แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201 **ภาคเรียนที่ 1**

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

สาระการเรียนรู้ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ **เวลา 3 ชั่วโมง**

1. ผลการเรียนรู้

เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

ฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \le y \le \pi$

ฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.1.2 แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้จำนวนจริงหรือมุมได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การแก้ปัญหาโจทย์ในการหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.2.2 ใช้เหตุผลในการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.2 มีวินัย

4.3.3 ใฝ่เรียนรู้

4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

4.4.1 ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันชองฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.4.2 ใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าของฟังก์ชันผกผันชองฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

4.4.3 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้

4.4.4 ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" ได้

5. เนื้อหา/สาระ

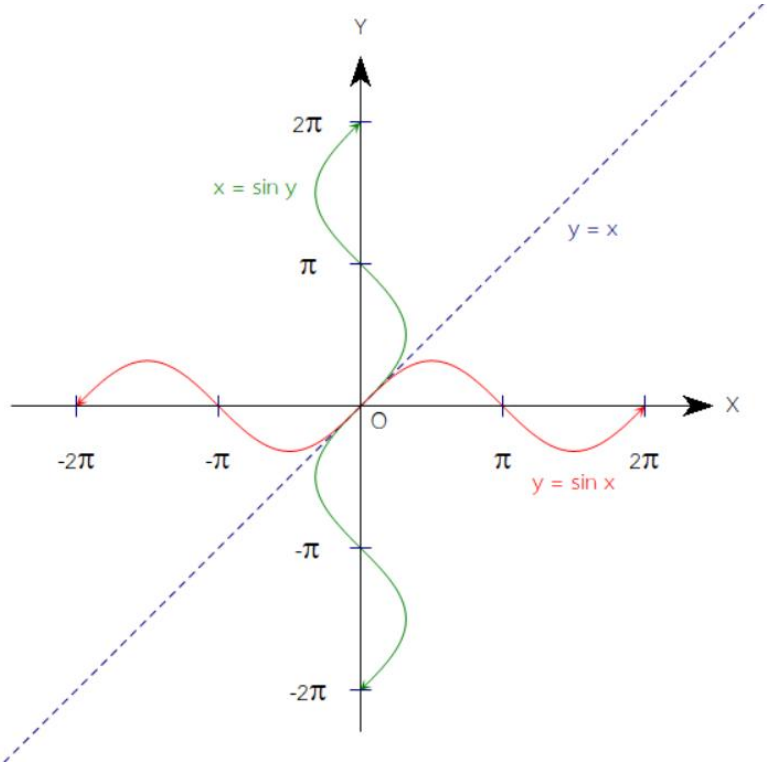
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาตัวผกผันของฟังก์ชันทำได้โดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับที่สมาชิกของฟังก์ชัน โดยฟังก์ชัน 1 – 1 เท่านั้นที่มีตัวผกผันเป็นฟังก์ชัน

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชันเช่น ฟังก์ชันไซน์มีคู่อันดับ (0, 0), (π, 0) และ (2π, 0) เป็นสมาชิก ดังนั้น คู่อันดับ (0, 0), (0, π) และ (0, 2π) จึงเป็นสมาชิกของตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ ซึ่งพบว่าตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เหมาะสม จะพบว่าตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเป็นฟังก์ชัน

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์

พิจารณากราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ และ $-1 \le y \le 1$ และกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) | x = \sin y\}$ ซึ่งเป็นตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ต่อไปนี้



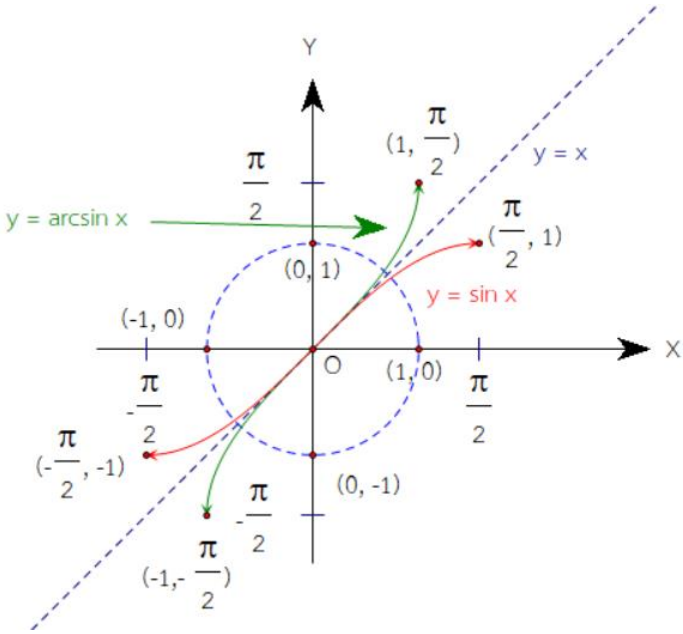
จะเห็นว่า $\{(x,y)|x=\sin y\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันเป็น $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ จะได้ว่า $\left\{(x,y)\middle|y=\sin x,-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น $\left\{(x,y)\middle|x=\sin y,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$ และจะเรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arcsine

บทนิยาม

ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x=\sin y$ และ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

เมื่อ $(x,y)\in\text{arcsine}$ จะได้ $y=\text{arcsine}\,x$ หรือ $y=\arcsin x$ ซึ่งความหมายเช่นเดียวกับ $x=\sin y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x,y)\middle|y=\sin x,-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x,y)\middle|y=\arcsin x,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$



จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ $[-1,1]$ และ เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คือ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

การหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถทำได้โดยอาศัยฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้น ๆ เช่น การหาค่าของ $\arcsin x$ โดยที่ $-1 \le x \le 1$ ก็คือการหา θ ซึ่งอยู่ในเรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine ที่ทำให้ $\sin\theta = x$ นั่นเอง

ตัวอย่างเช่น การหาค่าของ $\arcsin\frac{1}{3}$ ก็คือการหา θ ซึ่ง $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{3}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\arcsin(-1)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin(-1) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -1$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = -1$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

ดังนั้น $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ □

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\arcsin\frac{1}{2}$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\frac{1}{2} = \theta$ จะได้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ □

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ □

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha$ จะได้ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า α ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ และ ให้ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \beta$

จะได้ $\sin\beta = -\frac{1}{2}$ หาค่า β ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$ และ

$\sin\beta = -\frac{1}{2}$ เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่

$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ จะได้ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\pi}{6}$ □

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\theta$ จะได้ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ หาค่า θ

ที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

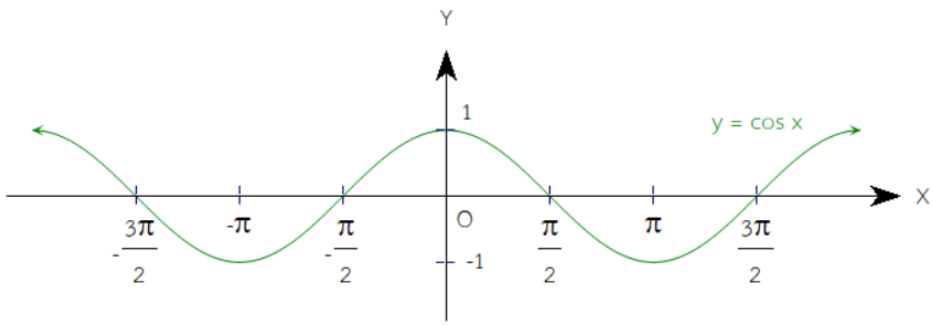
เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ □

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y=\cos x$



เมื่อกำหนดโดเมนของ $y=\cos x$ เป็น $[0,\pi]$ จะได้ว่า

$\{(x,y)\mid y=\cos x, 0\le x\le\pi\}$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น

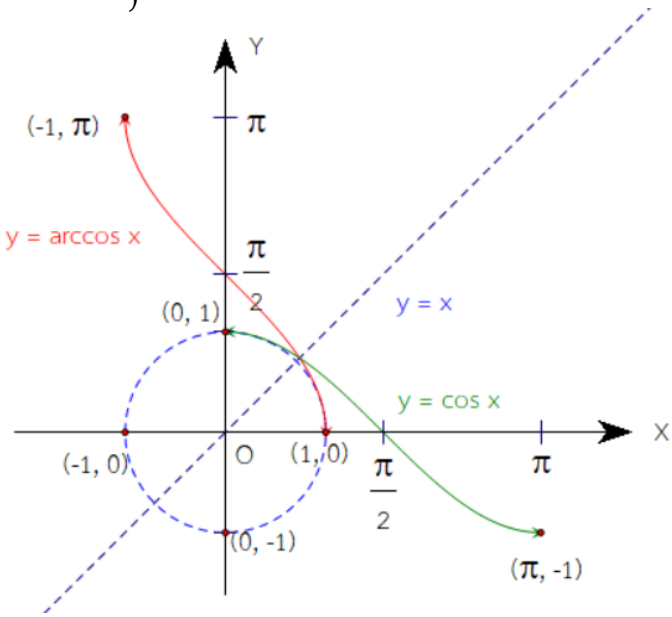
$\{(x,y)\mid x=\cos y, 0\le y\le\pi\}$ และจะเรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arccosine

บทนิยาม

ฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x=\cos y$ และ $0\le y\le\pi$

เมื่อ $(x,y)\in$ arccosine จะได้ $y=\text{arccosine}\,x$ หรือ $y=\arccos x$ ซึ่งความหมายเช่นเดียวกับ $x=\cos y$ เมื่อ $0\le y\le\pi$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x,y)\middle| y=\cos x, 0\le x\le \pi\right\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x,y)\middle| y=\arccos x, 0\le y\le \pi\right\}$



$y=\arccos x$ เมื่อ $-1\le x\le 1$ และ $0\le y\le \pi$

จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arccosine คือ $[-1,1]$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คือ $[0,\pi]$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\arccos 0$

วิธีทำ ให้ $\arccos 0=\theta$ จะได้ $\cos\theta=0$

หาค่า θ ที่ $0\le\theta\le\pi$ และ $\cos\theta=0$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{2}=0$

