แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201 **ภาคเรียนที่ 1**

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

สาระการเรียนรู้ กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ **เวลา 3 ชั่วโมง**

1. ผลการเรียนรู้

ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

กฎของโคไซน์ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ จะได้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

กฎของโคไซน์

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 ใช้กฎของโคไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้

4.1.2 ใช้กฎของไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การแก้ปัญหาในการแก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์ได้

4.2.2 เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.2 มีวินัย

4.3.3 ใฝ่เรียนรู้

4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

4.4.1 ใช้การสื่อสารนำเสนอการแก้ปัญหาที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์ได้

4.4.2 ใช้การคิดในแก้ปัญหาโดยใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ได้

4.4.3 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้

4.4.4 ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" ได้

5. เนื้อหา/สาระ

กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงหรือมุม สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติอาจนำมาใช้ในการหาความยาวของด้านและขนาดของมุมของรูปหลายเหลี่ยมได้ โดยเฉพาะรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมและฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

กฎของโคไซน์

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ

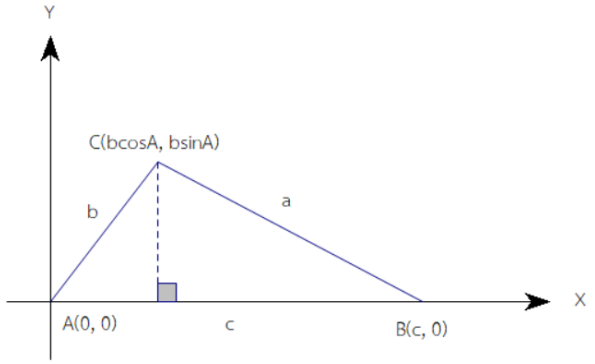
จะได้

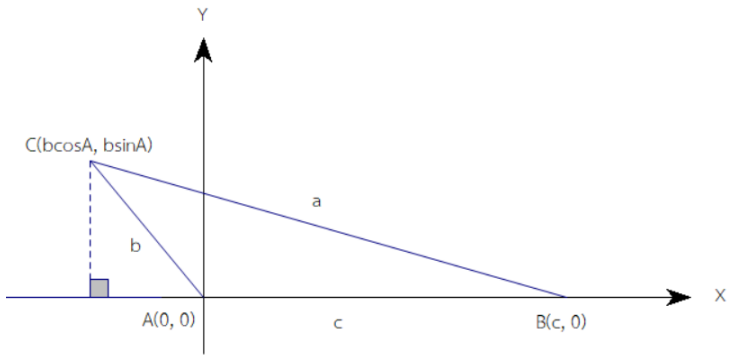
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

พิสูจน์ ให้มุม A ของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน





จากรูปจุด A มีพิกัด (0, 0)

และจุด B มีพิกัด (c, 0)

จะได้ จุด C มีพิกัด $(b\cos A, b\sin A)$

และ $a = \sqrt{(b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2}$

$$a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A$$

$$= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A$$

$$= b^2\left(\cos^2 A + \sin^2 A\right) - 2bc\cos A + c^2$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

ดังนั้น $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

สำหรับ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ และ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

กฎของโคไซน์นี้ใช้หาความยาวของด้านหรือขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม เมื่อกำหนดความยาวของด้านบางด้านและขนาดของมุมบางมุม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า a = 5, b = 7 และ c = 10 จงหาขนาดของมุม A

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $5^2 = 7^2 + 10^2 - 2(7)(10)\cos A$

$$25 = 49 + 100 - 140\cos A$$

$$140\cos A = 124$$

$$\cos A = \frac{124}{140}$$

$$\cos A \approx 0.8857$$

ดังนั้น ขนาดของมุม A ประมาณ 28° □

ตัวอย่างที่ 2 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า a = 12, b = 7, $C = 40^\circ$ และ $\cos 40^\circ \approx 0.766$ จงหาค่าของ c

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

จะได้ $c^2 = 12^2 + 7^2 - 2(12)(7)\cos 40^\circ$

$$c^2 \approx 144 + 49 - 2(12)(7)(0.766)$$

$$\approx 193 - 128.688$$

$$\approx 64.312$$

ดังนั้น ≈ 8.0193 หน่วย □

ตัวอย่างที่ 3 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า a = 6, c = 8, $B = 120^\circ$ จงหาค่าของ b

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

จะได้ $b^2 = 8^2 + 6^2 - 2(8)(6)\cos 120^\circ$

$$b^2 = 64 + 36 - 96\cos\left(180^\circ - 60^\circ\right)$$

$$b^2 = 100 - 96\cos\left(-60^\circ\right)$$

$$= 100 + 96\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 100 + 48$$

$$= 148$$

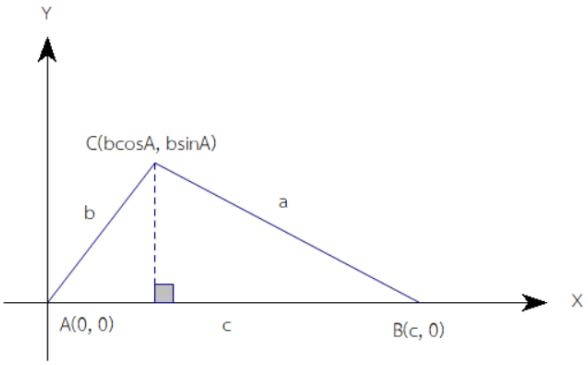
ดังนั้น $b = 2\sqrt{37}$ หน่วย □

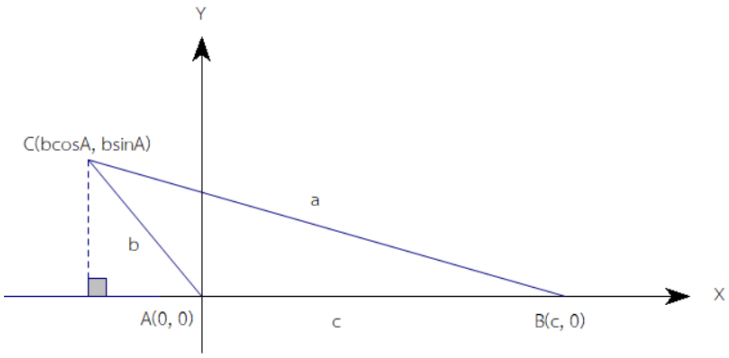
กฎของไซน์

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ

จะได้ $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

พิสูจน์ ให้มุม A ของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน





จากรูปจุด A มีพิกัด (0, 0)

และจุด B มีพิกัด (c, 0)

จะได้ จุด C มีพิกัด $(b\cos A, b\sin A)$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \times$ ความสูง $\times$ ความยาวของฐาน

$$= \frac{1}{2}(b\sin A)(c)$$

$$= \frac{1}{2}bc\sin A$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้มุม B และมุม C อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน แล้วสามารถพิสูจน์ได้ว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}ca\sin B$ และ $\frac{1}{2}ab\sin C$ ตามลำดับ

นั่นคือ $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

เนื่องจาก a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

$$\frac{1}{2}bc\sin A\left(\frac{2}{abc}\right) = \frac{1}{2}ca\sin B\left(\frac{2}{abc}\right) = \frac{1}{2}ab\sin C\left(\frac{2}{abc}\right)$$

ดังนั้น $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

กฎของไซน์นี้ใช้หาความยาวของด้านหรือขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $a = 10, B = 42^\circ, C = 51^\circ, \sin 42^\circ \approx 0.6691$ และ $\sin 87^\circ \approx 0.9986$ จงหาค่าของ b

วิธีทำ เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$

ดังนั้น $A = 180^\circ - (B + C)$

$A = 180^\circ - \left(42^\circ + 51^\circ\right)$

$= 87^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 87^\circ}{10} = \frac{\sin 42^\circ}{b}$

$b = \frac{10\sin 42^\circ}{\sin 87^\circ}$

จะได้ $\approx \frac{10(0.6691)}{0.9986}$

ดังนั้น ≈ 6.7 หน่วย □

ตัวอย่างที่ 5 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $a = 2.5, A = 30^\circ$ และ $b = 3.41$ จงหาค่าขนาดของมุม B

วิธีทำ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 30^\circ}{2.5} = \frac{\sin B}{3.41}$

$$\sin B = \frac{3.41\sin 30^\circ}{2.5}$$
$$= \frac{3.41(0.5)}{2.5}$$
$$= 0.682$$

เนื่องจาก $\sin B > 0$ ดังนั้น มุม B อาจเป็นมุมแหลม $\left(0^\circ < B < 90^\circ\right)$

หรือมุม B อาจเป็นมุมป้าน $\left(90^\circ < B < 180^\circ\right)$

พิจารณา $0^\circ < B < 90^\circ$ จาก $\sin B = 0.682$ จะได้ $\arcsin 0.682 = B$

เมื่อใช้เครื่องคำนวณ จะได้ $\arcsin 0.682 \approx 43^\circ$

ดังนั้น $B \approx 43^\circ$

พิจารณา $90^\circ < B < 180^\circ$ เนื่องจาก $\sin\theta = \sin\left(180^\circ - \theta\right)$

นั่นคือ $\sin B = \sin\left(180^\circ - B\right)$

ดังนั้น $B \approx 180^\circ - 43^\circ$ หรือ $B \approx 137^\circ$

ถ้า $B \approx 43^\circ$ จะได้ $A + B \approx 30^\circ + 43^\circ \approx 73^\circ$ ซึ่งน้อยกว่า 180°

แสดงว่า มุม B เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

ถ้า $B \approx 137^\circ$ จะได้ $A + B \approx 30^\circ + 137^\circ \approx 167^\circ$ ซึ่งน้อยกว่า 180°

แสดงว่า มุม B เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

ดังนั้น ขนาดของมุม B คือ ประมาณ 43° หรือ 137° □

ตัวอย่างที่ 6 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $a = 32, A = 30^\circ$ และ $b = 24$ จงหาค่าขนาดของมุม B

วิธีทำ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 30^\circ}{32} = \frac{\sin B}{24}$

$$\sin B = \frac{24\sin 30^\circ}{32}$$
$$= \frac{24(0.5)}{32}$$
$$= 0.375$$

เนื่องจาก $\sin B > 0$ ดังนั้น มุม B อาจเป็นมุมแหลม $\left(0^\circ < B < 90^\circ\right)$

หรือมุม B อาจเป็นมุมป้าน $\left(90^\circ < B < 180^\circ\right)$

พิจารณา $0^\circ < B < 90^\circ$ จาก $\sin B = 0.375$ จะได้ $\arcsin 0.375 = B$

เมื่อใช้เครื่องคำนวณ จะได้ $\arcsin 0.375 \approx 22^\circ$

ดังนั้น $B \approx 22^\circ$

พิจารณา $90^\circ < B < 180^\circ$ เนื่องจาก $\sin\theta = \sin\left(180^\circ - \theta\right)$

นั่นคือ $\sin B = \sin\left(180^\circ - B\right)$

ดังนั้น $B \approx 180^\circ - 22^\circ$ หรือ $B \approx 158^\circ$

ถ้า $B \approx 22^\circ$ จะได้ $A + B \approx 30^\circ + 22^\circ \approx 52^\circ$ ซึ่งน้อยกว่า 180°

