta$ $y = \sin \theta$

$\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$




$x = \cos(-\theta)$ $-y = \sin(-\theta)$

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

ก่อนหน้า **หน้าต่อไป**

© ค.ศ. ๒๕๖๓ นายอรรถวิทย์ ชีวอนันต์ สำนักส่งเสริมและพัฒนาคุณภาพชีวิตคนพิการ ศูนย์เทคโนโลยีทางการศึกษา สำนักงานส่งเสริมการศึกษานานาชาติไทย เลข ๑4

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

หน้า 2

เริ่มต้นใหม่

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\cos(-\frac{\pi}{3})$ และ $\sin(-\frac{\pi}{3})$

ตัวอย่าง 1 จาก $\cos(-\theta) = \cos \theta$

ตัวอย่าง 2 จะได้ $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 3 จาก $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

ตัวอย่าง 4 จะได้ $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ส่วน $\pi/3$
 $\pi/4$
 $\pi/6$
re ค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\cos(-\frac{\pi}{4})$ และ $\sin(-\frac{\pi}{6})$

ตัวอย่าง 1 จาก $\cos(-\theta) = \cos \theta$

ตัวอย่าง 2 จะได้ $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ตัวอย่าง 3 จาก $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

ตัวอย่าง 4 จะได้ $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

ส่วน $\pi/3$
 $\pi/4$
 $\pi/6$
re ค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ก่อนหน้า **หน้าต่อไป**

© ค.ศ. ๒๕๖๓ นายอรรถวิทย์ ชีวอนันต์ สำนักส่งเสริมและพัฒนาคุณภาพชีวิตคนพิการ ศูนย์เทคโนโลยีทางการศึกษา สำนักงานส่งเสริมการศึกษานานาชาติไทย เลข ๑4





"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

หน้า 3

เริ่มต้นใหม่ **แสดง**

1. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งยาว θ หน่วย อยู่ในจุดที่ 2 ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$)

ส่วนโค้ง AB ส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย

จุด $P(x', y')$ ให้ $P(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin \theta$ และ $x' = \cos \theta$

ส่วนโค้ง PB ให้ $\alpha = \pi - \theta$ จะได้ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ส่วนโค้ง AP เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้ง PB ยาว α หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด $P(x', y')$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = y$, $x' = -x$

ตัวอย่าง เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = y' = \sin \theta = \sin(\pi - \alpha)$

และ $-x = x' = \cos \theta = \cos(\pi - \alpha)$

สรุป



$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

ก่อนหน้า **หน้าต่อไป**

© ค.ศ. ๒๕๖๓ นายอรรถวิทย์ ชีวอนันต์ สำนักส่งเสริมและพัฒนาคุณภาพชีวิตคนพิการ ศูนย์เทคโนโลยีทางการศึกษา สำนักงานส่งเสริมการศึกษานานาชาติไทย เลข ๑4

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” หน้า 4 – 6


หน้าที่ 4

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

เริ่มต้นใหม่

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\sin \frac{\pi}{12} \approx \frac{13}{50}$ จงหาค่าประมาณของ

วิธีทำ

1) $\sin \frac{11\pi}{12}$ 2) $\cos \frac{11\pi}{12}$

เฉลย

1) $\sin \frac{11\pi}{12} = \sin(\pi - \frac{\pi}{12})$
 $= \sin \frac{\pi}{12} \approx \frac{13}{50}$

2) $\cos \frac{11\pi}{12} = \cos(\pi - \frac{\pi}{12})$
 $= -\cos \frac{\pi}{12} \approx -\frac{47}{50}$




ส่วนโค้ง pi - pi/12

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งยาว $\frac{\pi}{12}$ หน่วย
 เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา อยู่ในจุดภาคที่ 1
 ดังนั้น $\cos \frac{\pi}{12} \approx \frac{47}{50}$
 จะได้ $\cos \frac{11\pi}{12} = \cos(\pi - \frac{\pi}{12})$
 $= -\cos \frac{\pi}{12} \approx -\frac{47}{50}$

ส่วนโค้ง pi - pi/12

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งยาว $\frac{\pi}{12}$ หน่วย
 เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา อยู่ในจุดภาคที่ 1
 ดังนั้น $\cos \frac{\pi}{12} \approx \frac{47}{50}$
 จะได้ $\cos \frac{11\pi}{12} = \cos(\pi - \frac{\pi}{12})$
 $= -\cos \frac{\pi}{12} \approx -\frac{47}{50}$

ก่อนหน้า **หน้าต่อไป**

หน้าที่ 5

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

เริ่มต้นใหม่ **แสดง**

2. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคที่ 3 ($\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$)