ดังนั้น $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$ □

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า θ ที่ $0\le\theta\le\pi$ และ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{5\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$ □

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\arccos\frac{1}{2}-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

วิธีทำ ให้ $\arccos\frac{1}{2}=\alpha$ จะได้ $\cos\alpha=\frac{1}{2}$

หาค่า α ที่ $0\le\alpha\le\pi$ และ $\cos\alpha=\frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

จะได้ $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$

ให้ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\beta$ จะได้ $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า β ที่ $0\le\beta\le\pi$ และ $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\arccos\frac{1}{2}-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\pi}{6}$ □

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่า $\cos\left(2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

วิธีทำ ให้ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

หาค่า θ ที่ $0\le\theta\le\pi$ และ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{2\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

จะได้ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$

ดังนั้น $\cos\left(2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\cos\left(2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$=\cos\frac{4\pi}{3}$

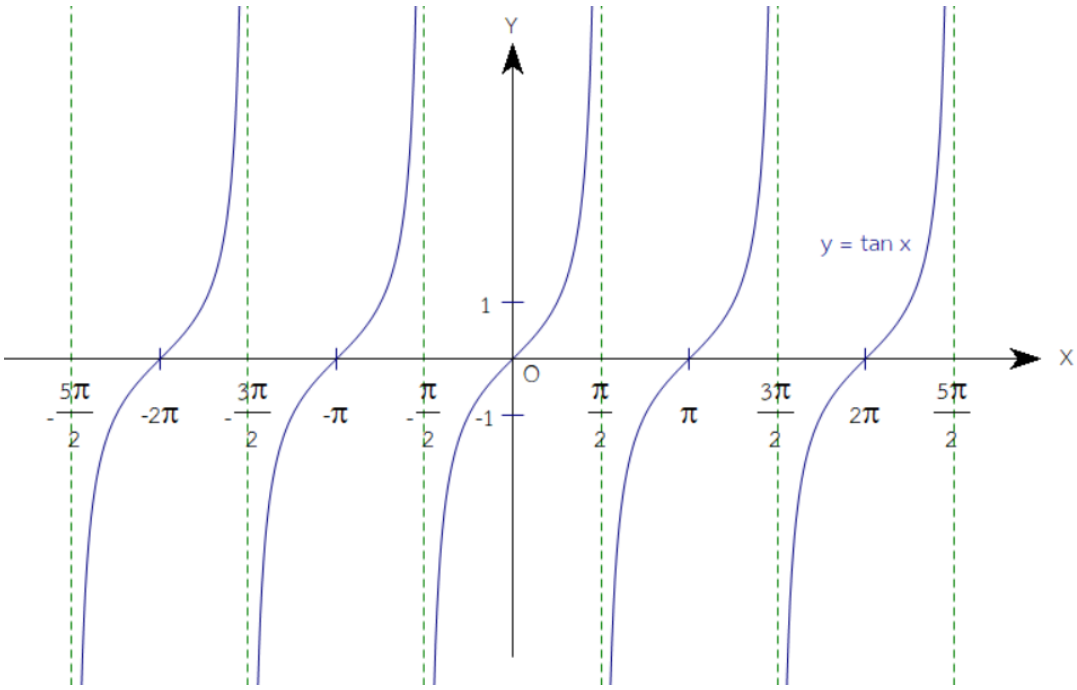
$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}$ □

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = \tan x$



เมื่อกำหนดโดเมนของ $y = \tan x$ เป็น $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ จะได้ว่า

$\left\{(x,y) \middle| y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น

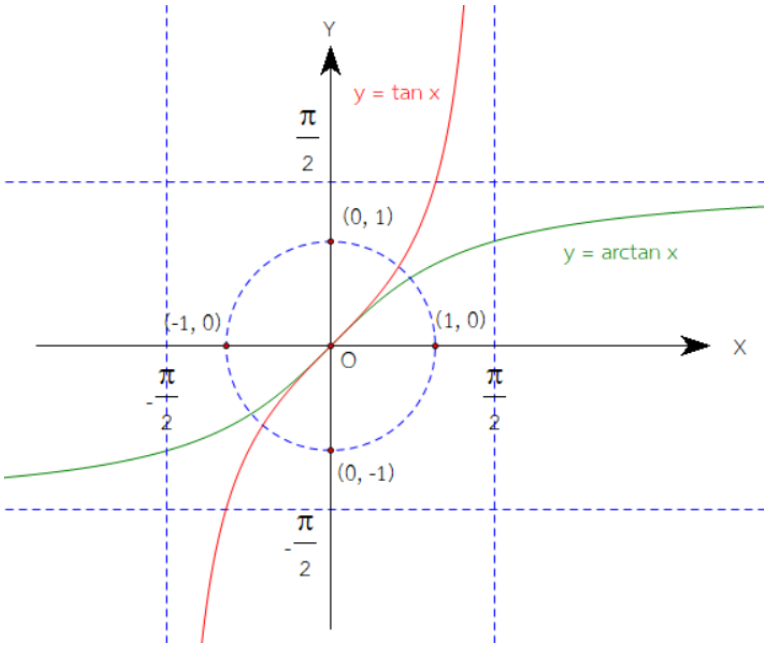
$\left\{(x,y) \middle| x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$ และจะเรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arctangent

บทนิยาม

ฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

เมื่อ $(x,y) \in \text{arctangent}$ จะได้ $y = \text{arctangent}\, x$ หรือ $y = \arctan x$ ซึ่งความหมายเช่นเดียวกับ $x = \tan y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x,y) \middle| y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x,y) \middle| y = \arctan x, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$



$y = \arctan x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คือ $\mathbb{R}$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ $\arctan(-1)$

วิธีทำ ให้ $\arctan(-1) = \theta$ จะได้ $\tan\theta = -1$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = -1$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

ดังนั้น $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ □

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของ $\arctan\sqrt{3}$

วิธีทำ ให้ $\arctan\sqrt{3} = \theta$ จะได้ $\tan\theta = \sqrt{3}$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = \sqrt{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ดังนั้น $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ □

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่าของ $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=\alpha$ จะได้ $\tan\alpha=-\sqrt{3}$

หาค่า α ที่ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\alpha=-\sqrt{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียว

ที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

จะได้ $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$

ให้ $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\beta$ จะได้ $\tan\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

หาค่า β ที่ $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียว

ที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

จะได้ $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{2}$ □

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่า $\tan\left(\arctan\sqrt{3}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arctan\sqrt{3}=\alpha$ จะได้ $\tan\alpha=\sqrt{3}$

หาค่า α ที่ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\alpha=\sqrt{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

จะได้ $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ และ

ให้ $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\beta$ จะได้ $\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

หาค่า β ที่ $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

จะได้ $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\tan\left(\arctan\sqrt{3}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\tan\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$$

$=\frac{1}{0}$ ไม่นิยาม □

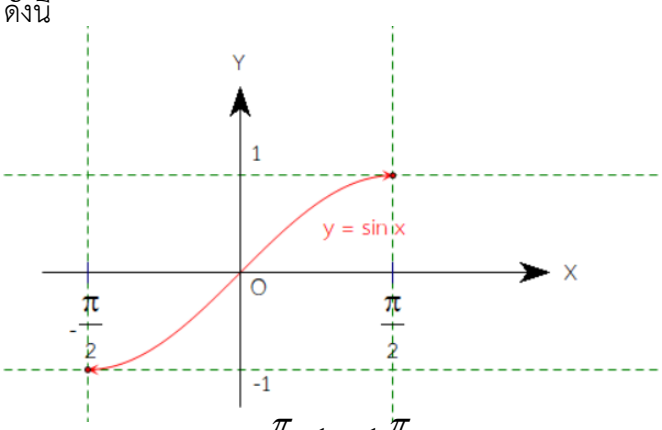
สรุปได้ว่า ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดโดเมนเพื่อให้มีฟังก์ชันผกผัน มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y=\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[-1,1\right]$
$y=\cos x$	$\left[0,\pi\right]$	$\left[-1,1\right]$
$y=\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$

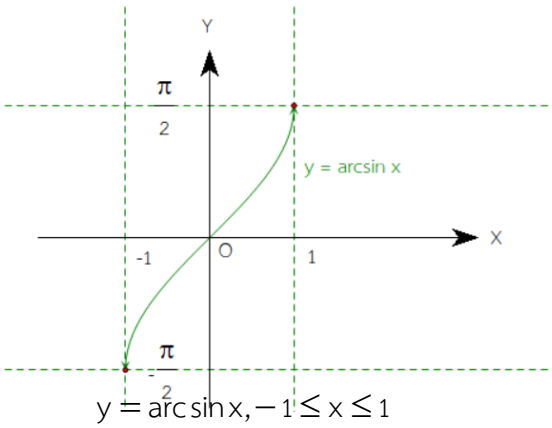
และฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y=\arcsin x$	$\left[-1,1\right]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$\left[-1,1\right]$	$\left[0,\pi\right]$
$y=\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

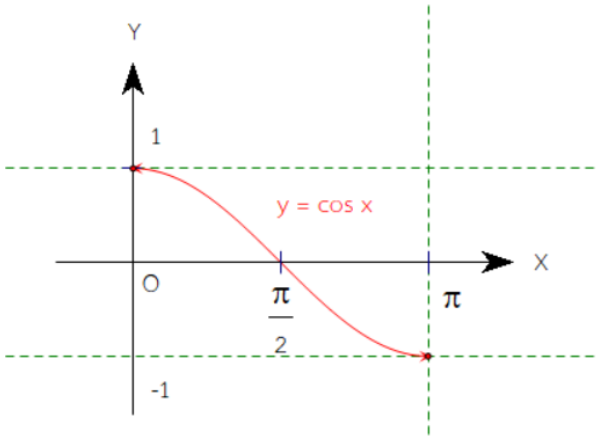
กราฟของฟังก์ชัน sine, cosine, tangent arcsine, arccosine และ arctangent เป็นดังนี้