แสดงว่า มุม B เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

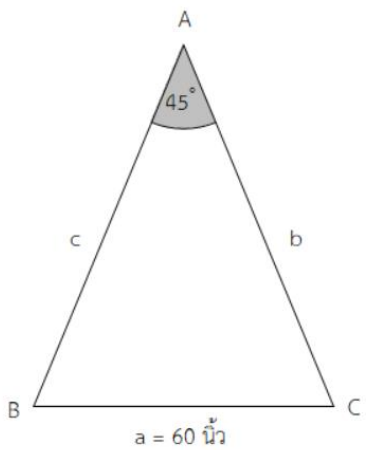
ถ้า $B \approx 158^\circ$ จะได้ $A + B \approx 30^\circ + 158^\circ \approx 188^\circ$ ซึ่งมากกว่า 180°

แสดงว่า มุม B ไม่เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

ดังนั้น ขนาดของมุม B มีเพียงค่าเดียวคือประมาณ 22° □

ตัวอย่างที่ 7 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งมีฐานยาว 60 นิ้ว และขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกับฐานเท่ากับ 45° จงหาความยาวของเส้นรอบรูป

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนรูปได้ดังนี้



เนื่องจาก ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $b = c$

จากกฎของโคไซน์

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้

$$60^2 = b^2 + b^2 - 2bb\cos 45^\circ$$

$$60^2 = 2b^2 - 2b^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$3600 = \left(2 - \sqrt{2}\right)b^2$$

$$b^2 = \frac{3600}{2-\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{60}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \quad \text{นิ้ว}$$

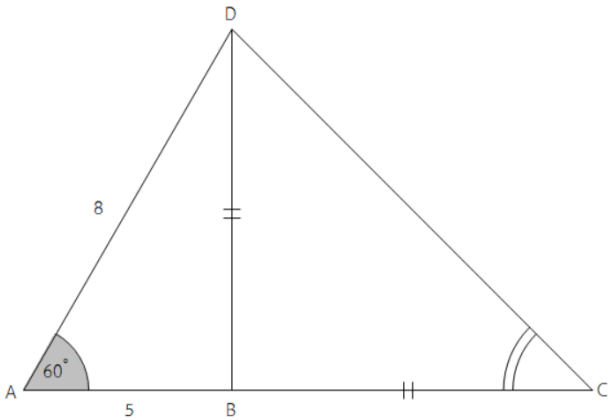
และจาก $b = c$ จะได้ $c = \frac{60}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ นิ้ว

ดังนั้น ความยาวของเส้นรอบรูป คือ $a + b + c = 60 + \frac{60}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \frac{60}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$$= 60 + \frac{120}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \quad \text{นิ้ว} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 8 ให้ ACD เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $A = 60^\circ$ และ B เป็นจุดบนด้าน AC โดยที่ $AB = 5$ หน่วย และ $AD = 8$ หน่วย ถ้า $BC = BD$ แล้ว จงหา $\sin A\hat{C}D$

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนรูปได้ดังนี้



พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD

จากกฎของโคไซน์ $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2(AD)(AB)\cos A$

$$= 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos 60^\circ$$

$$= 64 + 25 - 80\left(\frac{1}{2}\right) = 49$$

จะได้ $BD = 7$

จาก $BC = BD$

จะได้ $BC = 7$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD

จากกฎของโคไซน์ $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2(AC)(AD)\cos A$

$$= 12^2 + 8^2 - 2(12)(8)\cos 60^\circ$$
$$= 144 + 64 - 2(12)(8)\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= 208 - 96 = 112$$

จะได้ $CD = \sqrt{112}$

จากกฎของไซน์ $\dfrac{\sin C\hat{A}D}{CD} = \dfrac{\sin A\hat{C}D}{AD}$

$$\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{112}} = \frac{\sin A\hat{C}D}{8}$$

ดังนั้น $\sin A\hat{C}D = \dfrac{8\sin 60^\circ}{\sqrt{112}}$

$$= \frac{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{112}}$$
$$= \frac{8\times\sqrt{3}}{4\sqrt{7}\times 2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$
$$= \frac{\sqrt{21}}{7}$$ □

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) ใช้กฎของโคไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 1	- แบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 1 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 1 ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้กฎของไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 2	- แบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 2 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 2 ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาในการแก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5	- แบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาในการแก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5	- แบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต	ตรวจการทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”	- แบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีวินัย อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
3) ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึกการเข้าเรียน - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนใฝ่เรียนรู้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	- การส่งแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”	- แบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมุ่งมั่นในการทำงานอยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การคิดในแก้ปัญหาโดยใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ได้	ตรวจใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”	- ใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การคิดในแก้ปัญหาการแก้สมการตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การสื่อสารนำเสนอการแก้ปัญหาที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์ได้	ตรวจใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”	- ใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การสื่อสารในการนำเสนอพิสูจน์เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ได้	ตรวจการใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง	- สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”	นักเรียนใช้เทคโนโลยีเพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
	“กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”	- แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	“กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

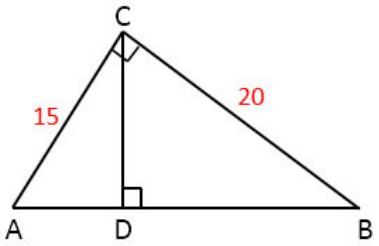
7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

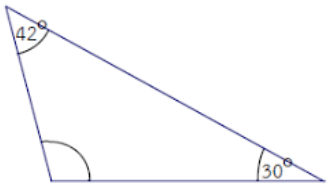
ขั้นเตรียม

7.1 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน

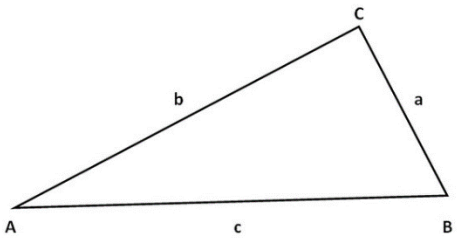
7.2 ครูยกตัวอย่างรูปสามเหลี่ยมดังรูปที่ 1 รูปที่ 2 และรูปที่ 3



รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3

7.3 ครูถามนักเรียน จากรูปที่ 1 รูปที่ 2 และรูปที่ 3 นักเรียนสามารถหาความยาวของด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้อย่างไร

แนวคำตอบ ใช้การวัดความยาวด้านและการวัดมุม

ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ใช้ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมีขนาด 180 องศา

ใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขั้นสอนและอธิบายทฤษฎี

7.4 ครูอธิบายกฎของโคไซน์ โดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" (หน้า 1 – 4) ควบคู่กับให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" โดยการสนทนาถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน

ชั่วโมงที่ 2

7.5 ครูทบทวนกฎของโคไซน์โดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" (หน้า 1 – 4) ประกอบ

7.6 ครูอธิบายกฎของไซน์ โดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" (หน้า 5 – 10) ควบคู่กับให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" โดยการสนทนาถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน

ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.7 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" ในชั่วโมงที่ ประกอบครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 3

7.8 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" โดยครูสนทนาถามตอบกับนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม หน้าชั้นเรียน ครูอธิบายและนักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมอธิบายเพิ่มเติม

7.9 ครูอธิบายเฉลยใบงาน "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" เพิ่มเติม โดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" (หน้า 11 – 20) ร่วมการสนทนาถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน

ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.10 จากการทำใบงาน "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" และศึกษาใบความรู้ "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" ให้นักเรียนสรุปกฎของโคไซน์และกฎของไซน์ลงในสมุดหรือกระดาษ A4 เพื่อนำไปใช้ต่อไป

ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.11 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” เป็นการบ้าน

7.12 มอบหมายให้นักเรียนทบทวน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” โดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- ใบความรู้ “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” - ใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” - แบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”	สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้ 1) ใช้กฎของโคไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้				
2) ใช้กฎของไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาในการแก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์ได้				
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้				

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต				
2) มีวินัย				
3) ใฝ่เรียนรู้				
4) มุ่งมั่นในการทำงาน				
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารนำเสนอการแก้ปัญหาที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์ได้				
2) ใช้การคิดในแก้ปัญหาโดยใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ได้				
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" ได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

ใบความรู้ “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”

จุดประสงค์การเรียนรู้

1) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้
2) ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้

กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงหรือมุม สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติอาจนำมาใช้ในการหาความยาวของด้านและขนาดของมุมของรูปหลายเหลี่ยมได้ โดยเฉพาะรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมและฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

กฎของโคไซน์

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ

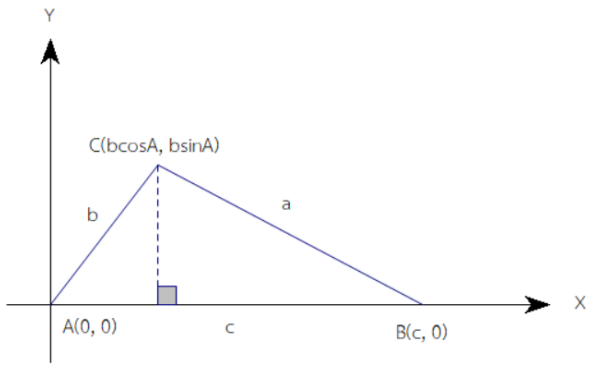
จะได้

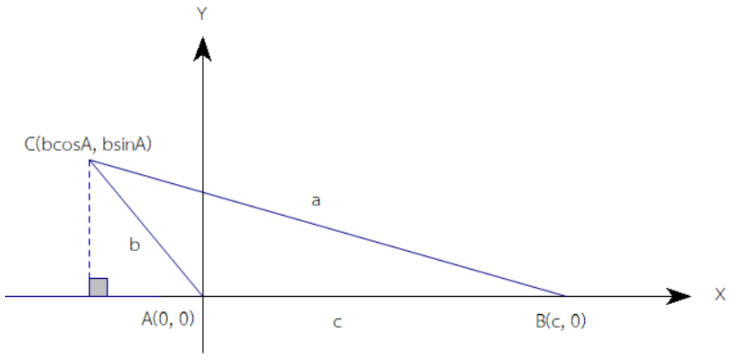
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

พิสูจน์ ให้มุม A ของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน





จากรูปจุด A มีพิกัด (0, 0)

และจุด B มีพิกัด (c, 0)

จะได้ จุด C มีพิกัด $(b\cos A, b\sin A)$

และ $a = \sqrt{(b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2}$

$$a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A$$

$$= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A$$

$$= b^2\left(\cos^2 A + \sin^2 A\right) - 2bc\cos A + c^2$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

ดังนั้น $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

สำหรับ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ และ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

กฎของโคไซน์นี้ใช้หาความยาวของด้านหรือขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม เมื่อกำหนดความยาวของด้านบางด้านและขนาดของมุมบางมุม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า a = 5, b = 7 และ c = 10 จงหาขนาดของมุม A

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $5^2 = 7^2 + 10^2 - 2(7)(10)\cos A$

$$25 = 49 + 100 - 140\cos A$$

$$140\cos A = 124$$

$$\cos A = \frac{124}{140}$$

$$\cos A \approx 0.8857$$

ดังนั้น ขนาดของมุม A ประมาณ 28° □

ตัวอย่างที่ 2 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า a = 12, b = 7, $C = 40^\circ$ และ $\cos 40^\circ \approx 0.766$ จงหาค่าของ c

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

จะได้ $c^2 = 12^2 + 7^2 - 2(12)(7)\cos 40^\circ$

$c^2 \approx 144 + 49 - 2(12)(7)(0.766)$

$\approx 193 - 128.688$

≈ 64.312

ดังนั้น ≈ 8.0193 หน่วย □

ตัวอย่างที่ 3 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า a = 6, c = 8, $B = 120^\circ$ จงหาค่าของ b