จุด P(x', y') ให้ $P(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งยาว θ หน่วย
 ดังนั้น $y' = \sin \theta$ และ $x' = \cos \theta$
 ส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย
 ให้ $\alpha = \theta - \pi$ จะได้ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้ง P'B ยาว α หน่วย
 ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด $P(x', y')$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน
 จุด $P(x', y')$ เป็นภาพสะท้อนของจุด M โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน
 จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = -y$, $x' = -x$

ส่วนโค้ง pi + pi/12

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งยาว $\frac{\pi}{12}$ หน่วย
 เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา อยู่ในจุดภาคที่ 1
 ดังนั้น $\cos \frac{\pi}{12} \approx \frac{47}{50}$
 จะได้ $\cos \frac{11\pi}{12} = \cos(\pi - \frac{\pi}{12})$
 $= -\cos \frac{\pi}{12} \approx -\frac{47}{50}$

ก่อนหน้า **หน้าต่อไป**





หน้าที่ 6

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

เริ่มต้นใหม่

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{17}{100}$ จงหาค่าประมาณของ

วิธีทำ

1) $\sin \frac{19\pi}{18}$ 2) $\cos \frac{19\pi}{18}$

เฉลย

1) $\sin \frac{19\pi}{18} = \sin(\pi + \frac{\pi}{18})$
 $= -\sin \frac{\pi}{18} \approx -\frac{17}{100}$

2) $\cos \frac{19\pi}{18} = \cos(\pi + \frac{\pi}{18})$
 $= -\cos \frac{\pi}{18} \approx -\frac{98}{100}$

ส่วนโค้ง pi + pi/18

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งยาว $\frac{\pi}{18}$ หน่วย
 เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา อยู่ในจุดภาคที่ 1
 ดังนั้น $\cos \frac{\pi}{18} \approx \frac{98}{100}$
 จะได้ $\cos \frac{19\pi}{18} = \cos(\pi + \frac{\pi}{18})$
 $= -\cos \frac{\pi}{18} \approx -\frac{98}{100}$

ส่วนโค้ง pi + pi/18

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งยาว $\frac{\pi}{18}$ หน่วย
 เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา อยู่ในจุดภาคที่ 1
 ดังนั้น $\cos \frac{\pi}{18} \approx \frac{98}{100}$
 จะได้ $\cos \frac{19\pi}{18} = \cos(\pi + \frac{\pi}{18})$
 $= -\cos \frac{\pi}{18} \approx -\frac{98}{100}$

ก่อนหน้า **หน้าต่อไป**

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” หน้า 7 – 9



"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

หน้าที่ 7

เริ่มต้นใหม่ **แสดง**

3. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคที่ 4 ($-\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$)

ส่วนโค้ง 2pi เนื่องจากเส้นรอบวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

จุด P'(x',y') ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ส่วนโค้ง AP' ดังนั้น $y' = \sin \theta$ และ $x' = \cos \theta$

ส่วนโค้ง AP ให้ $\alpha = 2\pi - \theta$ จะได้ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น ส่วนโค้ง PA ยาว α หน่วย

ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่า ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = -y, x' = x$



อธิบาย

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin \alpha$ และ $x = \cos \alpha$

แต่ $-y = y' = \sin \theta = \sin(2\pi - \alpha)$


และ $x = x' = \cos \theta = \cos(2\pi - \alpha)$

สรุป

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

ก่อนหน้า จัดทำโดย นายอติฤทธิ์ สิงห์มงคล สำนักวิชา ศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี กรุงเทพมหานคร ฉบับแก้ไข วันที่ 8/2/50 โทร 0833207728 สำหรับงานขอใช้สิทธิ์ในการพัฒนาสื่อการศึกษา โทร 04 **หน้าต่อไป**



"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

หน้าที่ 8

เริ่มต้นใหม่

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ $\frac{11\pi}{6}$

วิธีทำ

อธิบาย 1-1 1) $\sin \frac{11\pi}{6} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6})$

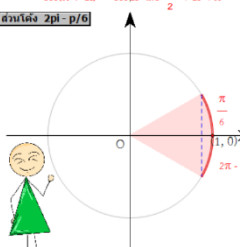
อธิบาย 1-2 $= -\sin \frac{\pi}{6}$

อธิบาย 1-3 $= -\frac{1}{2}$

อธิบาย 2-1 2) $\cos \frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6})$

อธิบาย 2-2 $= \cos \frac{\pi}{6}$

อธิบาย 2-3 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$



สมบัติ

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

ส่วนโค้ง 2pi - p/6

ก่อนหน้า จัดทำโดย นายอติฤทธิ์ สิงห์มงคล สำนักวิชา ศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี กรุงเทพมหานคร ฉบับแก้ไข วันที่ 8/2/50 โทร 0833207728 สำหรับงานขอใช้สิทธิ์ในการพัฒนาสื่อการศึกษา โทร 04 **หน้าต่อไป**