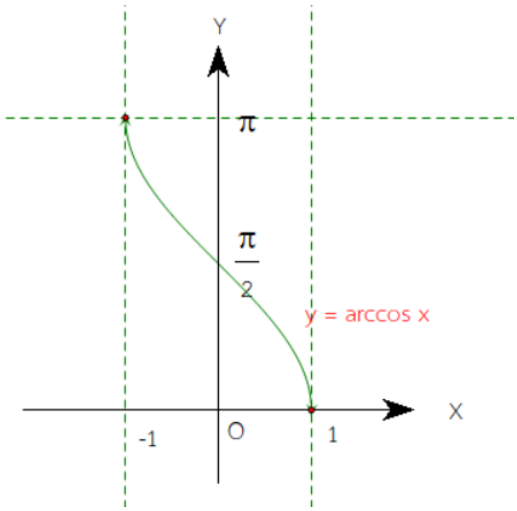
$y=\sin x, -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$



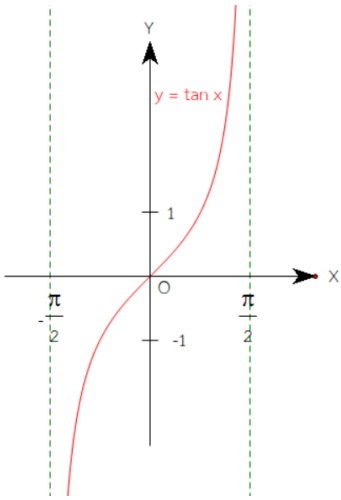
$y=\arcsin x, -1\le x\le 1$



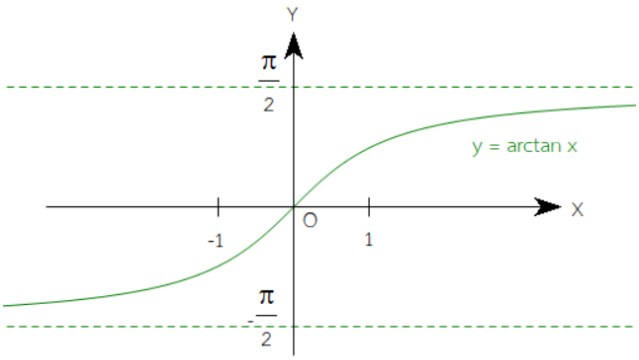
$y = \cos x, 0 \le x \le \pi$



$y = \arccos x, -1 \le x \le 1$



$y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



$y = \arctan x, x \in \mathbb{R}$

หมายเหตุ หนังสือบางเล่มเขียนแทนฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ด้วย $y = \sin^{-1} x$, $y = \cos^{-1} x$ และ $y = \tan^{-1} x$ ตามลำดับ

สรุปเพิ่มเติม ฟังก์ชัน arccotagent, arccosecant และ arcsecant มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$y = \operatorname{arcsec} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$y = \operatorname{arccosec} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่า $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)=\theta$ จะได้ $\sin\theta=-\frac{1}{3}$

จะได้ $\sin\theta=-\frac{1}{3}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta<0$ และ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $-\frac{\pi}{2}\le\theta<0$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$$=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=1-\frac{1}{9}$$

$$=\frac{8}{9}$$

ดังนั้น $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ หรือ $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

จาก $-\frac{\pi}{2}\le\theta<0$ จะได้ $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ดังนั้น $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\cos\theta$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ □

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่า $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}-\arctan\frac{12}{5}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arccos\frac{3}{5}=\alpha$ จะได้ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

จะได้ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ โดยที่ $0\le\alpha\le\pi$

เนื่องจาก $\cos\alpha>0$ และ $0\le\alpha\le\pi$ จะได้ $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

จะได้ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

$$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$=1-\frac{9}{25}$$

$$=\frac{16}{25}$$

จาก $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ และ

ให้ $\arctan\frac{12}{5} = \beta$ จะได้ $\tan\beta = \frac{12}{5}$

จะได้ $\tan\beta = \frac{12}{5}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\tan\beta > 0$ และ $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$

จาก $\sec^2\beta = 1 + \tan^2\beta$

จะได้ $\sec^2\beta = 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$

$= 1 + \frac{144}{25}$

$= \frac{169}{25}$

จาก $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sec\beta = \frac{13}{5}$

นั่นคือ $\cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{5}{13}$ และจาก $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

จะได้ $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\mathrm{co}\beta}$

$\sin\beta = \left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)$

$= \frac{12}{13}$

ดังนั้น $\sin\left(\arccos\frac{3}{5} - \arctan\frac{12}{5}\right) = \sin(\alpha - \beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$

$= \frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{16}{65}$ □

ตัวอย่างที่ 16 จงแสดงว่า $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

วิธีทำ ให้ $\arctan x = \theta$

จะได้ $\tan\theta = x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

จาก $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

จะได้ $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}$ หรือ $\sec\theta = -\sqrt{1+\tan^2\theta}$

เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sec\theta > 0$

นั่นคือ $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}$

ดังนั้น $\sin(\arctan x) = \sin\theta$

$$= \sin\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta}{\sec\theta}$$

$$= \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 17 จงแสดงว่า $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $x \in [-1,1]$

วิธีทำ ให้ $\arcsin x = \alpha$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\sin\alpha = x$ และ

ให้ $\arccos x = \beta$ โดยที่ $0 \le \beta \le \pi$

จะได้ $\cos\beta = x$

เนื่องจาก $\sin\alpha = \cos\beta = x$

จาก $\arcsin x + \arccos x = \alpha + \beta$

$$= \frac{\pi}{2} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 18 จงแสดงว่า $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arccos\frac{1}{2} = \alpha$ โดยที่ $0 \le \alpha \le \pi$ จะได้ $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $\cos\alpha > 0$ และ $0 \le \alpha \le \pi$ จะได้ $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

จะได้ $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

จาก $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ให้ $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\beta$ โดยที่ $0\le\beta\le\pi$ จะได้ $\cos\beta=-\frac{1}{7}$

เนื่องจาก $\cos\beta<0$ และ $0\le\beta\le\pi$ จะได้ $\frac{\pi}{2}<\beta\le\pi$

จาก $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$

จะได้ $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$

$$=1-\left(-\frac{1}{7}\right)^2$$

$$=1-\frac{1}{49}$$

$$=\frac{48}{49}$$

จาก $\frac{\pi}{2}<\beta\le\pi$ จะได้ $\sin\beta=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

และ ให้ $\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)=\gamma$ โดยที่ $0\le\gamma\le\pi$ จะได้ $\cos\gamma=-\frac{13}{14}$

จาก $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$

จะได้ $\alpha+\beta=\gamma$

จาก $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$\cos(\alpha+\beta)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

$$=-\frac{1}{14}-\frac{12}{14}=-\frac{13}{14}$$

นั่นคือ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\gamma$

จะได้ $\alpha+\beta=\gamma$

ดังนั้น $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$ □

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 1) - ข้อ 9))	- แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1(ข้อ 1) - ข้อ 9)) - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1(ข้อ 1) - ข้อ 9)) ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
2) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2	- แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์ในการหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 10) - ข้อ 17))	- แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 10) - ข้อ 17)) - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาโจทย์ในการหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้เหตุผลในการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2	- แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้เหตุผลในการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต	ตรวจการทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”	- แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
2) มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีวินัย อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึกการเข้าเรียน - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนใฝ่เรียนรู้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	- การส่งแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”	- แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมุ่งมั่นในการทำงานอยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”	- ใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”	- ใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”	นักเรียนใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
		- แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึกการทำงานกลุ่ม - แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" ได้	ตรวจการใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ"	- สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้เทคโนโลยีเพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

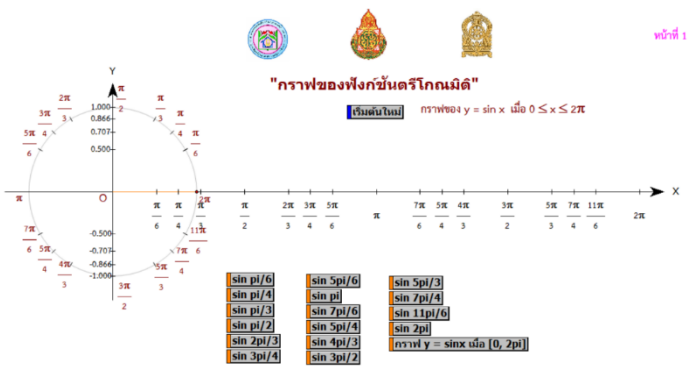
7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

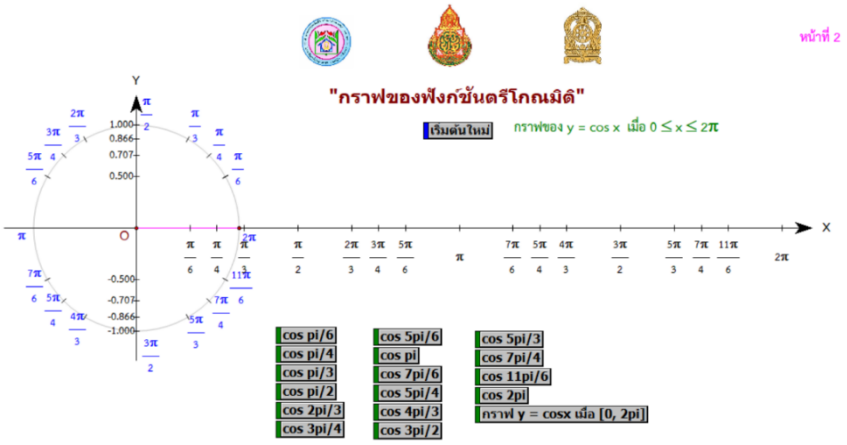
ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน

7.2 ครูทบทวนเรื่อง "ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์" โดยการสนทนาถามตอบกับนักเรียน และใช้ สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" หน้าที่ 1 และหน้าที่ 2 ประกอบ ดังรูป