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

จะได้ $b^2 = 8^2 + 6^2 - 2(8)(6)\cos 120^\circ$

$b^2 = 64 + 36 - 96\cos\left(180^\circ - 60^\circ\right)$

$b^2 = 100 - 96\cos\left(-60^\circ\right)$

$= 100 + 96\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 100 + 48$

$= 148$

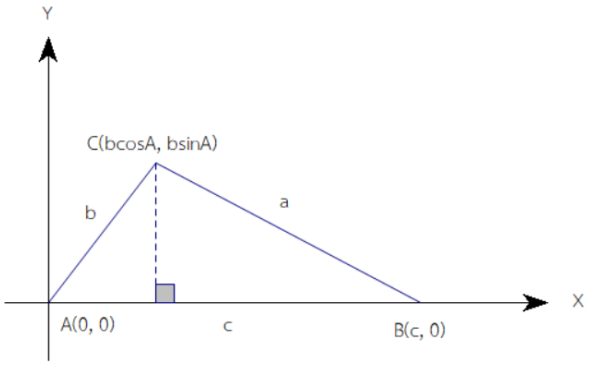
ดังนั้น $b = 2\sqrt{37}$ หน่วย □

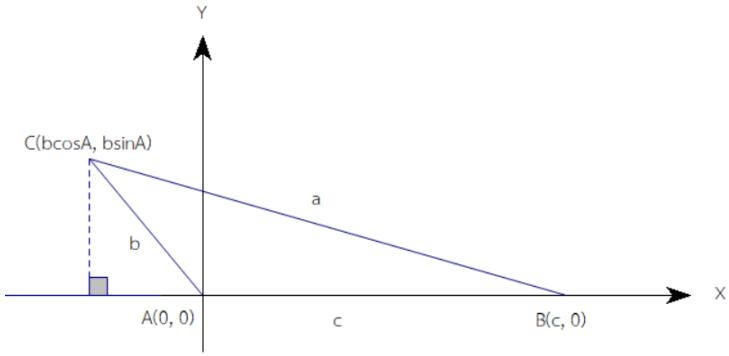
กฎของไซน์

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ

จะได้ $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

พิสูจน์ ให้มุม A ของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน





จากรูปจุด A มีพิกัด (0, 0)

และจุด B มีพิกัด (c, 0)

จะได้ จุด C มีพิกัด $(b\cos A, b\sin A)$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \times$ ความสูง $\times$ ความยาวของฐาน

$$= \frac{1}{2}(b\sin A)(c)$$

$$= \frac{1}{2}bc\sin A$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้มุม B และมุม C อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน แล้วสามารถพิสูจน์ได้ว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}ca\sin B$ และ $\frac{1}{2}ab\sin C$ ตามลำดับ

นั่นคือ $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

เนื่องจาก a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

$$\frac{1}{2}bc\sin A\left(\frac{2}{abc}\right) = \frac{1}{2}ca\sin B\left(\frac{2}{abc}\right) = \frac{1}{2}ab\sin C\left(\frac{2}{abc}\right)$$

ดังนั้น $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

กฎของไซน์นี้ใช้หาความยาวของด้านหรือขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $a = 10, B = 42^\circ, C = 51^\circ, \sin 42^\circ \approx 0.6691$ และ $\sin 87^\circ \approx 0.9986$ จงหาค่าของ b

วิธีทำ เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$

ดังนั้น $A = 180^\circ - (B + C)$

$A = 180^\circ - \left(42^\circ + 51^\circ\right)$

$= 87^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 87^\circ}{10} = \frac{\sin 42^\circ}{b}$

$b = \frac{10 \sin 42^\circ}{\sin 87^\circ}$

จะได้ $\approx \frac{10(0.6691)}{0.9986}$

ดังนั้น ≈ 6.7 หน่วย □

ตัวอย่างที่ 5 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $a = 2.5, A = 30^\circ$ และ $b = 3.41$ จงหาค่าขนาดของมุม B

วิธีทำ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 30^\circ}{2.5} = \frac{\sin B}{3.41}$

$\sin B = \frac{3.41 \sin 30^\circ}{2.5}$

$= \frac{3.41(0.5)}{2.5}$

$= 0.682$

เนื่องจาก $\sin B > 0$ ดังนั้น มุม B อาจเป็นมุมแหลม $\left(0^\circ < B < 90^\circ\right)$

หรือมุม B อาจเป็นมุมป้าน $\left(90^\circ < B < 180^\circ\right)$

พิจารณา $0^\circ < B < 90^\circ$ จาก $\sin B = 0.682$ จะได้ $\arcsin 0.682 = B$

เมื่อใช้เครื่องคำนวณ จะได้ $\arcsin 0.682 \approx 43^\circ$

ดังนั้น $B \approx 43^\circ$

พิจารณา $90^\circ < B < 180^\circ$ เนื่องจาก $\sin\theta = \sin\left(180^\circ - \theta\right)$

นั่นคือ $\sin B = \sin\left(180^\circ - B\right)$

ดังนั้น $B \approx 180^\circ - 43^\circ$ หรือ $B \approx 137^\circ$

ถ้า $B \approx 43^\circ$ จะได้ $A + B \approx 30^\circ + 43^\circ \approx 73^\circ$ ซึ่งน้อยกว่า 180°

แสดงว่า มุม B เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

ถ้า $B \approx 137^\circ$ จะได้ $A + B \approx 30^\circ + 137^\circ \approx 167^\circ$ ซึ่งน้อยกว่า 180°

แสดงว่า มุม B เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

ดังนั้น ขนาดของมุม B คือ ประมาณ 43° หรือ 137° □

ตัวอย่างที่ 6 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $a = 32, A = 30^\circ$ และ $b = 24$ จงหาค่าขนาดของมุม B

วิธีทำ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 30^\circ}{32} = \frac{\sin B}{24}$

$$\sin B = \frac{24\sin 30^\circ}{32}$$

$$= \frac{24(0.5)}{32}$$

$$= 0.375$$

เนื่องจาก $\sin B > 0$ ดังนั้น มุม B อาจเป็นมุมแหลม $\left(0^\circ < B < 90^\circ\right)$

หรือมุม B อาจเป็นมุมป้าน $\left(90^\circ < B < 180^\circ\right)$

พิจารณา $0^\circ < B < 90^\circ$ จาก $\sin B = 0.375$ จะได้ $\arcsin 0.375 = B$

เมื่อใช้เครื่องคำนวณ จะได้ $\arcsin 0.375 \approx 22^\circ$

ดังนั้น $B \approx 22^\circ$

พิจารณา $90^\circ < B < 180^\circ$ เนื่องจาก $\sin\theta = \sin\left(180^\circ - \theta\right)$

นั่นคือ $\sin B = \sin\left(180^\circ - B\right)$

ดังนั้น $B \approx 180^\circ - 22^\circ$ หรือ $B \approx 158^\circ$

ถ้า $B \approx 22^\circ$ จะได้ $A + B \approx 30^\circ + 22^\circ \approx 52^\circ$ ซึ่งน้อยกว่า 180°

แสดงว่า มุม B เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

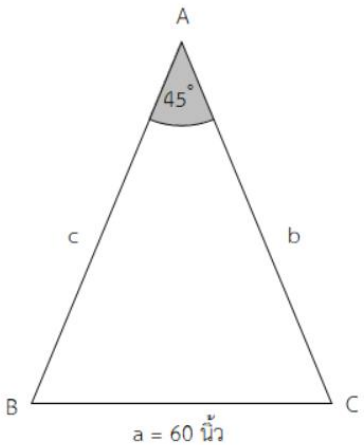
ถ้า $B \approx 158^\circ$ จะได้ $A + B \approx 30^\circ + 158^\circ \approx 188^\circ$ ซึ่งมากกว่า 180°

แสดงว่า มุม B ไม่เป็นมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

ดังนั้น ขนาดของมุม B มีเพียงค่าเดียวคือประมาณ 22° □

ตัวอย่างที่ 7 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งมีฐานยาว 60 นิ้ว และขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกับฐานเท่ากับ 45° จงหาความยาวของเส้นรอบรูป

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนรูปได้ดังนี้



เนื่องจาก ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $b = c$

จากกฎของโคไซน์

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

จะได้

$$60^2 = b^2 + b^2 - 2bb\cos 45^\circ$$

$$60^2 = 2b^2 - 2b^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$3600 = \left(2 - \sqrt{2}\right)b^2$$

$$b^2 = \frac{3600}{2-\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{60}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \quad \text{นิ้ว}$$

และจาก $b = c$

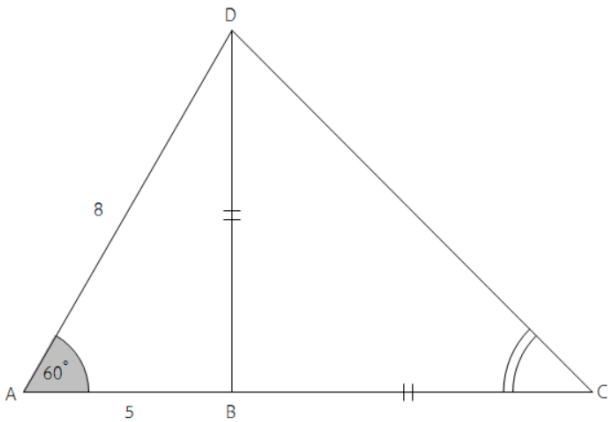
จะได้ $c = \frac{60}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ นิ้ว

ดังนั้น ความยาวของเส้นรอบรูป คือ $a+b+c=60+\frac{60}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\frac{60}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$=60+\frac{120}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ นิ้ว □

ตัวอย่างที่ 8 ให้ ACD เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $A=60^\circ$ และ B เป็นจุดบนด้าน AC โดยที่ $AB=5$ หน่วย และ $AD=8$ หน่วย ถ้า $BC=BD$ แล้ว จงหา $\sin A\hat{C}D$

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนรูปได้ดังนี้



พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD

จากกฎของโคไซน์ $BD^2=AD^2+AB^2-2(AD)(AB)\cos A$

$=8^2+5^2-2(8)(5)\cos 60^\circ$

$=64+25-80\left(\frac{1}{2}\right)=49$

จะได้ $BD=7$

จาก $BC=BD$

จะได้ $BC=7$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD

จากกฎของโคไซน์ $CD^2=AC^2+AD^2-2(AC)(AD)\cos A$

$=12^2+8^2-2(12)(8)\cos 60^\circ$

$=144+64-2(12)(8)\left(\frac{1}{2}\right)$

$=208-96=112$

จะได้ $CD=\sqrt{112}$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin C\hat{A}D}{CD} = \frac{\sin A\hat{C}D}{AD}$

$$\frac{\sin 60^{\circ}}{\sqrt{112}} = \frac{\sin A\hat{C}D}{8}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sin A\hat{C}D &= \frac{8\sin 60^{\circ}}{\sqrt{112}} \\
&= \frac{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{112}} \\
&= \frac{8\times\sqrt{3}}{4\sqrt{7}\times 2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \\
&= \frac{\sqrt{21}}{7}
\end{aligned}$$

□

ใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1) ใช้การสื่อสารนำเสนอการแก้ปัญหาที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์ได้
2) ใช้การคิดในแก้ปัญหาโดยใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. รับใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”
2. ให้นักเรียจับฉลากหมายเลขข้อที่ได้รับมอบหมายกลุ่มละ 1 ข้อ
3. ให้นักเรียนระดมความคิดในการแก้ปัญหาโจทย์โดยใช้ความรู้เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”
4. นักเรียนแต่ละกลุ่มออกนำเสนอวิธีทำโจทย์ของกลุ่มและบันทึกแลกเปลี่ยนเรียนรู้ลงในใบงาน
5. นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ แสดงความคิดเห็นและตอบคำถามเพิ่มเติม

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที

ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....