"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

หน้าที่ 9

เริ่มต้นใหม่ **แสดง**

4. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $2n\pi + \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม





อธิบาย

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยมีความยาว 2π หน่วย

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $2n\pi + \theta$ หน่วย

จะเป็นจุดเดียวกับส่วนปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

$\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta$

$\cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta$




ส่วนโค้ง theta ตามเข็มนาฬิกา

ส่วนโค้ง 2npi + theta ตามเข็มนาฬิกา

ส่วนโค้ง 2npi + theta ตามเข็มนาฬิกา

ก่อนหน้า จัดทำโดย นายอติฤทธิ์ สิงห์มงคล สำนักวิชา ศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี กรุงเทพมหานคร ฉบับแก้ไข วันที่ 8/2/50 โทร 0833207728 สำหรับงานขอใช้สิทธิ์ในการพัฒนาสื่อการศึกษา โทร 04 **หน้าต่อไป**

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” หน้า 10 – 12

หน้าที่ 10

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

เริ่มต้นใหม่
ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\sin \frac{33\pi}{4}$ และ $\cos(-\frac{17\pi}{3})$

วิธีทำ

ขั้นตอน 1-1
ขั้นตอน 1-2
ขั้นตอน 1-3

$$1) \sin \frac{33\pi}{4} = \sin(8\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$= \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ขั้นตอน 2-1
ขั้นตอน 2-2
ขั้นตอน 2-3
ขั้นตอน 2-4
ขั้นตอน 2-5
ขั้นตอน 2-6

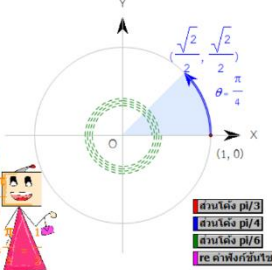
$$2) \cos(-\frac{17\pi}{3}) = \cos(-6\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$= \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}$$




ส่วนโค้ง $8\pi + \pi/4$
ส่วนโค้ง $-6\pi + \pi/3$
ส่วนโค้ง $-4\pi + (-5\pi/3)$

สมบัติ



ส่วนโค้ง $\pi/4$
ส่วนโค้ง $\pi/3$
ส่วนโค้ง $\pi/6$
เรากำลังหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ก่อนหน้า จัดทำโดย นายอรรถสิทธิ์ สิงขรทอง สำนักส่งเสริมวิชาการและงานทะเบียน กรมส่งเสริมการค้าระหว่างประเทศ กระทรวงพาณิชย์ กรุงเทพฯ 10120 โทร 0833207728 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 34 **หน้าต่อไป**

หน้าที่ 11

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$

ขั้นตอน 1
ขั้นตอน 2
ขั้นตอน 3
ขั้นตอน 4

ขั้นตอน 1
ขั้นตอน 2
ขั้นตอน 3
ขั้นตอน 4

$$1) \sin \frac{5\pi}{8} = \sin(\pi - \frac{3\pi}{8})$$

$$= \sin \frac{3\pi}{8}$$

$$\cos \frac{5\pi}{8} = \cos(\pi - \frac{3\pi}{8})$$

$$= -\cos \frac{3\pi}{8}$$

ขั้นตอน 2
ขั้นตอน 3
ขั้นตอน 4

ขั้นตอน 1
ขั้นตอน 2
ขั้นตอน 3
ขั้นตอน 4

$$2) \sin \frac{7\pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$= -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \frac{7\pi}{6} = \cos(\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$= -\cos \frac{\pi}{6}$$

สมบัติ

สมบัติ

สมบัติ

สมบัติ

สมบัติ

สมบัติ

ก่อนหน้า จัดทำโดย นายอรรถสิทธิ์ สิงขรทอง สำนักส่งเสริมวิชาการและงานทะเบียน กรมส่งเสริมการค้าระหว่างประเทศ กระทรวงพาณิชย์ กรุงเทพฯ 10120 โทร 0833207728 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 34 **หน้าต่อไป**