ขั้นสอนและอธิบายทฤษฎี

7.3 ครูอธิบายการหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันผกผันฟังก์ชันแทนเจนต์ ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" (หน้า 1 - 3) โดยการสุ่มนักเรียนในชั้นเรียนตอบคำถามหรือสนทนาถามตอบกับนักเรียนระหว่างการอธิบาย นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติมนักเรียนศึกษาใบความรู้ "ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" ประกอบ

7.4 ครูให้ศึกษายกตัวอย่างที่ 1 ถึง ตัวอย่างที่ 5 จากใบความรู้ "ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" เรื่อง ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ แล้วสุ่มให้นักเรียนอธิบายตัวอย่างที่ 1 ถึง ตัวอย่างที่ 5 ตามลำดับ ครูและเพื่อนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียนร่วมกับอธิบายเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 2

7.5 ครูให้ศึกษายกตัวอย่างที่ 6 ถึง ตัวอย่างที่ 9 จากใบความรู้ "ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" เรื่อง ฟังก์ชันผกผันฟังก์ชันโคไซน์แล้วสุ่มให้นักเรียนอธิบายตัวอย่างที่ 6 ถึง ตัวอย่างที่ 9 ตามลำดับ ครูและเพื่อนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียนร่วมกับอธิบายเพิ่มเติม และ

7.6 ครูให้ศึกษายกตัวอย่างที่ 10 ถึง ตัวอย่างที่ 15 จากใบความรู้ "ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" เรื่อง ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ แล้วสุ่มให้นักเรียนอธิบายตัวอย่างที่ 10 ถึง ตัวอย่างที่ 15 ตามลำดับ ครูและเพื่อนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียนร่วมกับอธิบายเพิ่มเติม

7.7 ครูอธิบายยกตัวอย่างที่ 17 ถึง ตัวอย่างที่ 18 จากใบความรู้ "ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ" พร้อมสุ่มให้นักเรียนอธิบายตัวอย่างที่ 17 ถึง ตัวอย่างที่ 18 ตามลำดับ โดยการสนทนาถามตอบระหว่างครูกับนักเรีน

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.8 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ในชั่วโมงที่ 1 และ 2 ประกอบครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

7.9 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยครูสนทนาถามตอบกับนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม หน้าชั้นเรียน ครูอธิบายและนักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมอธิบายเพิ่มเติม

ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.10 จากการทำใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” และศึกษาใบความรู้ “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ให้นักเรียนสรุปสูตรการหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตารางสรุป ลงในสมุดหรือกระดาษ A4 เพื่อนำไปใช้ต่อไป

ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.11 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” เป็นการบ้าน

7.12 ครูมอบหมายให้นักเรียนทบทวนบทเรียนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” เพื่อเป็นการทบทวนและศึกษาความรู้เพิ่มเติมด้วยตัวเอง

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- ใบความรู้ “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” - ใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” - แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”	สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้ 1) หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้				
2) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันชองฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์ในการหาค่าของฟังก์ชันผกผันชองฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้				
2) ใช้เหตุผลในการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผัน				
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต				
2) มีวินัย				
3) ใฝ่เรียนรู้				
4) มุ่งมั่นในการทำงาน				
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชัน				
2) ใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้				
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

ใบความรู้ “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

1) หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้
2) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

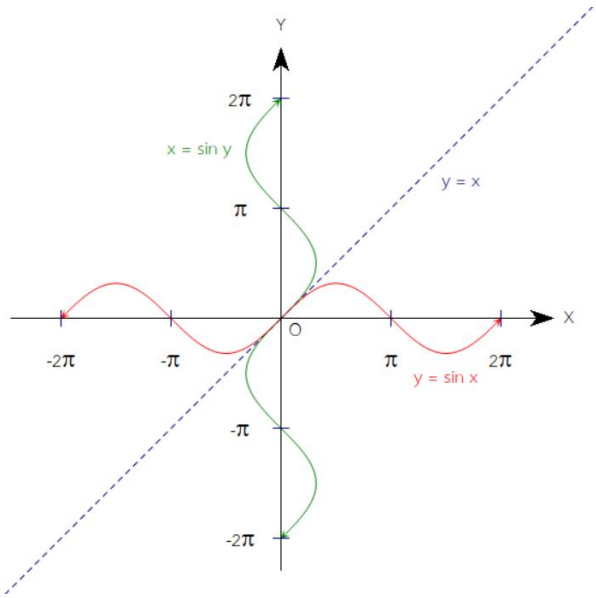
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาตัวผกผันของฟังก์ชันทำได้โดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับที่สมาชิกของฟังก์ชัน โดยฟังก์ชัน 1 – 1 เท่านั้นที่มีตัวผกผันเป็นฟังก์ชัน

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชันเช่น ฟังก์ชันไซน์มีคู่อันดับ (0, 0), (π, 0) และ (2π, 0) เป็นสมาชิก ดังนั้น คู่อันดับ (0, 0), (0, π) และ (0, 2π) จึงเป็นสมาชิกของตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ ซึ่งพบว่าตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เหมาะสม จะพบว่าตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเป็นฟังก์ชัน

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์

พิจารณากราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ และ $-1 \le y \le 1$ และกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x,y) | x = \sin y\}$ ซึ่งเป็นตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ต่อไปนี้



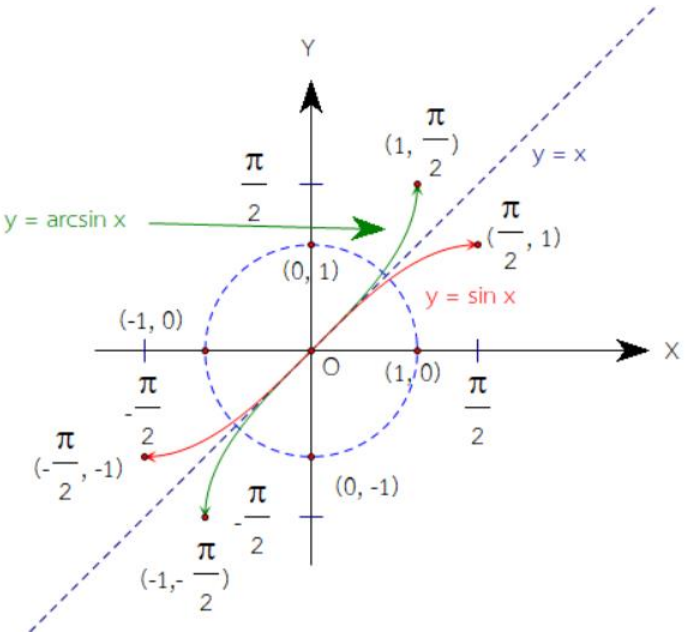
จะเห็นว่า $\{(x,y)|x=\sin y\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันเป็น $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ จะได้ว่า $\left\{(x,y)\middle|y=\sin x,-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น $\left\{(x,y)\middle|x=\sin y,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$ และจะเรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arcsine

บทนิยาม

ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x=\sin y$ และ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

เมื่อ $(x,y)\in\text{arcsine}$ จะได้ $y=\text{arcsine}\,x$ หรือ $y=\arcsin x$ ซึ่งความหมายเช่นเดียวกับ $x=\sin y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x,y)\middle|y=\sin x,-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x,y)\middle|y=\arcsin x,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$



จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ $[-1,1]$ และ เรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คือ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

การหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถทำได้โดยอาศัยฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้น ๆ เช่น การหาค่าของ $\arcsin x$ โดยที่ $-1 \le x \le 1$ ก็คือการหา θ ซึ่งอยู่ในเรนจ์ของฟังก์ชัน $\arcsin e$ ที่ทำให้ $\sin\theta = x$ นั่นเอง

ตัวอย่างเช่น การหาค่าของ $\arcsin\frac{1}{3}$ ก็คือการหา θ ซึ่ง $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{3}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\arcsin(-1)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin(-1) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -1$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = -1$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

ดังนั้น $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ □

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\arcsin\frac{1}{2}$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\frac{1}{2} = \theta$ จะได้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ □

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ □

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha$ จะได้ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า α ที่ $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ และ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ และ ให้ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\beta$

จะได้ $\sin\beta=-\frac{1}{2}$ หาค่า β ที่ $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$ และ

$\sin\beta=-\frac{1}{2}$ เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่

$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$ จะได้ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{\pi}{6}$ □

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\theta$ จะได้ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ หาค่า θ

ที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

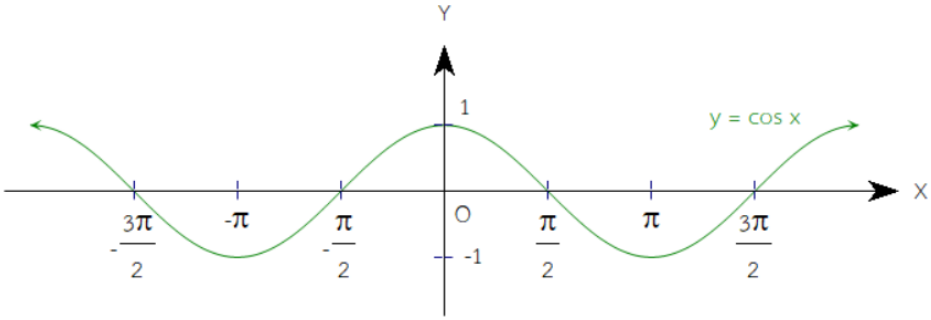
เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ □

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = \cos x$



เมื่อกำหนดโดเมนของ $y = \cos x$ เป็น $[0,\pi]$ จะได้ว่า

$\{(x,y) \mid y = \cos x, 0 \le x \le \pi\}$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น

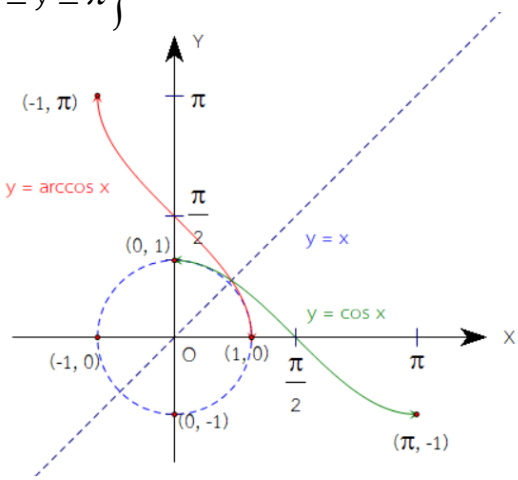
$\{(x,y) \mid x = \cos y, 0 \le y \le \pi\}$ และจะเรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arccosine