<table>
<tr><td rowspan="2">กลุ่มที่ 1</td><td colspan="2">โจทย์
ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $B = 120^{\circ}, C = 35^{\circ}$ และ $a = 15$ พร้อมเขียนภาพประกอบ</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ใช้กฎ</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">กลุ่มที่ 2</td><td colspan="2">โจทย์
ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $A = 102^{\circ}, B = 41^{\circ}$ และ $c = 52.8$ พร้อมเขียนภาพประกอบ</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ใช้กฎ</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">กลุ่มที่ 3</td><td colspan="2">โจทย์
ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ขนาดของมุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $a = 1, b = \sqrt{3}$ และ $c = 2$ พร้อมเขียนภาพประกอบ</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ใช้กฎ</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">กลุ่มที่ 4</td><td colspan="2">โจทย์
ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $B = 60^{\circ}, b = 3\sqrt{2}$ และ $c = 3 + \sqrt{3}$ พร้อมเขียนภาพประกอบ</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ใช้กฎ</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">กลุ่มที่ 5</td><td colspan="2">โจทย์
ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $B = 45^{\circ}, c = \sqrt{12}$ และ $b = \sqrt{8}$ พร้อมเขียนภาพประกอบ</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ใช้กฎ</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

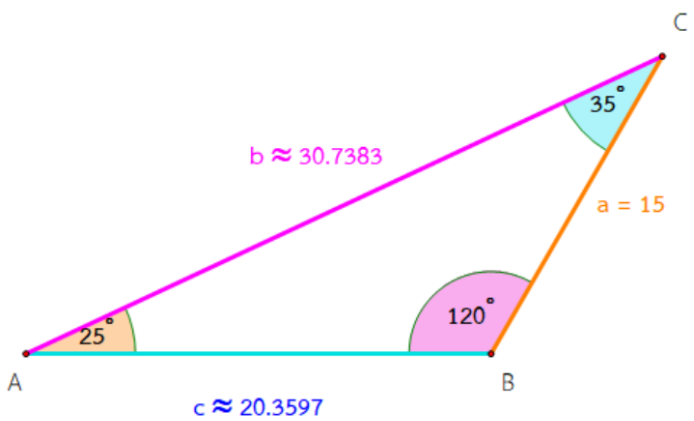
<table>
<tr><td rowspan="2">กลุ่มที่ 6</td><td colspan="2">โจทย์
ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ขนาดของมุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $a = 3, b = 4$ และ $c = 5$ พร้อมเขียนภาพประกอบ</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ใช้กฎ</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>**กลุ่มที่ 7**</td><td colspan="2">**โจทย์**
ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $B = 68^{\circ}, C = 64^{\circ}$ และ $b = 26$ พร้อมเขียนภาพประกอบ</td></tr>
<tr><td colspan="2">**วิธีทำ**</td><td>**ใช้กฎ**</td></tr>
<tr><td colspan="3">**ภาพ**</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">กลุ่มที่ 8</td><td colspan="2">โจทย์
ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ขนาดของมุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $a = 3, b = 5$ และ $c = 7$ พร้อมเขียนภาพประกอบ</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ใช้กฎ</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

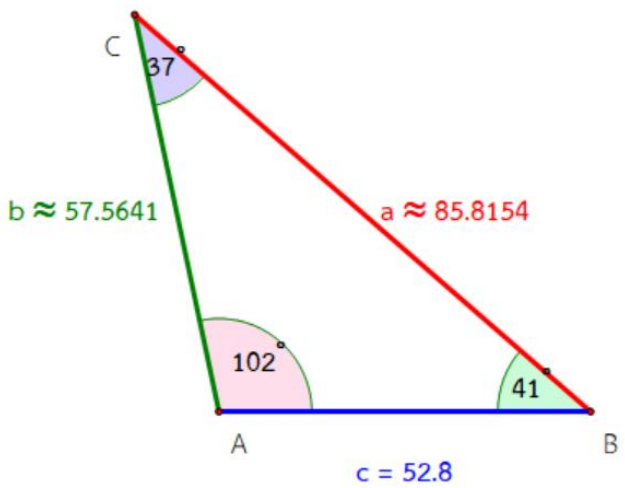
เฉลยใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”

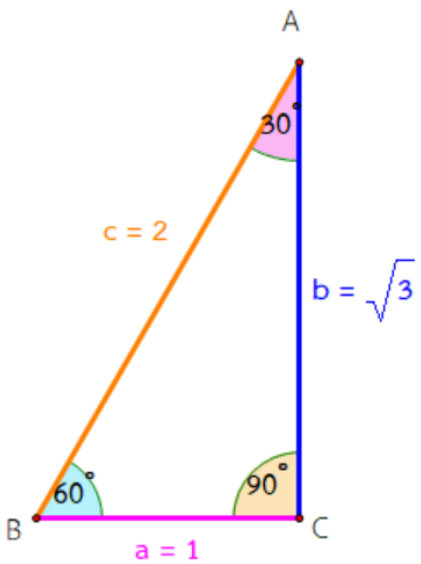
กลุ่มที่ 1	
เนื่องจาก $A+B+C=180^\circ$ จะได้ $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-\left(120^\circ+35^\circ\right)=25^\circ$ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}$ จะได้ $\frac{\sin 25^\circ}{15}=\frac{\sin 120^\circ}{b}$ $b=\frac{15\sin 120^\circ}{\sin 25^\circ}$ $\approx\frac{15(0.8660)}{0.4226}\approx 30.7383$ และจากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$ จะได้ $\frac{\sin 25^\circ}{15}=\frac{\sin 35^\circ}{c}$ $c=\frac{15\sin 35^\circ}{\sin 25^\circ}$ $\approx\frac{15(0.5736)}{(0.4226)}\approx 20.3597$ ดังนั้น ค่าของ $A=25^\circ$ $b\approx 30.7383$ และ $c\approx 20.3597$	**ใช้กฎ** ใช้กฎของไซน์
ภาพ	



กลุ่มที่ 2	
เนื่องจาก $A+B+C=180^\circ$ จะได้ $C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-\left(102^\circ+41^\circ\right)=37^\circ$ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$ จะได้ $\frac{\sin 102^\circ}{a}=\frac{\sin 37^\circ}{52.8}$ $a=\frac{52.8\sin 102^\circ}{\sin 37^\circ}$ $\approx\frac{52.8(0.9781)}{0.6018}\approx 85.8154$ และจากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ จะได้ $\frac{\sin 41^\circ}{b}=\frac{\sin 37^\circ}{52.8}$ $b=\frac{52.8\sin 41^\circ}{\sin 37^\circ}$ $\approx\frac{52.8(0.6561)}{(0.6018)}\approx 57.5641$ ดังนั้น ค่าของ $C=37^\circ$ $a\approx 85.8154$ และ $b\approx 57.5641$	**ใช้กฎ** **ใช้กฎของไซน์**

ภาพ

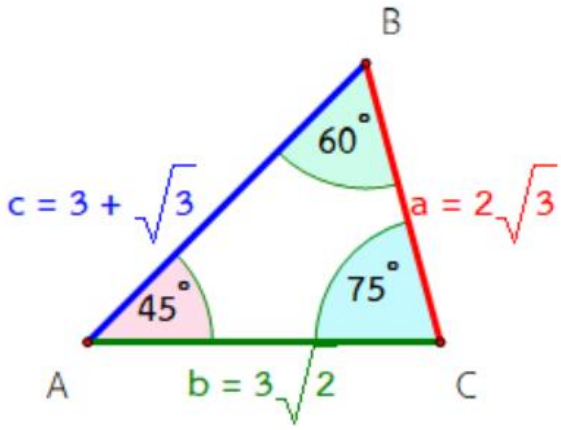


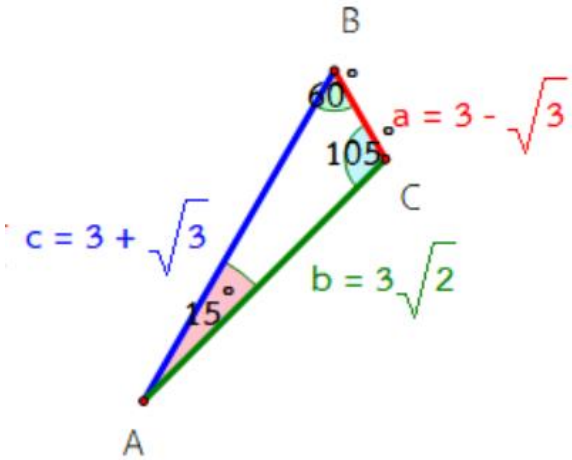
กลุ่มที่ 3	
จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ จะได้ $2^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 - 2(1)(\sqrt{3})\cos C$ $4 = 1 + 3 - 2\sqrt{3}\cos C$ $\cos C = 0$ นั่นคือ $C = 90^\circ$ จากกฎของโคไซน์ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ จะได้ $\sqrt{3}^2 = 1^2 + 2^2 - 2(1)(2)\cos B$ $3 = 1 + 4 - 4\cos B$ $\cos B = \frac{1}{2}$ นั่นคือ $B = 60^\circ$ เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$ จะได้ $A = 180^\circ - (B+C) = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$ ดังนั้น $A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$ และ $C = 90^\circ$	**ใช้กฎ** ใช้กฎของโคไซน์
ภาพ  	

กลุ่มที่ 4	
จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ จะได้ $\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}}=\frac{\sin C^\circ}{3+\sqrt{3}}$ $\sin C^\circ=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}}$ $=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3\sqrt{2}}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{3\sqrt{2}}$ $=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ นั่นคือ $C=75^\circ$ หรือ $C=105^\circ$ ถ้า $C=75^\circ$ จะได้ $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-\left(60^\circ+75^\circ\right)=45^\circ$ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$ จะได้ $\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}}=\frac{\sin 45^\circ}{a}$ $a=\frac{3\sqrt{2}\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{3\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$ ถ้า $C=105^\circ$ จะได้ $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-\left(60^\circ+105^\circ\right)=15^\circ$ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$ จะได้ $\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}}=\frac{\sin 15^\circ}{a}$ $a=\frac{3\sqrt{2}\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$ $=\frac{3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3-\sqrt{3}$	**ใช้กฎ** ใช้กฎของไซน์

ดังนั้น $A = 45^\circ$, $C = 75^\circ$ และ $a = 2\sqrt{3}$ หรือ $A = 15^\circ$, $C = 105^\circ$ และ $a = 3 - \sqrt{3}$	