หน้าที่ 12

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$

ขั้นตอน 3
ขั้นตอน 4
ขั้นตอน 5
ขั้นตอน 6

ขั้นตอน 1
ขั้นตอน 2
ขั้นตอน 3
ขั้นตอน 4
ขั้นตอน 5
ขั้นตอน 6

$$3) \sin(-\frac{16\pi}{7}) = -\sin \frac{16\pi}{7}$$

$$= -\sin(2\pi + \frac{2\pi}{7})$$

$$= -\sin \frac{2\pi}{7}$$

$$\cos(-\frac{16\pi}{7}) = \cos \frac{16\pi}{7}$$

$$= \cos(2\pi + \frac{2\pi}{7})$$

$$= \cos \frac{2\pi}{7}$$

ขั้นตอน 1
ขั้นตอน 2
ขั้นตอน 3
ขั้นตอน 4
ขั้นตอน 5
ขั้นตอน 6

ขั้นตอน 1
ขั้นตอน 2
ขั้นตอน 3
ขั้นตอน 4
ขั้นตอน 5
ขั้นตอน 6

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta$$

สมบัติ

สมบัติ

สมบัติ




สมบัติ

สมบัติ

สมบัติ

ก่อนหน้า จัดทำโดย นายอรรถสิทธิ์ สิงขรทอง สำนักส่งเสริมวิชาการและงานทะเบียน กรมส่งเสริมการค้าระหว่างประเทศ กระทรวงพาณิชย์ กรุงเทพฯ 10120 โทร 0833207728 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 34 **หน้าต่อไป**

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” หน้า 13 – 15

หน้าที่ 13

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

1) $-\frac{7\pi}{4}$ 2) $\frac{17\pi}{3}$

ขั้นตอนที่ 1)

ขั้นตอนที่ 1) $\sin(-\frac{7\pi}{4}) = -\sin \frac{7\pi}{4}$

ขั้นตอนที่ 2) $= -\sin(2\pi - \frac{\pi}{4})$

ขั้นตอนที่ 3) $= -(-\sin \frac{\pi}{4})$

ขั้นตอนที่ 4) $= \sin \frac{\pi}{4}$

ขั้นตอนที่ 5) $= \sin \frac{\pi}{4}$

ขั้นตอนที่ 6) $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

ขั้นตอนที่ 7)

ขั้นตอนที่ 8)

ขั้นตอนที่ 9)

สมมติ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

สมมติ $\sin(2\pi - \alpha) = \sin \alpha$

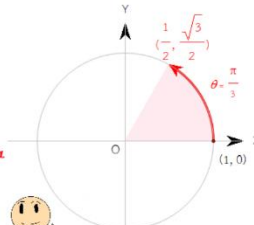
สมมติ $\cos(-\frac{7\pi}{4}) = \cos \frac{7\pi}{4}$

สมมติ $\cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4}$

สมมติ $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

สมมติ $\cos(\theta) = \cos \theta$

สมมติ $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$



ส่วนโค้ง pi/3
ส่วนโค้ง pi/4
ส่วนโค้ง pi/6
re ค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ก่อนหน้า **หน้าต่อไป**





หน้าที่ 14

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

1) $-\frac{7\pi}{4}$ 2) $\frac{17\pi}{3}$

ขั้นตอนที่ 2)

ขั้นตอนที่ 1) $\sin \frac{17\pi}{3} = \sin(4\pi + \frac{5\pi}{3})$

ขั้นตอนที่ 2) $= \sin \frac{5\pi}{3}$

ขั้นตอนที่ 3) $= \sin(2\pi - \frac{\pi}{3})$

ขั้นตอนที่ 4) $= -\sin \frac{\pi}{3}$

ขั้นตอนที่ 5) $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ขั้นตอนที่ 6)

ขั้นตอนที่ 7)

ขั้นตอนที่ 8)

ขั้นตอนที่ 9)

ขั้นตอนที่ 10)

สมมติ $\cos \frac{17\pi}{3} = \cos(4\pi + \frac{5\pi}{3})$

สมมติ $= \cos \frac{5\pi}{3}$

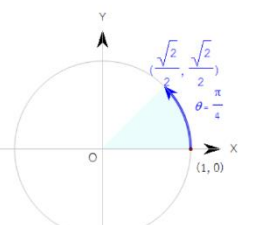
สมมติ $= \cos(2\pi - \frac{\pi}{3})$

สมมติ $= \cos \frac{\pi}{3}$

สมมติ $= \frac{1}{2}$


สมมติ

สมมติ



ส่วนโค้ง pi/3
ส่วนโค้ง pi/4
ส่วนโค้ง pi/6
re ค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ก่อนหน้า **หน้าต่อไป**





หน้าที่ 15

"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ"

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่า $\sin \frac{8\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}$

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1) $\sin \frac{8\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \sin \frac{2\pi}{3}$