บทนิยาม

ฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \le y \le \pi$

เมื่อ $(x,y) \in \text{arccosine}$ จะได้ $y = \text{arccosine}\, x$ หรือ $y = \arccos x$ ซึ่งความหมายเช่นเดียวกับ $x = \cos y$ เมื่อ $0 \le y \le \pi$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\{(x,y) \mid y = \cos x, 0 \le x \le \pi\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\{(x,y) \mid y = \arccos x, 0 \le y \le \pi\}$



$y = \arccos x$ เมื่อ $-1 \le x \le 1$ และ $0 \le y \le \pi$

จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arccosine คือ $[-1,1]$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คือ $[0,\pi]$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\arccos 0$

วิธีทำ ให้ $\arccos 0 = \theta$ จะได้ $\cos\theta = 0$

หาค่า θ ที่ $0 \le \theta \le \pi$ และ $\cos\theta = 0$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

ดังนั้น $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ □

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$ จะได้ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า θ ที่ $0 \le \theta \le \pi$ และ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{5\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ □

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\arccos\frac{1}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$

วิธีทำ ให้ $\arccos\frac{1}{2} = \alpha$ จะได้ $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

หาค่า α ที่ $0 \le \alpha \le \pi$ และ $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

จะได้ $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

ให้ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \beta$ จะได้ $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า β ที่ $0 \le \beta \le \pi$ และ $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\arccos\frac{1}{2} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

$= \frac{\pi}{6}$ □

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่า $\cos\left(2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

วิธีทำ ให้ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

หาค่า θ ที่ $0\le\theta\le\pi$ และ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

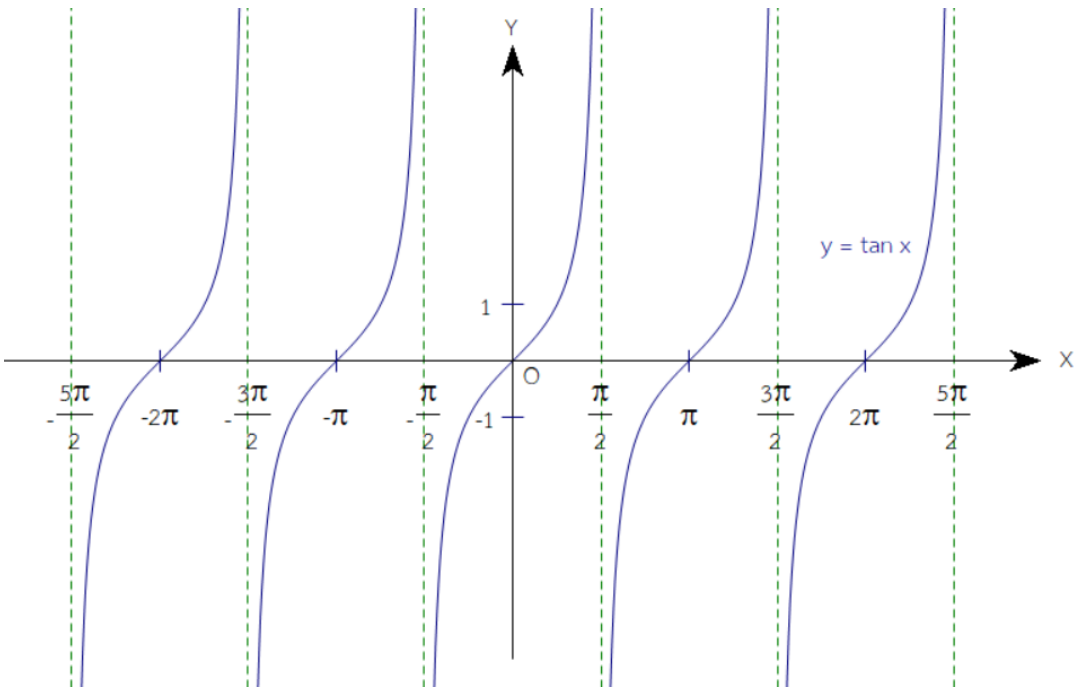
เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{2\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

จะได้ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\cos\left(2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)&=\cos\left(2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\&=\cos\frac{4\pi}{3}\\&=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\&=-\cos\frac{\pi}{3}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$
□

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y=\tan x$



เมื่อกำหนดโดเมนของ $y = \tan x$ เป็น $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ จะได้ว่า

$\left\{(x,y) \middle| y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น

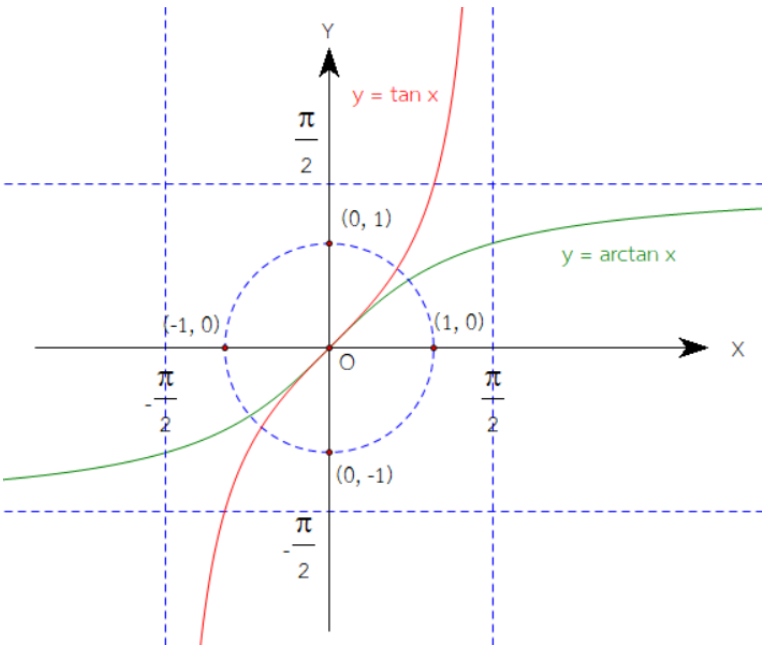
$\left\{(x,y) \middle| x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$ และจะเรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arctangent

บทนิยาม

ฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

เมื่อ $(x,y) \in \text{arctangent}$ จะได้ $y = \text{arctangent}\, x$ หรือ $y = \arctan x$ ซึ่งความหมายเช่นเดียวกับ $x = \tan y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x,y) \middle| y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x,y) \middle| y = \arctan x, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$



$y = \arctan x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คือ $\mathbb{R}$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ $\arctan(-1)$

วิธีทำ ให้ $\arctan(-1)=\theta$ จะได้ $\tan\theta=-1$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta=-1$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

ดังนั้น $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$ □

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของ $\arctan\sqrt{3}$

วิธีทำ ให้ $\arctan\sqrt{3}=\theta$ จะได้ $\tan\theta=\sqrt{3}$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta=\sqrt{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

ดังนั้น $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ □

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่าของ $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=\alpha$ จะได้ $\tan\alpha=-\sqrt{3}$

หาค่า α ที่ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\alpha=-\sqrt{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียว

ที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

จะได้ $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$

ให้ $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\beta$ จะได้ $\tan\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

หาค่า β ที่ $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียว

ที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

จะได้ $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{2}$ □

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่า $\tan\left(\arctan\sqrt{3}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arctan\sqrt{3}=\alpha$ จะได้ $\tan\alpha=\sqrt{3}$

หาค่า α ที่ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\alpha=\sqrt{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

จะได้ $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ และ

ให้ $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\beta$ จะได้ $\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

หาค่า β ที่ $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

จะได้ $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\tan\left(\arctan\sqrt{3}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\tan\frac{\pi}{2}$

$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{0}$ ไม่นิยาม □

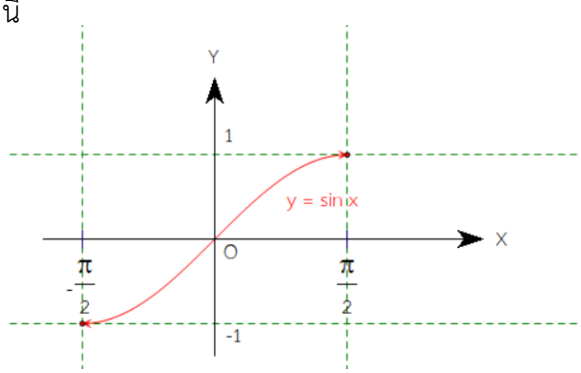
สรุปได้ว่า ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดโดเมนเพื่อให้มีฟังก์ชันผกผัน มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y=\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[-1,1\right]$
$y=\cos x$	$\left[0,\pi\right]$	$\left[-1,1\right]$
$y=\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$

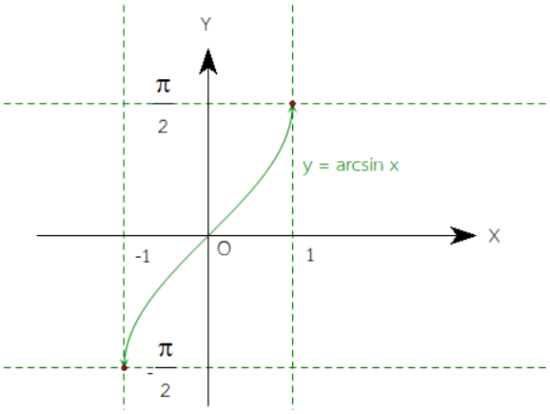
และฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$y = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