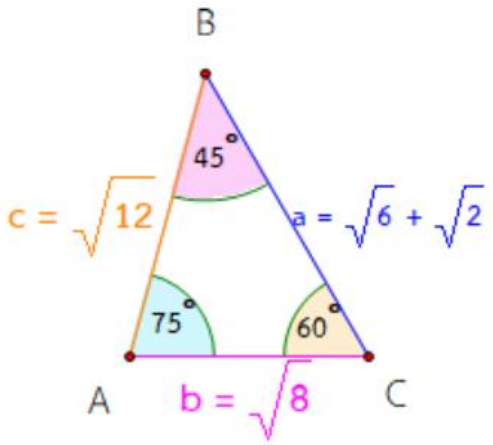
ภาพ

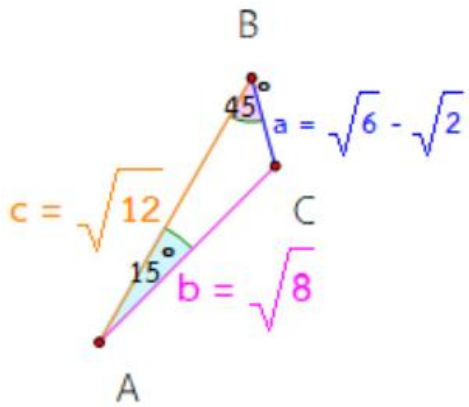




กลุ่มที่ 5	
จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ จะได้ $\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{8}}=\frac{\sin C}{\sqrt{12}}$ $\sin C=\frac{\left(\sqrt{12}\right)\sin 45^\circ}{\sqrt{8}}$ $=\frac{\left(\sqrt{12}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ นั่นคือ $C=60^\circ$ หรือ $C=120^\circ$ ถ้า $C=60^\circ$ จะได้ $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-\left(45^\circ+60^\circ\right)=75^\circ$ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$ จะได้ $\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{8}}=\frac{\sin 75^\circ}{a}$ $a=\frac{\sqrt{8}\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}$ $=\frac{\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ถ้า $C=120^\circ$ จะได้ $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-\left(45^\circ+120^\circ\right)=15^\circ$ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$ จะได้ $\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{8}}=\frac{\sin 15^\circ}{a}$ $a=\frac{\sqrt{8}\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ดังนั้น $A=75^\circ$, $C=60^\circ$ และ $a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ หรือ $A=15^\circ$, $C=120^\circ$ และ $a=\sqrt{6}-\sqrt{2}$	**ใช้กฎ** ใช้กฎของไซน์

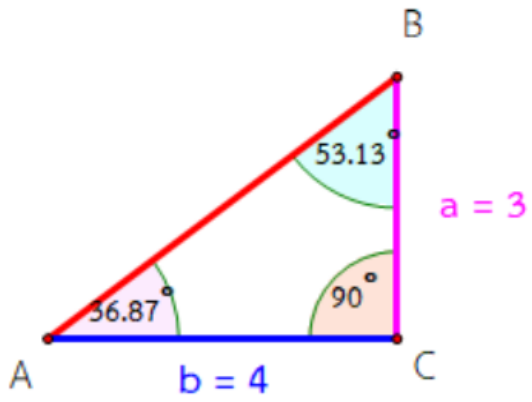
ภาพ





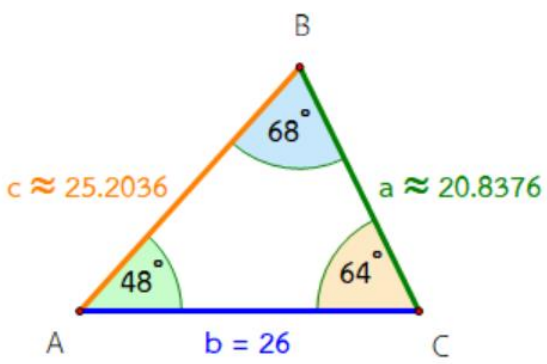
กลุ่มที่ 6	
จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ จะได้ $3^2 = 4^2 + 5^2 - 2(4)(5)\cos A$ $9 = 16 + 25 - 40\cos A$ $\cos A = \frac{4}{5}$ นั่นคือ $A \approx 36.87^\circ$ จากกฎของโคไซน์ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ จะได้ $4^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos B$ $16 = 9 + 25 - 30\cos B$ $\cos B = \frac{3}{5}$ นั่นคือ $B \approx 53.13^\circ$ จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ จะได้ $5^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos C$ $25 = 9 + 16 - 24\cos C$ $\cos C = 0$ นั่นคือ $C = 90^\circ$ ดังนั้น $A \approx 36.87^\circ$, $B \approx 53.13^\circ$ และ $C = 90^\circ$	**ใช้กฎ** **ใช้กฎของโคไซน์**

ภาพ



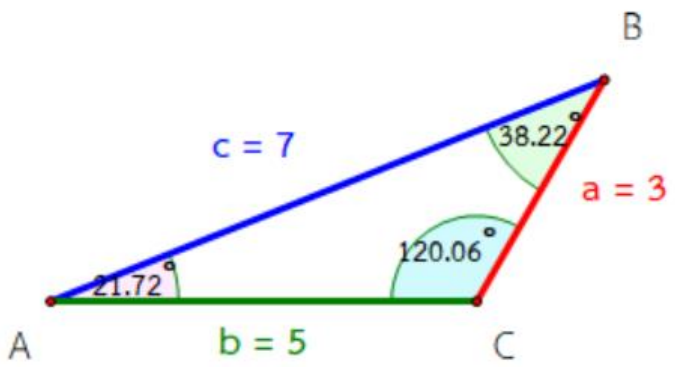
กลุ่มที่ 7	
เนื่องจาก $A+B+C=180^\circ$ จะได้ $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(68^\circ+64^\circ)=48^\circ$ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}$ จะได้ $\frac{\sin 48^\circ}{a}=\frac{\sin 68^\circ}{26}$ $a=\frac{26\sin 48^\circ}{\sin 68^\circ}$ $\approx\frac{26(0.7431)}{0.9272}\approx 20.8376$ และจากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ จะได้ $\frac{\sin 68^\circ}{26}=\frac{\sin 64^\circ}{c}$ $c=\frac{26\sin 64^\circ}{\sin 68^\circ}$ $\approx\frac{26(0.8988)}{(0.9272)}\approx 25.2036$ ดังนั้น ค่าของ $A=48^\circ$ $b\approx 20.8376$ และ $c\approx 25.2036$	**ใช้กฎ** **ใช้กฎของไซน์**

ภาพ



กลุ่มที่ 8	
จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ จะได้ $3^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7)\cos A$ $9 = 25 + 49 - 70\cos A$ $\cos A \approx 0.9286$ นั่นคือ $A \approx 21.72^\circ$ จากกฎของโคไซน์ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ จะได้ $5^2 = 3^2 + 7^2 - 2(3)(7)\cos B$ $25 = 9 + 49 - 42\cos B$ $\cos B \approx 0.7857$ นั่นคือ $B \approx 38.22^\circ$ เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$ จะได้ $C \approx 180^\circ - (A+B) \approx 180^\circ - \left(21.72^\circ + 38.22^\circ\right) \approx 120.06^\circ$ ดังนั้น $A \approx 21.72^\circ$, $B \approx 38.22^\circ$ และ $C \approx 120.06^\circ$	**ใช้กฎ** ใช้กฎของโคไซน์

ภาพ



แบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1) ใช้กฎของโคไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้
2) ใช้กฎของไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1) ใช้การแก้ปัญหาในการแก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์” ได้
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้

.....

1. ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ จงใช้กฎของโคไซน์เพื่อ หาค่าต่อไปนี้

1) ค่าของ a เมื่อ กำหนดให้ $A = 60^\circ, b = 30$ และ $c = 25$
2) ค่าของ b เมื่อ กำหนดให้ $B = 120^\circ, a = 5$ และ $c = 7$
3) ค่าของ c เมื่อ กำหนดให้ $C = 123^\circ, a = 183$ และ $b = 75$
4) ขนาดของมุม B เมื่อกำหนดให้ $a = 12, b = 7$ และ $c = 8$
5) ขนาดของมุม A เมื่อกำหนดให้ $a = 8.4, b = 3.7$ และ $c = 5.2$

2. ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ จงใช้กฎไซน์เพื่อหาค่าต่อไปนี้

1) ค่าของ c เมื่อ กำหนดให้ $A = 45^\circ, C = 60^\circ$ และ $b = 20$
2) ค่าของ a เมื่อ กำหนดให้ $B = 65^\circ, A = 30^\circ$ และ $c = 32$
3) ค่าของ a และ c เมื่อ กำหนดให้ $A = 105^\circ, C = 60^\circ$ และ $b = 4$
4) ค่าของ a, b และ ขนาดของมุม C เมื่อกำหนดให้ $A = 50^\circ, B = 60^\circ$ และ $c = 8$

3. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ เมื่อกำหนดให้

1) $a = 15, b = 20$ และ $C = 65^{\circ}$

2) $b = 80, c = 5.5$ และ $C = 103.5^{\circ}$

3) $a = 14.1, c = 27.4$ และ $B = 112^{\circ}$

4. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งมีขนาดมุมภายในมุมหนึ่งเป็น 135 องศา ถ้าด้านประกอบมุมนี้ยาว 5 และ 10 เซนติเมตร แล้วเส้นทแยงมุมเส้นที่สั้นของรูปสี่เหลี่ยมนี้ยาวเท่าใด

5. จงหาความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีฐานยาว 60 หน่วย และมุมยอดมีขนาด 30 องศา

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”

1. 1) จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $a^2 = 30^2 + 25^2 - 2(30)(25)\cos 60^\circ$

$= 900 + 625 - 2(30)(25)\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 1,525 - 750$

$= 775$

ดังนั้น ค่าของ $a \approx 27.84$ □

2) จากกฎของโคไซน์ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

จะได้ $b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5)\cos 120^\circ$

$= 49 + 25 - 2(7)(5)\cos\left(180^\circ - 60^\circ\right)$

$= 49 + 25 - 2(7)(5)\left(-\cos 60^\circ\right)$

$= 49 + 25 - 2(7)(5)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 74 + 35$

$= 109$

ดังนั้น ค่าของ $b \approx 10.44$ □

3) จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

จะได้ $c^2 = 183^2 + 75^2 - 2(183)(75)\cos 123^\circ$

$= 33,489 + 5,625 - 2(183)(75)\cos\left(180^\circ - 57^\circ\right)$

$= 33,489 + 5,625 - 2(183)(75)\left(-\cos 57^\circ\right)$

$\approx 33,489 + 5,625 - 2(183)(75)(-0.5446)$

$\approx 39,114 + 14,949.27$

$\approx 54,063.27$

ดังนั้น ค่าของ $c \approx 232.52$ □

4) จากกฎของโคไซน์ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

จะได้ $7^2 = 8^2 + 12^2 - 2(8)(12)\cos B$

$$49 = 64 + 144 - 192\cos B$$

$$\cos B = \frac{208-49}{192}$$

$$\approx 0.8281$$

ดังนั้น ขนาดของมุม $B \approx 34.10^\circ$ □

5) จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $8.4^2 = 3.7^2 + 5.2^2 - 2(3.7)(5.2)\cos A$

$$70.56 = 13.69 + 27.04 - 38.48\cos A$$

$$\cos A = \frac{40.73-70.56}{38.48}$$

$$\approx -0.7752$$

ดังนั้น ขนาดของมุม $A \approx 140.82^\circ$ □

2. 1) เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$

จะได้ $B = 180^\circ - (A + C)$

$$= 180^\circ - \left(45^\circ + 60^\circ\right)$$

$$= 180^\circ - 105^\circ$$

$$= 75^\circ$$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 75^\circ}{20} = \frac{\sin 60^\circ}{c}$

$$c = \frac{20\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$\approx \frac{20(0.8660)}{(0.9659)}$$

$$\approx 17.93$$

ดังนั้น ค่าของ $c \approx 17.93$ □

2) เนื่องจาก $A+B+C=180^\circ$

จะได้ $C=180^\circ-(A+B)$

$=180^\circ-\left(30^\circ+65^\circ\right)$

$=180^\circ-95^\circ$

$=85^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 30^\circ}{a}=\frac{\sin 85^\circ}{32}$