ขั้นตอนที่ 2) $= \sin \frac{2\pi}{3}$

ขั้นตอนที่ 3) $= \sin(\pi - \frac{\pi}{3})$

ขั้นตอนที่ 4) $= \sin \frac{\pi}{3}$

ขั้นตอนที่ 5) $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ขั้นตอนที่ 6) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ขั้นตอนที่ 7)

ขั้นตอนที่ 8)

ขั้นตอนที่ 9)

ขั้นตอนที่ 10)

สมมติ $\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$

สมมติ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

สมมติ $\sin \frac{8\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{11\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}$

สมมติ $= (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})(-\frac{\sqrt{3}}{2})$

สมมติ $= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

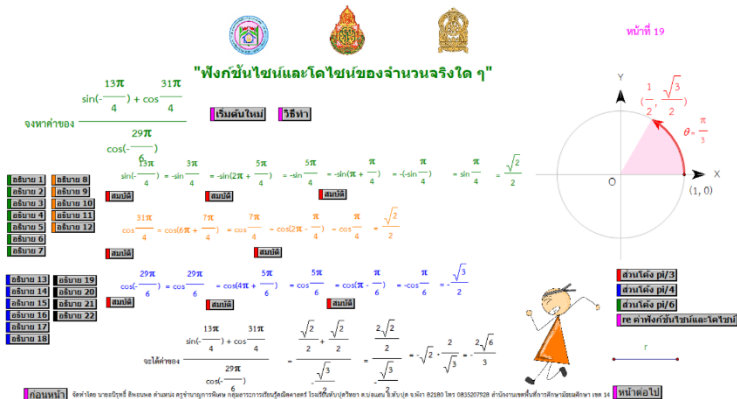
สมมติ $\sin(2\pi - \alpha) = \sin \alpha$

สมมติ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$



ส่วนโค้ง pi/3
ส่วนโค้ง pi/4
ส่วนโค้ง pi/6
re ค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

ก่อนหน้า **หน้าต่อไป**



เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
ด้านความรู้ 1) เขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 2 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 5 - 6 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 2 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 2 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 3 และข้อ 4 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 9 - 10 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 3 และข้อ 4 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 3 และข้อ 4 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 3 และข้อ 4 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ต่ำกว่า 3 หรือมีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 3 และข้อ 4 แต่ไม่ถูกต้อง สมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้	สามารถแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 3 - ข้อที่ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 9 - 10 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 3 - ข้อที่ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 3 - ข้อที่ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 3 และข้อ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ต่ำกว่า 3 ข้อ หรือมีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 3 - ข้อที่ 4 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้	สามารถแสดงวิธีทำโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 - 6 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อที่ 5 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” โดยคัดลอกจากผู้อื่น
2) มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อยโดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อยบางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน	แต่งกายไม่เรียบร้อยหรือไม่แก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน
3) ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรงเวลา	การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ไม่ครบทุกข้อหรือครบทุกข้อแต่ไม่ถูกต้องหรือไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 3 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ”

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ ได้	แสดงวิธีหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ ในใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 3 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์	แสดงวิธีหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ ในใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 3 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์เป็นส่วนใหญ่	แสดงวิธีหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ ในใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 3 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์เป็นบางส่วน	มีร่องรอยของความพยายามในการแสดงวิธีหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ ในใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 3 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การคิดในการเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ได้	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 ข้อ	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 1 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
3) ใช้การแก้ปัญหาหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 - 8 ข้อ	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 5 ข้อ	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์” ของจำนวนจริงใด ๆ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
4) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	ไม่มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน ไม่แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มหรือช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
5) ใช้เทคโนโลยี เพื่อ ทบทวนเนื้อหาจากสื่อ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ของจำนวนจริงใด ๆ”	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์ของจำนวน จริงใด ๆ” ทบทวน และสรุปเนื้อหาทุก ครั้ง	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์ของจำนวน จริงใด ๆ” ทบทวน และสรุปเนื้อหาเป็น ส่วนใหญ่	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์ของจำนวน จริงใด ๆ” ทบทวน และสรุปเนื้อหาเป็น บางครั้ง	ไม่ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และ โคไซน์ของจำนวน จริงใด ๆ” ทบทวน และสรุปเนื้อหา

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน
พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ :
บริษัท ธนัทธการพิมพ์ จำกัด.
- พิชิต ฤทธิ์จัญญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : แฮสออฟ
เคอร์มิสท์.
- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็น
สำคัญ.** พระนครศรีอยุธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัย
เทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.
- ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฏานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-
NET คณิตศาสตร์ ม.6.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.**
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตาม
หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ:
โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.** พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย.
- สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 5. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.
- อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรง
พิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.