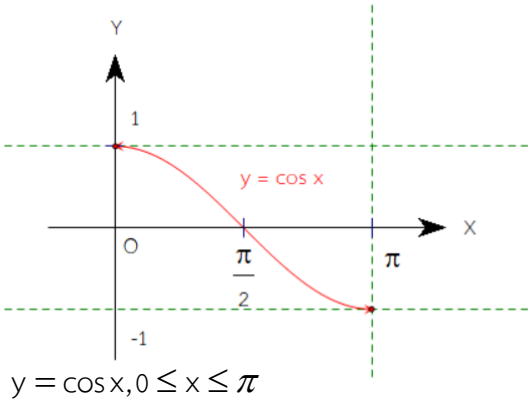
กราฟของฟังก์ชัน sine, cosine, tangent arcsine, arccosine และ arctangent เป็นดังนี้



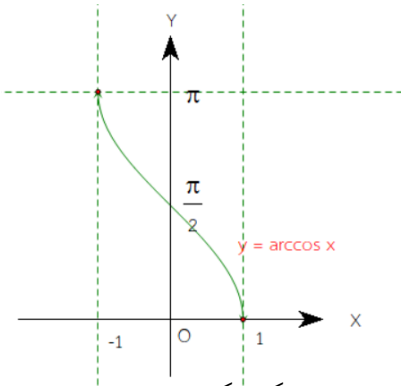
$y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



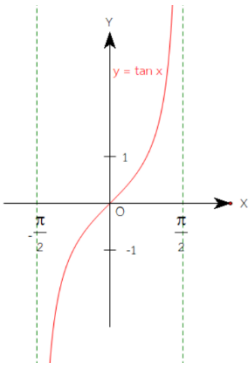
$y = \arcsin x, -1 \le x \le 1$



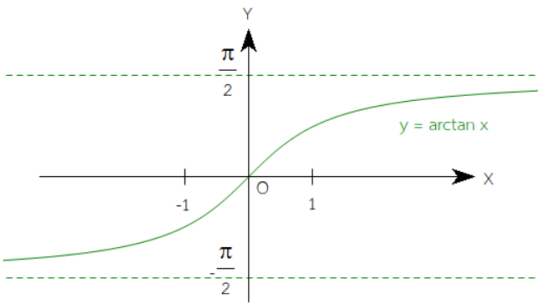
$y = \cos x, 0 \le x \le \pi$



$y = \arccos x, -1 \le x \le 1$



$y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



$y = \arctan x, x \in \mathbb{R}$

หมายเหตุ หนังสือบางเล่มเขียนแทนฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ด้วย $y=\sin^{-1}x$, $y=\cos^{-1}x$ และ $y=\tan^{-1}x$ ตามลำดับ

สรุปเพิ่มเติม ฟังก์ชัน arccotagent, arccosecant และ arcsecant มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y=\operatorname{arccot}x$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$
$y=\operatorname{arcsec}x$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$
$y=\operatorname{arccosec}x$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่า $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)=\theta$ จะได้ $\sin\theta=-\frac{1}{3}$

จะได้ $\sin\theta=-\frac{1}{3}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta<0$ และ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $-\frac{\pi}{2}\le\theta<0$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$$=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$=1-\frac{1}{9}$$

$$=\frac{8}{9}$$

ดังนั้น $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ หรือ $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

จาก $-\frac{\pi}{2}\le\theta<0$ จะได้ $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ดังนั้น $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\cos\theta$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ □

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่า $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}-\arctan\frac{12}{5}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arccos\frac{3}{5}=\alpha$ จะได้ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

จะได้ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ โดยที่ $0 \le \alpha \le \pi$

เนื่องจาก $\cos\alpha > 0$ และ $0 \le \alpha \le \pi$ จะได้ $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

จะได้ $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{9}{25}$$

$$= \frac{16}{25}$$

จาก $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ และ

ให้ $\arctan\frac{12}{5} = \beta$ จะได้ $\tan\beta = \frac{12}{5}$

จะได้ $\tan\beta = \frac{12}{5}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\tan\beta > 0$ และ $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$

จาก $\sec^2\beta = 1 + \tan^2\beta$

จะได้ $\sec^2\beta = 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$

$$= 1 + \frac{144}{25}$$

$$= \frac{169}{25}$$

จาก $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sec\beta = \frac{13}{5}$

นั่นคือ $\cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{5}{13}$ และจาก $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

จะได้ $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\mathrm{co}\beta}$

$$\sin\beta = \left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{12}{13}$$

ดังนั้น $\sin\left(\arccos\frac{3}{5} - \arctan\frac{12}{5}\right) = \sin(\alpha - \beta)$

$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$

$$= \frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{16}{65}$$ □

ตัวอย่างที่ 16 จงแสดงว่า $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

วิธีทำ ให้ $\arctan x = \theta$

จะได้ $\tan\theta = x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

จาก $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

จะได้ $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}$ หรือ $\sec\theta = -\sqrt{1+\tan^2\theta}$

เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sec\theta > 0$

นั่นคือ $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sin(\arctan x) &= \sin\theta \\ &= \sin\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{\tan\theta}{\sec\theta} \\ &= \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$
□

ตัวอย่างที่ 17 จงแสดงว่า $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $x \in [-1,1]$

วิธีทำ ให้ $\arcsin x = \alpha$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\sin\alpha = x$ และ

ให้ $\arccos x = \beta$ โดยที่ $0 \le \beta \le \pi$

จะได้ $\cos\beta = x$

เนื่องจาก $\sin\alpha = \cos\beta = x$

จาก
$$\begin{aligned}\arcsin x + \arccos x &= \alpha + \beta \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$
□

ตัวอย่างที่ 18 จงแสดงว่า $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arccos\frac{1}{2} = \alpha$ โดยที่ $0 \le \alpha \le \pi$ จะได้ $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $\cos\alpha > 0$ และ $0 \le \alpha \le \pi$ จะได้ $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

จะได้ $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 1 - \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4}$

จาก $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ให้ $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \beta$ โดยที่ $0 \le \beta \le \pi$ จะได้ $\cos\beta = -\frac{1}{7}$

เนื่องจาก $\cos\beta < 0$ และ $0 \le \beta \le \pi$ จะได้ $\frac{\pi}{2} < \beta \le \pi$

จาก $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

จะได้ $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$

$= 1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2$

$= 1 - \frac{1}{49}$

$= \frac{48}{49}$

จาก $\frac{\pi}{2} < \beta \le \pi$ จะได้ $\sin\beta = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

และ ให้ $\arccos\left(-\frac{13}{14}\right) = \gamma$ โดยที่ $0 \le \gamma \le \pi$ จะได้ $\cos\gamma = -\frac{13}{14}$

จาก $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$

จะได้ $\alpha + \beta = \gamma$

จาก $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{7}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

$= -\frac{1}{14} - \frac{12}{14} = -\frac{13}{14}$

นั่นคือ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\gamma$

จะได้ $\alpha + \beta = \gamma$

ดังนั้น $\arccos\frac{1}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$ □

ใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1) ใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

2) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. รับใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”
2. ให้นักเรียนระดมความคิดในการแก้ปัญหาโจทย์โดยใช้ความรู้เรื่อง “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”
3. นักเรียนแต่ละกลุ่มออกนำเสนอวิธีทำโจทย์ของกลุ่มและบันทึกแลกเปลี่ยนเรียนรู้ลงในใบงาน
4. นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ แสดงความคิดเห็นและตอบคำถามเพิ่มเติม

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

   บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ
2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

   บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ
3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

   บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ
4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

   บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที

ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....

จับคู่ “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 คน
2. ให้สมาชิกในกลุ่มร่วมกันหาคำตอบจากโจทย์ที่กำหนดให้ แล้วนำคำตอบเติมในช่องว่าตรงกับตัวอักษรและใช้วิธีการบวก ลบ คูณ หรือหาร เพื่อให้ได้สมการที่สอดคล้องกับผลลัพธ์
3. เมื่อได้คำตอบครบเรียบร้อยแล้วให้แต่ละกลุ่มยกขึ้นแล้วขานคำว่า “เย้” พร้อม ๆ กัน
4. จับคู่คำตอบถูก ได้รับคะแนนตำแหน่งละ 1 คะแนน
5. กลุ่มที่เสร็จก่อนและถูกต้องสมบูรณ์ได้เป็นกลุ่มแรกได้รับคะแนนโบนัส 3 คะแนน กลุ่มที่ 2 ได้ 2 คะแนน และกลุ่มที่ 3 ได้ 1 คะแนน ตามลำดับ
6. เมื่อครูสุ่มตัวแทนกลุ่มให้นำเสนอแล้วตอบคำถามถูกต้องได้รับคะแนนโบนัสคำถามละ 1 คะแนน

$\tan\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$ $\operatorname{arcsec}\left(2\tan\frac{\pi}{4}\right)$ $\cos\left(\arctan(-1)\right)$ $\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}\right)$

$\operatorname{cosec}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\arctan\left(-2\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\tan\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ข้อ	จำนวนแรก	เครื่องหมาย	จำนวนที่สอง		ผลลัพธ์
	2(ตัวอย่าง)	+	3(ตัวอย่าง)	=	5
1	A		B	=	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
2	C		D	=	2
3	E		F	=	0

ข้อ	**จำนวนแรก**	**เครื่องหมาย**	**จำนวนที่สอง**		**ผลลัพธ์**
4	G		H	=	$\frac{\pi}{12}$

เฉลยใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

ข้อ	จำนวนแรก	เครื่องหมาย	จำนวนที่สอง		ผลลัพธ์
1	A $\tan\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\times$	B $\tan\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$	=	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
2	C $\operatorname{cosec}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}$	$\div$	D $\cos\left(\arctan(-1)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$	=	2
3	E $\arctan\left(-2\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$	$+$	F $\operatorname{arcsec}\left(2\tan\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{3}$	=	0
4	G $\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{4}$	$-$	H $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$	=	$\frac{\pi}{12}$

ข้อ 1 ให้ $\arcsin\frac{1}{2}=\alpha$ จะได้ $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ หาค่า α ที่ $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ และ