$a=\frac{32\sin 30^\circ}{\sin 85^\circ}$

$\approx\frac{32(0.5000)}{(0.9962)}$

≈ 16.06

ดังนั้น ค่าของ $c\approx 16.06$ □

3) เนื่องจาก $A+B+C=180^\circ$

จะได้ $B=180^\circ-(A+C)$

$=180^\circ-\left(105^\circ+60^\circ\right)$

$=180^\circ-165^\circ$

$=15^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}$

จะได้ $\frac{\sin 105^\circ}{a}=\frac{\sin 15^\circ}{4}$

$a=\frac{4\sin 105^\circ}{\sin 15^\circ}$

$=\frac{4\sin\left(180^\circ-75^\circ\right)}{\sin 15^\circ}$

$=\frac{4\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ}$

$$\approx \frac{4(0.9659)}{(0.2588)}$$

$$\approx 14.93$$

และจากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 15^\circ}{4} = \frac{\sin 60^\circ}{c}$

$$c = \frac{4\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ}$$

$$\approx \frac{4(0.8660)}{(0.2588)}$$

$$\approx 13.38$$

ดังนั้น ค่าของ $a \approx 14.93$ และ $c \approx 13.38$ □

4) เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$

จะได้ $C = 180^\circ - (A + B)$

$$= 180^\circ - \left(50^\circ + 60^\circ\right)$$

$$= 180^\circ - 110^\circ$$

$$= 70^\circ$$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 60^\circ}{b} = \frac{\sin 70^\circ}{8}$

$$b = \frac{8\sin 60^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$\approx \frac{8(0.8660)}{(0.9397)}$$

$$\approx 7.37$$

และจากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 50^\circ}{a} = \frac{\sin 70^\circ}{8}$

$$a = \frac{8\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$\approx \frac{8(0.7660)}{(0.9397)}$$

≈ 6.52

ดังนั้น ค่าของ $a \approx 6.52$, $b \approx 7.37$ และขนาดของมุม C เท่ากับ 70° □

3. 1) จาก พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}ab\sin C$

จะได้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}(15)(20)\sin 65^\circ$

$= \frac{1}{2}(15)(20)(0.9063)$

≈ 135.945

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC มีค่าประมาณ 135.945 ตารางหน่วย □

2) จาก พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}bc\sin A$

จะได้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}(80)(5.5)\sin 103.5^\circ$

$= \frac{1}{2}(80)(5.5)\sin\left(180^\circ - 76.5^\circ\right)$

$= \frac{1}{2}(80)(5.5)\sin 76.5^\circ$

$= \frac{1}{2}(80)(5.5)(0.9724)$

≈ 213.928

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC มีค่าประมาณ 213.928 ตารางหน่วย □

3) จาก พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}ca\sin B$

จะได้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}(27.4)(14.1)\sin 112^\circ$

$= \frac{1}{2}(27.4)(14.1)\sin\left(180^\circ - 68^\circ\right)$

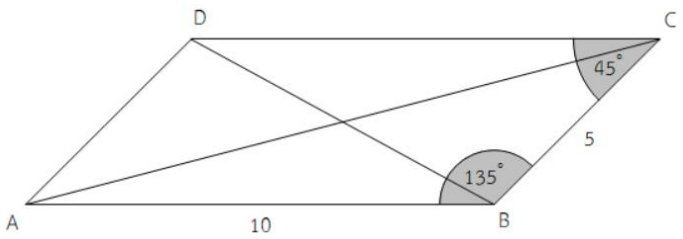
$= \frac{1}{2}(27.4)(14.1)\sin 68^\circ$

$= \frac{1}{2}(27.4)(14.1)(0.9272)$

≈ 179.107

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC มีค่าประมาณ 179.107 ตารางหน่วย □

4. จากที่กำหนดให้สามารถเขียนรูปได้ดังนี้



ให้ AC และ BD เป็นเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC

จากรูปจะได้ว่า มุม ABC เท่ากับ 135°

จากกฎของโคไซน์

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos 135^\circ \\ &= 10^2 + 5^2 - 2(10)(5)\cos\left(180^\circ - 45^\circ\right) \\ &= 100 + 25 - 100\left(-\cos 45^\circ\right) \\ &= 125 - 100\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 125 + 50\sqrt{2} \\ &= 195.71 \end{aligned}$$

จะได้ $AC \approx 13.99$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD

จะได้มุม BCD เท่ากับ $\dfrac{360^\circ - 2\left(135^\circ\right)}{2} = 45^\circ$

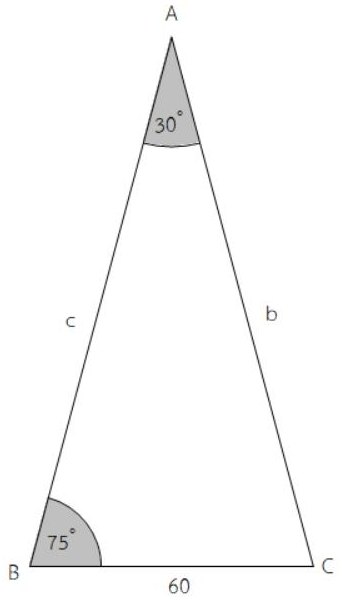
จากกฎของโคไซน์

$$\begin{aligned} BD^2 &= CD^2 + BC^2 - 2(CD)(BC)\cos 45^\circ \\ &= 10^2 + 5^2 - 2(10)(5)\cos 45^\circ \\ &= 100 + 25 - 100\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 125 - 50\sqrt{2} \\ &= 54.29 \end{aligned}$$

จะได้ $BD \approx 7.37$

ดังนั้น เส้นทแยงมุมเส้นที่สั้นของรูปสี่เหลี่ยมนี้ยาวประมาณ 7.37 หน่วย □

5.



เนื่องจาก ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $b = c$

จากกฎของโคไซน์

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้

$$60^2 = b^2 + b^2 - 2bb\cos 30^\circ$$

$$60^2 = 2b^2 - 2b^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$3600 = \left(2 - \sqrt{3}\right)b^2$$

$$b^2 = \frac{3600}{2-\sqrt{3}}$$

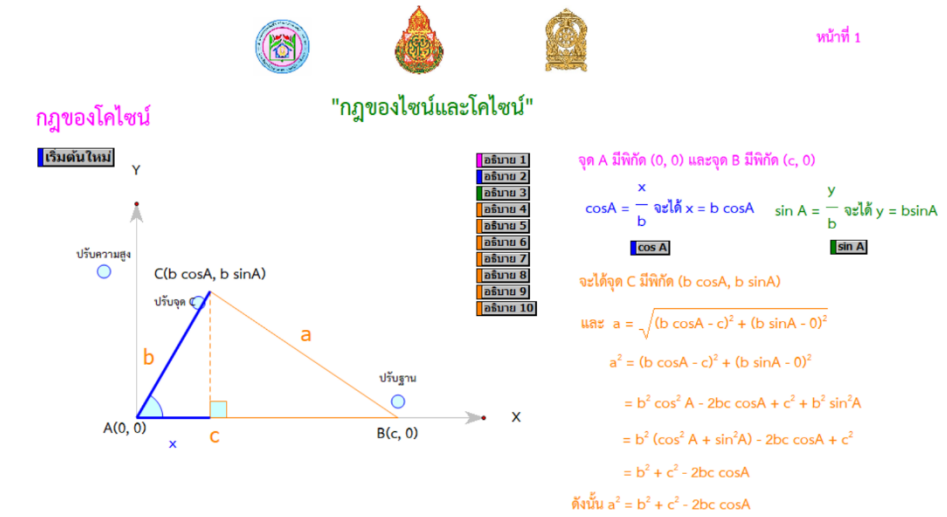
$b \approx 115.91$ หน่วย

และจาก $b = c$ จะได้ $c \approx 115.91$ หน่วย

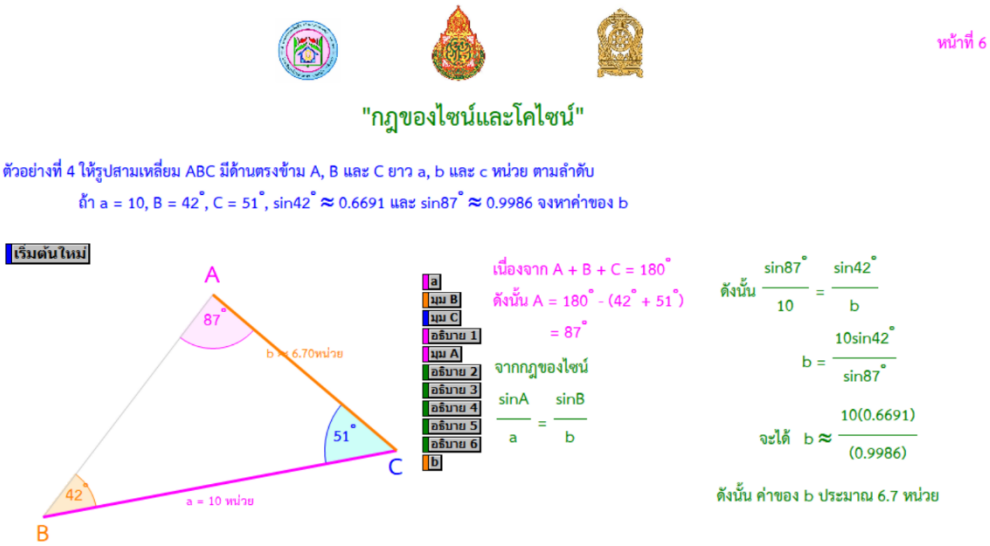
ดังนั้น ความยาวของเส้นรอบรูป คือ $a + b + c \approx 60 + 115.91 + 115.91$

≈ 291.82 หน่วย □

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” หน้า 1 – 3



สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" หน้า 4 – 6



สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” หน้า 7 – 9

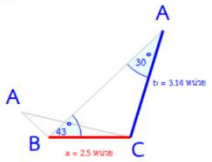
หน้าที่ 7

"กฎของไซน์และโคไซน์"

ตัวอย่างที่ 5 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

ถ้า a = 2.5, A = 30°, b = 3.14 จงหาค่าของ มุม B

เริ่มต้นใหม่



รูปสามเหลี่ยม ABC-1
รูปสามเหลี่ยม ABC-2

มุม A
มุม B
b
มุม A
มุม B
b
a

อธิบาย 1
อธิบาย 2
อธิบาย 3
อธิบาย 4
อธิบาย 5
อธิบาย 6
อธิบาย 7

จากกฎของไซน์

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{2.5} = \frac{\sin B}{3.14}$$

$$\sin B = \frac{3.14\sin 30^\circ}{2.5}$$

$$\sin B = \frac{3.14(0.5)}{(2.5)} = 0.682$$

เนื่องจาก sinB > 0 ดังนั้น มุม B อาจเป็นมุมแหลม หรือ มุม B อาจเป็นมุมป้าน

พิจารณา $0^\circ < B < 90^\circ$ หา arcsin0.682 = B จะได้ $B \approx 43^\circ$

$(A + B = 30^\circ + 43^\circ = 73^\circ)$ น้อยกว่า 180°

พิจารณา $90^\circ < B < 180^\circ$ เนื่องจาก $\sin B = \sin(180^\circ - B)$

จะได้ $B \approx 180^\circ - 43^\circ$ หรือ $B \approx 137^\circ$

$(A + B = 30^\circ + 137^\circ = 167^\circ)$ น้อยกว่า 180°

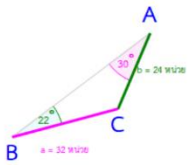
หน้าที่ 8

"กฎของไซน์และโคไซน์"

ตัวอย่างที่ 6 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้าม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

ถ้า a = 32, A = 30°, b = 24 จงหาค่าของ มุม B

เริ่มต้นใหม่



a
มุม A
b
มุม B

อธิบาย 1
อธิบาย 2
อธิบาย 3
อธิบาย 4
อธิบาย 5
อธิบาย 6
อธิบาย 7
อธิบาย 8

จากกฎของไซน์

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{32} = \frac{\sin B}{24}$$

$$\sin B = \frac{24\sin 30^\circ}{32}$$

$$\sin B = \frac{24(0.5)}{32} = 0.375$$

เนื่องจาก sinB > 0 ดังนั้น มุม B อาจเป็นมุมแหลม หรือ มุม B อาจเป็นมุมป้าน

พิจารณา $0^\circ < B < 90^\circ$ หา arcsin0.35 = B จะได้ $B \approx 22^\circ$

$(A + B = 30^\circ + 22^\circ = 52^\circ)$ น้อยกว่า 180°

พิจารณา $90^\circ < B < 180^\circ$ เนื่องจาก $\sin B = \sin(180^\circ - B)$

จะได้ $B \approx 180^\circ - 22^\circ$ หรือ $B \approx 158^\circ$

$(A + B = 30^\circ + 158^\circ = 188^\circ)$ มากกว่า 180°

ดังนั้น ขนาดของมุม B มีเพียงค่าเดียวคือประมาณ 22°

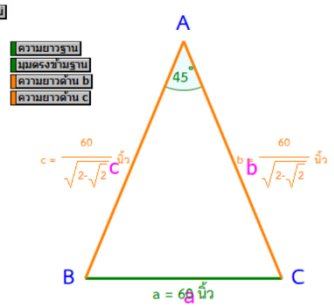
หน้าที่ 9

"กฎของไซน์และโคไซน์"

ตัวอย่างที่ 7 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งมีฐานยาว 60 นิ้ว และขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามกับฐาน

เท่ากับ 45° จงหาความยาวของเส้นรอบรูป

เริ่มต้นใหม่



ความยาวฐาน
มุมตรงข้ามฐาน
ความยาวด้าน b
ความยาวด้าน c

อธิบาย 1
อธิบาย 2
อธิบาย 3
อธิบาย 4
อธิบาย 5
อธิบาย 6
อธิบาย 7
อธิบาย 8

เนื่องจาก ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ b = c

จากกฎของโคไซน์

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $a^2 = b^2 + b^2 - 2bb\cos 45^\circ$

$$60^2 = 2b^2 - 2b^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3600 = (2 - \sqrt{2})b^2$$

$$b^2 = \frac{3600}{2 - \sqrt{2}}$$

$$b = \frac{60}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$ และ b = c จะได้ $c = \frac{60}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$

ดังนั้น ดังนั้น ความยาวของเส้นรอบรูป คือ

$$a + b + c = 60 + \frac{60}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} + \frac{60}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

$$= 60 + \frac{120}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$ นิ้ว

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad
เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” หน้า 10 – 12

หน้าที่ 10

"กฎของไซน์และโคไซน์"

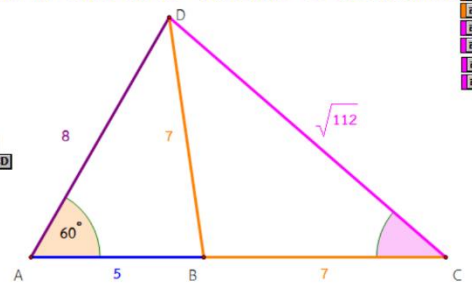
เริ่มต้นใหม่

ตัวอย่างที่ 8 ให้ ACD เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ A = 60° และ B เป็นจุดบนด้าน AC

โดยที่ AB = 5 หน่วย และ AD = 8 หน่วย ถ้า BC = BD แล้วจงหา sin ACD

อธิบาย 1 อธิบาย 2 อธิบาย 3 อธิบาย 4 อธิบาย 5 อธิบาย 6 อธิบาย 7 อธิบาย 8 อธิบาย 9

AB AD BC BD CD มุม A มุม ACD



พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD

จากกฎของโคไซน์ $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2(AD)(AB)\cos A$

$= 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos 60^\circ$

$= 64 + 25 - 80(\frac{1}{2}) = 49$

จะได้ BD = 7

จาก BC = BD จะได้ BC = 7

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD

จากกฎของโคไซน์ $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2(AC)(AD)\cos A$

$= 12^2 + 8^2 - 2(12)(8)\cos 60^\circ$

$= 144 + 64 - 192(\frac{1}{2}) = 112$

จะได้ $CD = \sqrt{112}$

หน้าที่ 11

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ตัวอย่างที่ 8 ให้ ACD เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ A = 60° และ B เป็นจุดบนด้าน AC

โดยที่ AB = 5 หน่วย และ AD = 8 หน่วย ถ้า BC = BD แล้ว จงหา sin ACD

อธิบาย 10 อธิบาย 11 อธิบาย 12 อธิบาย 13 อธิบาย 14 อธิบาย 15

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin CAD}{CD} = \frac{\sin ACD}{AD}$

$\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{112}} = \frac{\sin ACD}{8}$

ดังนั้น $\sin ACD = \frac{8\sin 60^\circ}{\sqrt{112}}$

$= \frac{8(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\sqrt{112}}$

$= \frac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{7}\cdot 2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

หน้าที่ 12

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ข้อ 1 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ B = 120°, C = 35° และ a = 15

อธิบาย 1 อธิบาย 2 อธิบาย 3 อธิบาย 4 อธิบาย 5 อธิบาย 6 อธิบาย 7 อธิบาย 8 อธิบาย 9 อธิบาย 10 รูปสามเหลี่ยม

เนื่องจาก A + B + C = 180°

จะได้ A = 180° - (B + C) = 180° - (120° + 35°) = 25°

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

จะได้ $\frac{\sin 25^\circ}{15} = \frac{\sin 120^\circ}{b}$

$b = \frac{15\sin 120^\circ}{\sin 25^\circ}$

$\approx \frac{15(0.8660)}{0.4226} \approx 30.7383$

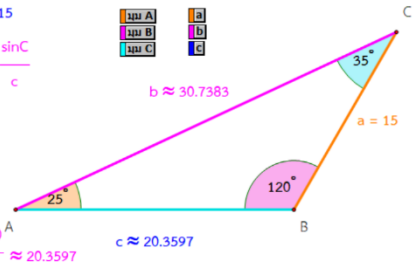
และจากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 25^\circ}{15} = \frac{\sin 35^\circ}{c}$

$c = \frac{15\sin 35^\circ}{\sin 25^\circ}$

$\approx \frac{15(0.5736)}{0.4226} \approx 20.3597$

มุม A มุม B มุม C a b c



ดังนั้น ค่าของ A = 25°, b ≈ 30.7383 และ c ≈ 20.3597

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad
เรื่อง "กฎของโคไซน์และกฎของไซน์" หน้า 13 – 15

หน้าที่ 13

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ข้อ 2 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ A = 102°, B = 41° และ c = 52.8

อธิบาย 1 | อธิบาย 2 | อธิบาย 3 | อธิบาย 4 | อธิบาย 5 | อธิบาย 6 | อธิบาย 7 | อธิบาย 8 | อธิบาย 9 | อธิบาย 10 | รูปสามเหลี่ยม

เนื่องจาก A + B + C = 180°

จะได้ C = 180° - (A + B) = 180° - (102° + 41°) = 37°

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 102^\circ}{a} = \frac{\sin 37^\circ}{52.8}$

$a = \frac{52.8\sin 102^\circ}{\sin 37^\circ}$

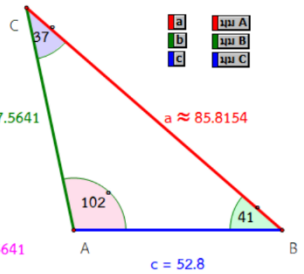
$\approx \frac{52.8(0.9781)}{0.6018} \approx 85.8154$

และจากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 41^\circ}{b} = \frac{\sin 37^\circ}{52.8}$

$b = \frac{52.8\sin 41^\circ}{\sin 37^\circ}$

$\approx \frac{52.8(0.6561)}{0.6018} \approx 57.5641$



ดังนั้น ค่าของ C = 37°, a ≈ 85.8154 และ b ≈ 57.5641

หน้าที่ 14

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ข้อ 3 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

ขนาดของมุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ a = 1, b = $\sqrt{3}$ และ c = 2

อธิบาย 1 | อธิบาย 2 | อธิบาย 3 | อธิบาย 4 | อธิบาย 5 | อธิบาย 6 | อธิบาย 7 | อธิบาย 8 | อธิบาย 9 | อธิบาย 10 | รูปสามเหลี่ยม

จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

จะได้ $2^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 - 2(1)(\sqrt{3})\cos C$

$4 = 1 + 3 - 2\sqrt{3}\cos C$

$\cos C = 0$

นั่นคือ $C = 90^\circ$

จากกฎของโคไซน์ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

จะได้ $\sqrt{3}^2 = 1^2 + 2^2 - 2(1)(2)\cos B$

$3 = 1 + 4 - 4\cos B$

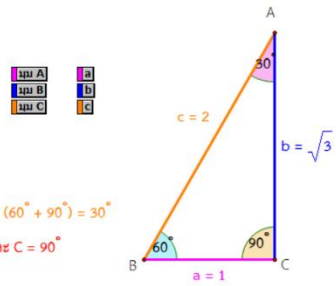
$\cos B = \frac{1}{2}$

นั่นคือ $B = 60^\circ$

เนื่องจาก A + B + C = 180°

จะได้ A = 180° - (B + C) = 180° - (60° + 90°) = 30°

ดังนั้น ค่าของ C = 30°, B = 60° และ C = 90°



หน้าที่ 15

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ข้อ 4 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ B = 60°, b = $3\sqrt{2}$ และ c = 3 + $\sqrt{3}$

อธิบาย 1 | อธิบาย 2 | อธิบาย 3 | อธิบาย 4 | อธิบาย 5 | อธิบาย 6 | อธิบาย 7 | อธิบาย 8 | อธิบาย 9

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}} = \frac{\sin C}{3 + \sqrt{3}}$

$\sin C = \frac{(3 + \sqrt{3})\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}}$

$= \frac{(3 + \sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2})}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

นั่นคือ C = 75° หรือ 105°

ถ้า C = 75°

จะได้ A = 180° - (B + C) = 180° - (60° + 75°) = 45°

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

จะได้ $\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}} = \frac{\sin 45^\circ}{a}$

$a = \frac{3\sqrt{2}\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{3\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad
เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” หน้า 16 – 18