$\sin\alpha=\frac{1}{2}$ เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

จะได้ $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ นั่นคือ $\tan\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ให้ $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\beta$ จะได้ $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ หาค่า β ที่ $0\le\beta\le\pi$ และ

$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

จะได้ $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ นั่นคือ $\tan\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

ดังนั้น $\tan\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)\times\tan\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ □

ข้อ 2 ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\alpha$ จะได้ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ หาค่า α ที่ $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ และ

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

จะได้ $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ นั่นคือ

$$\operatorname{cosec}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$$

ให้ $\arctan(-1)=\beta$ จะได้ $\tan\beta=-1$ หาค่า β ที่ $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ และ

$\tan\beta=-1$ เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

จะได้ $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$ นั่นคือ

$$\cos(\arctan(-1))=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\div\cos(\arctan(-1))=\sqrt{2}\div\frac{\sqrt{2}}{2}=2$ □

ข้อ 3 ให้ $\arctan\left(-2\sin\frac{\pi}{3}\right)=\alpha$ จะได้ $\tan\alpha=-2\sin\frac{\pi}{3}=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$

หาค่า α ที่ $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\alpha=-\sqrt{3}$ เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี

$-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ จะได้ $\arctan\left(-2\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$

ให้ $\operatorname{arcsec}\left(2\tan\frac{\pi}{4}\right)=\beta$ จะได้ $\sec\beta=2\tan\frac{\pi}{4}=2(1)=2$

และเนื่องจาก $\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta}$

จะได้ $\cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{2}$ หาค่า β ที่ $0 \le \beta \le \pi$ และ $\cos\beta = \frac{1}{2}$ เนื่องจาก

ในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

จะได้ $\sec\frac{\pi}{3} = 2$ นั่นคือ $\operatorname{arcsec}\left(2\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\arctan\left(-2\sin\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{arcsec}\left(2\tan\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 0$ □

ข้อ 4 ให้ $\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}\right) = \alpha$ จะได้

$\cot\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ และ

และเนื่องจาก $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ จะได้ $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{1}{1} = 1$

หาค่า α ที่ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\alpha = 1$ เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $\frac{\pi}{4}$ เพียง

ค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ จะได้ $\cot\frac{\pi}{4} = 1$ นั่นคือ $\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4}$

ให้ $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \beta$ จะได้ $\cos\beta = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ หาค่า β ที่ $0 \le \beta \le \pi$ และ $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เนื่องจากในช่วง

$[0,\pi]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ นั่นคือ $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}\right) - \arccos\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ □

แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1) หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้
2) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์ในการหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้
2) ใช้เหตุผลในการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

.....

1. จงหาค่าของ

1) $\arcsin 0$ 2) $\arccos 1$ 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 5) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ 6) $\arctan 0$

7) $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{2}\right)$ 8) $\operatorname{arccosec}(-1)$ 9) $\operatorname{arccot}(-1)$

10) $\tan\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 11) $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right)$ 12) $\sec\left(\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

13) $\tan\left(\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\right)$ 14) $\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ 15) $\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

16) $\cos\left(\arccos\frac{3}{5}+\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$ 17) $\tan\left(\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right)\right)$

2. จงแสดงว่า

1) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\arcsin(-1)$

2) $\cos(2\arcsin x)=1-2x^2$ เมื่อ $x\in[-1,1]$

3) $\sec(\arctan x)=\sqrt{1+x^2}$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$

4) $\arctan x+\arctan(-x)=0$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$ 5) $\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

1. 1) ให้ $\arcsin 0 = \theta$ จะได้ $\sin\theta = 0$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = 0$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี 0 เพียงค่าเดียวที่ $\sin 0 = 0$

ดังนั้น $\arcsin 0 = 0$ □

2) ให้ $\arccos 1 = \theta$ จะได้ $\cos\theta = 1$

หาค่า θ ที่ $0 \le \theta \le \pi$ และ $\cos\theta = 1$

เนื่องจากในช่วง $[0, \pi]$ มี 0 เพียงค่าเดียวที่ $\cos 0 = 1$

ดังนั้น $\arccos 1 = 0$ □

3) ให้ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \theta$ จะได้ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

หาค่า θ ที่ $0 \le \theta \le \pi$ และ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0, \pi]$ มี $\frac{3\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ □

4) ให้ $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \theta$ จะได้ $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

ดังนั้น $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$ □

5) ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\theta$ จะได้ $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ □

6) ให้ $\arctan 0=\theta$ จะได้ $\tan\theta=0$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta=0$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี 0 เพียงค่าเดียวที่ $\tan 0=0$

ดังนั้น $\arctan 0=0$ □

7) ให้ $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{2}\right)=\theta$ จะได้ $\sec\theta=-\sqrt{2}$

เนื่องจาก $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ จะได้ $\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{-\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

หาค่า θ ที่ $0\le\theta\le\pi$ และ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{3\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\operatorname{arcsec}\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$ □

8) ให้ $\operatorname{arccosec}(-1)=\theta$ จะได้ $\operatorname{cosec}\theta=-1$

เนื่องจาก $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$ จะได้ $\sin\theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}=\frac{1}{-1}=-1$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta=-1$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

ดังนั้น $\operatorname{arccosec}(-1)=-\frac{\pi}{2}$ □

9) ให้ $\operatorname{arccot}(-1)=\theta$ จะได้ $\cot\theta=-1$

เนื่องจาก $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ จะได้ $\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}=\frac{1}{-1}=-1$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta=-1$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

ดังนั้น $\operatorname{arccot}(-1)=-\frac{\pi}{4}$ □

10) ให้ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\theta$

จะได้ $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ โดยที่ $0\le\theta\le\pi$

เนื่องจาก $\cos\theta>0$ และ $0\le\theta\le\pi$

จะได้ $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$$=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$=1-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{4}$$

ดังนั้น $\sin\theta=\frac{1}{2}$ หรือ $\sin\theta=-\frac{1}{2}$

จาก $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin\theta=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\tan\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\tan\theta$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ □

11) ให้ $\arctan\frac{1}{2}=\theta$

จะได้ $\tan\theta=\frac{1}{2}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\tan\theta>0$ และ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

จะได้ $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$

จาก $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ เมื่อ $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$

จะได้
$$\begin{aligned}\sec^2\theta &= 1+\tan^2\theta\\ &= 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &= 1+\frac{1}{4}\\ &= \frac{5}{4}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sec\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$ หรือ $\sec\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

จาก $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sec\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

นั้นคือ จะได้ $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ และ
$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= 1-\cos^2\theta\\ &= 1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\\ &= 1-\frac{4}{5}\\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right) &= \tan\theta\\ &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

12) ให้ $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}=\theta$

จะได้ $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta>0$ และ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

จะได้ $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$$=1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2$$

$$=1-\frac{4}{5}$$

$$=\frac{1}{5}$$

ดังนั้น $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ หรือ $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

จาก $0<\theta\le\frac{\pi}{2}$ จะได้ $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\sec\left(\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\sec\theta$

$$=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{5}$$ □

13) ให้ $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)=\theta$ จะได้ $\sin\theta=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

นั่นคือ $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\tan\left(\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\right)=\tan\frac{\pi}{3}$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{3}$$ □

14) ให้ $\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\theta$

จะได้ $\cos\theta=\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

จะได้ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ โดยที่ $0\le\theta\le\pi$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{2\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3}$ □

15) ให้ $\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\theta$ จะได้ $\sin\theta=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

จะได้ $\sin\theta=\frac{1}{2}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{3}$ □

16) ให้ $\arccos\frac{3}{5}=\alpha$

จะได้ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ โดยที่ $0\le\alpha\le\pi$

เนื่องจาก $\cos\alpha>0$ และ $0\le\alpha\le\pi$

จะได้ $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

จะได้ $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

ดังนั้น $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ หรือ $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$

จาก $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ และ

ให้ $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)=\beta$

จะได้ $\sin\beta=-\frac{3}{5}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta < 0$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ $-\frac{\pi}{2} \le \beta < 0$

จาก $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

จะได้ $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

ดังนั้น $\cos\beta = \frac{4}{5}$ หรือ $\cos\beta = -\frac{4}{5}$

จาก $-\frac{\pi}{2} \le \beta < 0$ จะได้ $\cos\beta = \frac{4}{5}$

ดังนั้น $\cos\left(\arccos\frac{3}{5} + \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = \cos(\alpha + \beta)$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{12}{25} + \frac{12}{25}$$

$$= \frac{24}{25}$$ □

17) ให้ $\arcsin\frac{4}{5} = \alpha$

จะได้ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

จะได้ $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

จะได้ $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

ดังนั้น $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ หรือ $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

จาก $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ และ

ให้ $\arccos\frac{4}{5} = \beta$ จะได้ $\cos\beta = \frac{4}{5}$

จะได้ $\cos\beta = \frac{4}{5}$ โดยที่ $0 \le \beta \le \pi$

เนื่องจาก $\cos\beta > 0$ และ $0 \le \beta \le \pi$

จะได้ $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

จะได้ $\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1-\frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

ดังนั้น $\sin\beta = \frac{3}{5}$ หรือ $\sin\beta = -\frac{3}{5}$

จาก $0 \le \beta < \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin\beta = \frac{3}{5}$

ดังนั้น $\tan\left(\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)\right) = \tan\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{1+\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{1+(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}{1+\left(\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\right)}$$

$$= \frac{\frac{16+9}{25}}{1-0}$$

$$= 1$$ □

2. 1) ให้ $\arcsin\frac{1}{2} = \alpha$

จะได้ $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

นั่นคือ $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \beta$

จะได้ $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

นั่นคือ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ และ

ให้ $\arcsin(-1) = \gamma$

จะได้ $\sin\gamma = -1$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

นั่นคือ $-\arcsin(-1) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha+\beta$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\arcsin(-1)$ □

2) ให้ $\arcsin x=\theta$ จะได้ $\sin\theta=x$

จะได้ $\sin\theta=x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

จาก $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

จะได้ $\cos(2\arcsin x)=\cos 2\theta$

$$=2\cos^2\theta-1$$

$$=2\left(1-\sin^2\theta\right)-1$$

$$=-2\sin^2\theta+1$$

$$=1-2x^2 \qquad \text{เมื่อ } x\in[-1,1]$$ □

3) ให้ $\arctan x=\theta$ จะได้ $\tan\theta=x$

จะได้ $\tan\theta=x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

จาก $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

จะได้ $\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}$ เพราะ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

จะได้ $\sec(\arctan x)=\sec\theta$

$$=\sqrt{1+\tan^2\theta}$$

$$=\sqrt{1+x^2} \qquad \text{เมื่อ } x\in\mathbb{R}$$ □

4) ให้ $\arctan x=\theta$ จะได้ $\tan\theta=x$

จะได้ $\tan\theta=x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $-\tan\theta=-x$

จาก $\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$

จะได้ $\tan(-\theta) = -x$

นั่นคือ $\arctan(-x) = -\theta$

ดังนั้น $\arctan x + \arctan(-x) = \theta + (-\theta) = 0$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ □

5) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ให้ $\arctan x = \alpha$

จะได้ $\tan\alpha = x$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ให้ $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \beta$

จะได้ $\sin\beta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}$

จาก $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$

จะได้ $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$

$$= 1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

จะได้ $\alpha = \beta$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

จาก $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

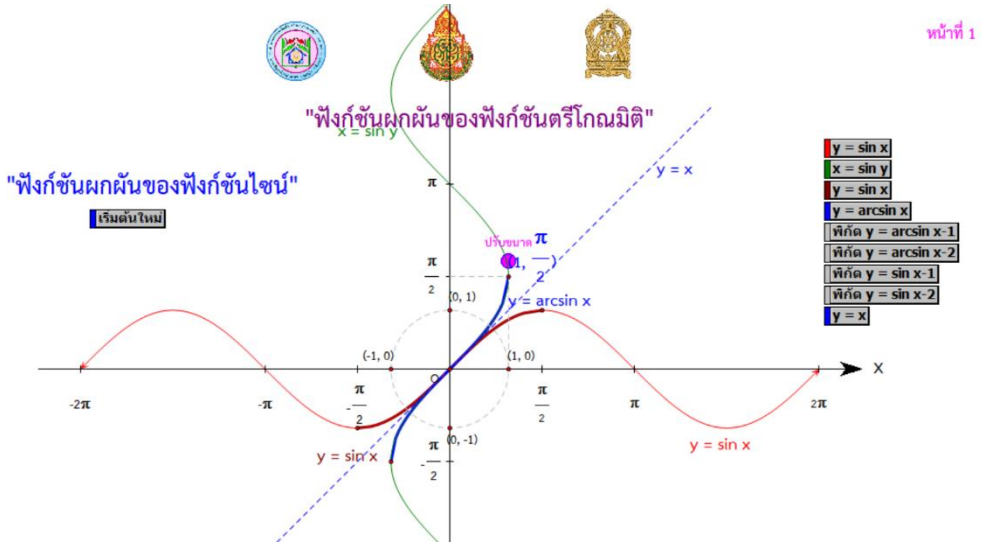
$$= x$$

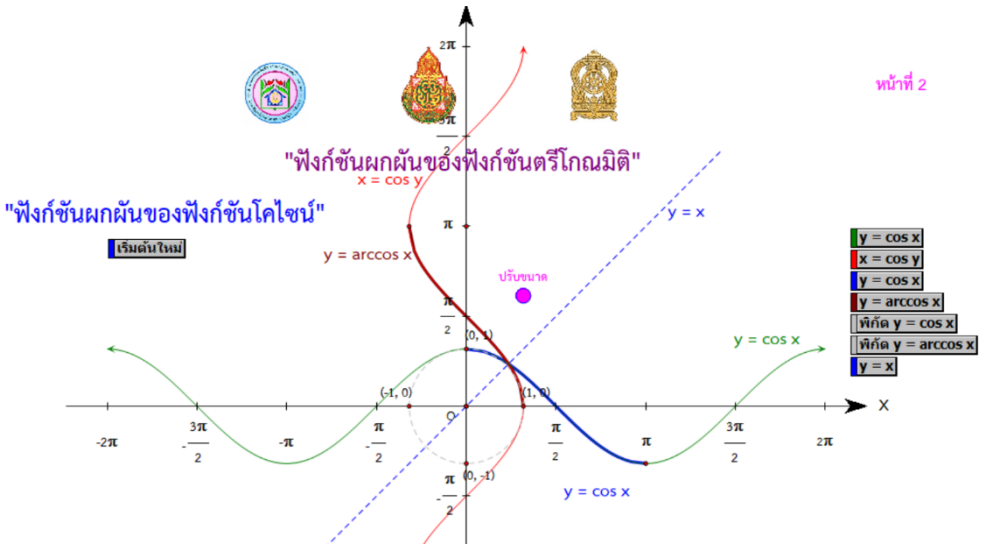
จะได้ $\tan\alpha = x = \tan\beta$

ดังนั้น $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ □

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad

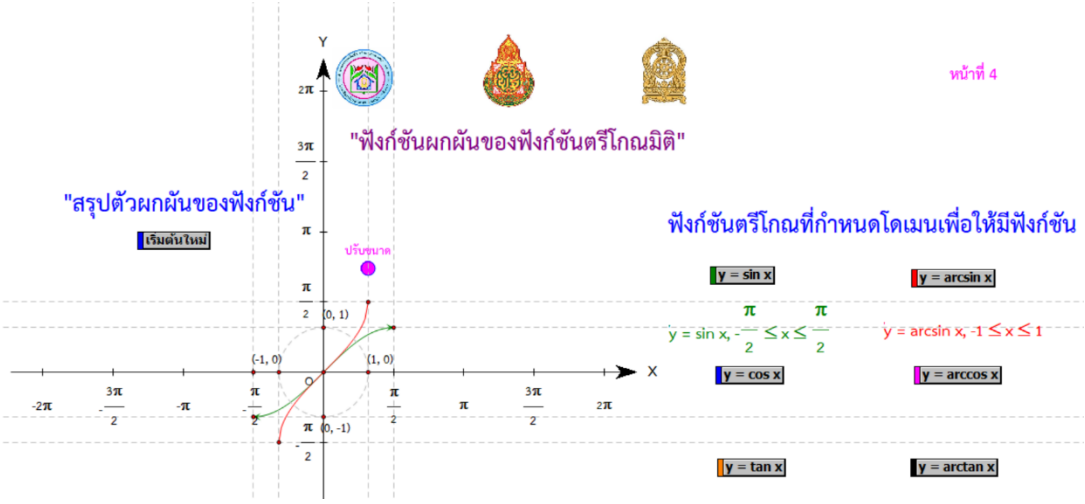
เรื่อง “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” หน้า 1 – 3





สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad

เรื่อง “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” หน้า 4



เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 1) - ข้อ 9)) ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 8 – 9 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 1) - ข้อ 9)) ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 - 7 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 1) - ข้อ 9)) ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 5 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 1) - ข้อ 9)) ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ ต่ำกว่า 4 ข้อ หรือ มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 1) - ข้อ 9)) แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันชองฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ								ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (หาค่า)				2) (แสดงความสัมพันธ์)					
		แบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 1 (ข้อ 1) - ข้อ 9))				แบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 2					
		4	3	2	1	4	3	2	1		

เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์ในการหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 10) - ข้อ 17)) ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 10) - ข้อ 17)) ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 - 6 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 10) - ข้อ 17)) ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 10) - ข้อ 17)) ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ต่ำกว่า 3 ข้อหรือมีร่องรอยของความพยายามในการแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 (ข้อ 10) - ข้อ 17)) แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้เหตุผลในการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้	สามารถใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 ข้อ	สามารถใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ								ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (การแก้ปัญหา) แบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 1 (ข้อ 10) - ข้อ 17))				2) (การให้เหตุผล) แบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 2					
		4	3	2	1	4	3	2	1		

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1. ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น และปฏิบัติตนตามข้อตกลงที่กำหนดให้	ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นบางส่วนและปฏิบัติตนตามข้อตกลงที่กำหนดให้เป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่และปฏิบัติตนตามข้อตกลงที่กำหนดให้ร่วมกันเป็นบางครั้งและต้องอาศัยการแนะนำหรือตักเตือน	ไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”
2. มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อยโดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อยบางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน	แต่งกายไม่เรียบร้อยหรือไม่แก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน
3. ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรงเวลา	การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที
4. มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ทุกข้อหรือครบทุกข้อแต่ไม่ถูกต้องหรือไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 8 “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (ซื่อสัตย์สุจริต)				2) (มีวินัย)				3) (ใฝ่เรียนรู้)				4) (มุ่งมั่นในการทำงาน)					
		แบบฝึกหัดที่ 8				การแต่งกาย				การเข้าเรียน				แบบฝึกหัด 8					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	สามารถใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 ข้อ	สามารถใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 ข้อ	สามารถใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	ไม่มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน ไม่แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มหรือช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ได้	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหาทุกครั้ง	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นส่วนใหญ่	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นบางครั้ง	ไม่ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหา

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (การสื่อสาร)				2) (การคิด)				3) (ทักษะชีวิต)				4) (เทคโนโลยี)					
		ใบงาน (ฟังก์ชันผกผัน)				ใบงาน (ฟังก์ชันผกผัน)				การกิจกรรมกลุ่ม				สื่อ gsp (ฟังก์ชันผกผัน)					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

แบบบันทึกสรุปคะแนนแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้				คะแนนรวม	คะแนนน้ำหนัก
		1 ด้านความรู้	2 ด้านทักษะฯ	3 ด้านคุณลักษณะฯ	4 ด้านสมรรถนะฯ		
		5	5	5	5	20	5

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ : บริษัท ธนธัชการพิมพ์ จำกัด.

พิชิต ฤทธิ์จรูญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงกทพฯ : เฮ้าส์ออฟเคอร์มิสท์.

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ.** พระนครศรีอยุทธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.

ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฎานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-NET คณิตศาสตร์ ม.6.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.**

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.** พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 5. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.

อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.