หน้าที่ 16

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ข้อ 4 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $B = 60^\circ$, $b = 3\sqrt{2}$ และ $c = 3 + \sqrt{3}$

อธิบาย 10
อธิบาย 11
อธิบาย 12
อธิบาย 13
อธิบาย 14
รูปสามเหลี่ยม 1
รูปสามเหลี่ยม 2

ถ้า $C = 105^\circ$

จะได้ $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (60^\circ + 105^\circ) = 15^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

จะได้ $\frac{\sin 60^\circ}{3\sqrt{2}} = \frac{\sin 15^\circ}{a}$

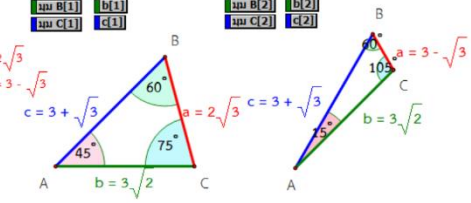
$$a = \frac{3\sqrt{2}\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3 - \sqrt{3}$$

ดังนั้น $A = 45^\circ$, $C = 75^\circ$ และ $a = 2\sqrt{3}$

หรือ $A = 15^\circ$, $C = 105^\circ$ และ $a = 3 - \sqrt{3}$

มุม A[1] a[1]
มุม B[1] b[1]
มุม C[1] c[1]

มุม A[2] a[2]
มุม B[2] b[2]
มุม C[2] c[2]



หน้าที่ 17

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ข้อ 5 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $B = 45^\circ$, $b = \sqrt{8}$ และ $c = \sqrt{12}$

อธิบาย 1
อธิบาย 2
อธิบาย 3
อธิบาย 4
อธิบาย 5
อธิบาย 6
อธิบาย 7
อธิบาย 8
อธิบาย 9

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้ $\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{8}} = \frac{\sin C}{\sqrt{12}}$

$$\sin C = \frac{(\sqrt{12})\sin 45^\circ}{\sqrt{8}}$$

$$= \frac{(\sqrt{12})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ถ้า $C = 60^\circ$

จะได้ $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

จะได้ $\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{8}} = \frac{\sin 75^\circ}{a}$

$$a = \frac{\sqrt{8}\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

หน้าที่ 18

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ข้อ 5 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $B = 45^\circ$, $b = \sqrt{8}$ และ $c = \sqrt{12}$

อธิบาย 10
อธิบาย 11
อธิบาย 12
อธิบาย 13
อธิบาย 14
รูปสามเหลี่ยม 1
รูปสามเหลี่ยม 2

ถ้า $C = 120^\circ$

จะได้ $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (45^\circ + 120^\circ) = 15^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$

จะได้ $\frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{8}} = \frac{\sin 15^\circ}{a}$

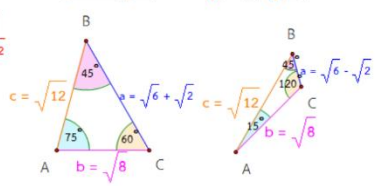
$$a = \frac{\sqrt{8}\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

ดังนั้น $A = 75^\circ$, $C = 60^\circ$ และ $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

หรือ $A = 15^\circ$, $C = 120^\circ$ และ $a = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

มุม A[1] a[1]
มุม B[1] b[1]
มุม C[1] c[1]

มุม A[2] a[2]
มุม B[2] b[2]
มุม C[2] c[2]



สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad
เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” หน้า 19 – 21

หน้าที่ 19

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ข้อ 6 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ
ขนาดของมุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ a = 3, b = 4 และ c = 5 พร้อมเขียนภาพประกอบ

อธิบาย 1 | อธิบาย 2 | อธิบาย 3 | อธิบาย 4 | อธิบาย 5 | อธิบาย 6 | อธิบาย 7 | อธิบาย 8 | อธิบาย 9 | อธิบาย 10 | อธิบาย 11 | อธิบาย 12 | อธิบาย 13 | รูปสามเหลี่ยม

จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $3^2 = 4^2 + 5^2 - 2(4)(5)\cos A$

$9 = 16 + 25 - 40\cos A$

$\cos A = \frac{4}{5}$

นั่นคือ $A \approx 36.87^\circ$

จากกฎของโคไซน์ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

จะได้ $4^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos B$

$16 = 9 + 25 - 30\cos B$

$\cos B = \frac{3}{5}$

นั่นคือ $B \approx 53.13^\circ$

จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

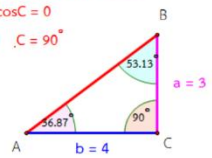
จะได้ $5^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos C$

$25 = 9 + 16 - 24\cos C$

$\cos C = 0$

นั่นคือ $C = 90^\circ$

a | b | c | มุม A | มุม B | มุม C



ดังนั้น $A \approx 36.87^\circ$, $B \approx 53.13^\circ$ และ $C = 90^\circ$

หน้าที่ 20

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ข้อ 7 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ
ขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ $B = 68^\circ$, $C = 64^\circ$ และ b = 26 พร้อมเขียนภาพประกอบ

อธิบาย 1 | อธิบาย 2 | อธิบาย 3 | อธิบาย 4 | อธิบาย 5 | อธิบาย 6 | อธิบาย 7 | อธิบาย 8 | อธิบาย 9 | อธิบาย 10 | รูปสามเหลี่ยม

เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$ จะได้ $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (68^\circ + 64^\circ) = 48^\circ$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

จะได้ $\frac{\sin 48^\circ}{a} = \frac{\sin 68^\circ}{26}$

$a = \frac{26\sin 48^\circ}{\sin 68^\circ}$

$a \approx \frac{26(0.7431)}{0.9272} \approx 20.8376$

และจากกฎของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

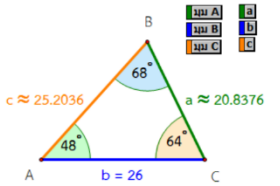
จะได้ $\frac{\sin 68^\circ}{26} = \frac{\sin 64^\circ}{c}$

$c = \frac{26\sin 64^\circ}{\sin 68^\circ}$

$c \approx \frac{26(0.8988)}{0.9272} \approx 25.2036$

ดังนั้น ค่าของ $A = 48^\circ$, $a \approx 20.8376$ และ $c \approx 25.2036$

มุม A | มุม B | มุม C | a | b | c



หน้าที่ 21

"กฎของไซน์และโคไซน์"

เริ่มต้นใหม่

ข้อ 8 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ
ขนาดของมุมทุกมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่าใด เมื่อ a = 3, b = 5 และ c = 7 พร้อมเขียนภาพประกอบ

อธิบาย 1 | อธิบาย 2 | อธิบาย 3 | อธิบาย 4 | อธิบาย 5 | อธิบาย 6 | อธิบาย 7 | อธิบาย 8 | อธิบาย 9 | อธิบาย 10

จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

จะได้ $3^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7)\cos A$

$9 = 25 + 49 - 70\cos A$

$\cos A \approx 0.9286$

นั่นคือ $A \approx 21.72^\circ$

จากกฎของโคไซน์ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

จะได้ $5^2 = 3^2 + 7^2 - 2(3)(7)\cos B$

$25 = 9 + 49 - 42\cos B$

$\cos B \approx 0.7857$

นั่นคือ $B \approx 38.22^\circ$

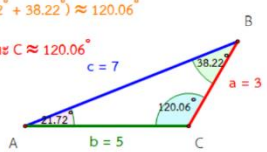
เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$

จะได้ $C \approx 180^\circ - (A + B) \approx 180^\circ - (21.72^\circ + 38.22^\circ) \approx 120.06^\circ$

ดังนั้น ค่าของ $A \approx 21.72^\circ$, $B \approx 38.22^\circ$ และ $C \approx 120.06^\circ$

รูปสามเหลี่ยม

มุม A | มุม B | มุม C | a | b | c



เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้กฎของโคไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 – 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 1 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้กฎของไซน์หาความยาวด้านและขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 – 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 2 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2

$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ								ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (กฎของโคไซน์)				2X (กฎของไซน์)					
		แบบฝึกหัดที่ 10 ข้อ 1				แบบฝึกหัดที่ 10 ข้อ 2					
		4	3	2	1	4	3	2	1		

เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้การแก้ปัญหาในการแก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์ได้	สามารถแก้ปัญหาในแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาในแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาในแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามแก้ปัญหาในแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้	สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 ข้อ	สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 2 ข้อ	สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ข้อ 3 - ข้อ 5 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ								ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (การแก้ปัญหา)				2) (การเชื่อมโยง)					
		แบบฝึกหัดที่ 10 ข้อ 3 - ข้อ 5				แบบฝึกหัดที่ 10 ข้อ 3 - ข้อ 5					
		4	3	2	1	4	3	2	1		

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่นและปฏิบัติตนตามข้อตกลงที่กำหนดให้	ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นบางส่วนและปฏิบัติตนตามข้อตกลงที่กำหนดให้เป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นส่วนใหญ่และปฏิบัติตนตามข้อตกลงที่กำหนดให้ร่วมกันเป็นบางครั้งและต้องอาศัยการแนะนำหรือตักเตือน	ไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”
2) มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อยโดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อยบางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน	แต่งกายไม่เรียบร้อยหรือไม่แก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน
3) ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรงเวลา	การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ทุกข้อหรือครบทุกข้อแต่ไม่ถูกต้องหรือไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 10 “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (ซื่อสัตย์สุจริต)				2) (มีวินัย)				3) (ใฝ่เรียนรู้)				4) (มุ่งมั่นในการทำงาน)					
		แบบฝึกหัดที่ 10				การแต่งกาย				การเข้าเรียน				แบบฝึกหัด 10					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

จุดประสงค์การเรียนรู้	**ระดับคุณภาพ**			
	3	2	1	0
1) ใช้การสื่อสารนำเสนอการแก้ปัญหาที่กำหนดให้โดยใช้โคไซน์และกฎของไซน์ได้	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์”ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามแสดงวิธีทำในใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การคิดในแก้ปัญหาโดยใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ได้	สามารถใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	ไม่มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน ไม่แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มหรือช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ได้	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ทบทวนและสรุปเนื้อหาทุกครั้ง	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ทบทวนและสรุป	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นบางครั้ง	ไม่ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กฎของโคไซน์และกฎของไซน์” ทบทวนและสรุปเนื้อหา

		เนื้อหาเป็นส่วนใหญ่		

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (การสื่อสาร)				2) (การคิด)				3) (ทักษะชีวิต)				4) (เทคโนโลยี)					
		ใบงาน กฎของโคไซน์				ใบงาน กฎของโคไซน์				การทำงานกลุ่ม				สื่อ gsp (กฎของโคไซน์)					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

แบบบันทึกสรุปคะแนนแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13

กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้				คะแนนรวม	น้ำหนักคะแนน
		1 ด้านความรู้	2 ด้านทักษะฯ	3 ด้านคุณลักษณะฯ	4 ด้านสมรรถนะฯ		
		5	5	5	5	20	5

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ : บริษัท ธนธัชการพิมพ์ จำกัด.

พิชิต ฤทธิ์จรูญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงกทพฯ : เฮ้าส์ออฟเคอร์มิสท์.

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ.** พระนครศรีอยุทธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.

ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฎานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-NET คณิตศาสตร์ ม.6.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.**

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรตรแกนกลางการศึกษาขึ้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.** พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 5. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.

อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.