แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201 **ภาคเรียนที่ 1**

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

สาระการเรียนรู้ การหาระยะทางและความสูง **เวลา 3 ชั่วโมง**

1. ผลการเรียนรู้

ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

การหาระยะทางและความสูง

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

แก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงสามารถทำได้โดยอาศัยความรูเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งจะมีขนาดของมุมเข้ามาเกี่ยวข้องรวมทั้ง มุมก้ม(angle of depression) และมุมเงย (angle of elevation)

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาระยะทางและความสูงได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

4.2.2 เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

4.2.3 ใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์วิธีการที่หลากหลายในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์

4.3.2 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.3 มีวินัย

4.3.4 ใฝ่เรียนรู้

4.3.5 อยู่อย่างพอเพียง

4.3.6 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.3.7 รักความเป็นไทย

4.3.8 มีจิตสาธารณะ

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

4.4.1 ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาระยะทางและความสูงได้

4.4.2 ใช้การคิดในการแสดงวิธีทำในการหาระยะทางและความสูงได้

4.4.3 ใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงได้

4.4.4 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้

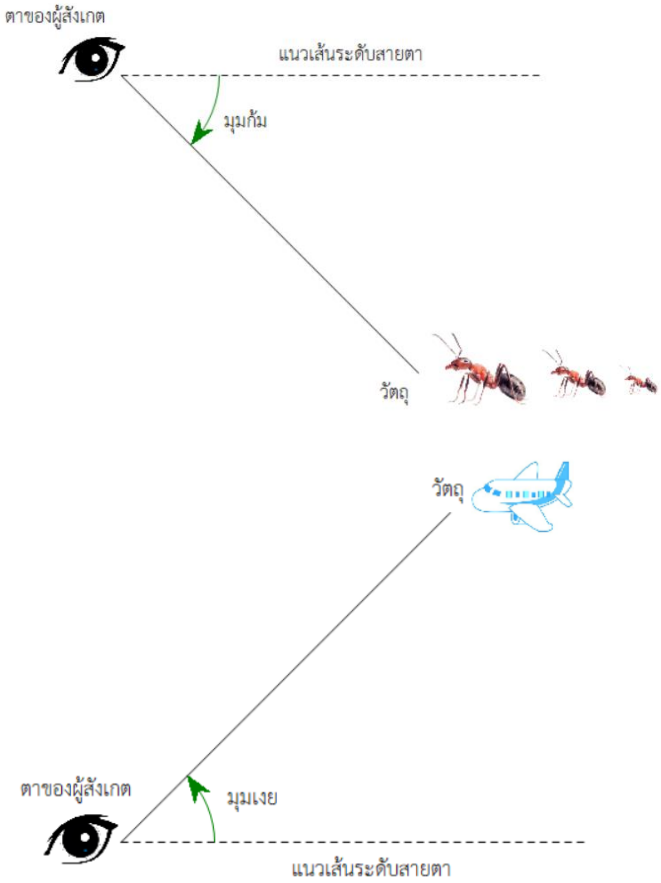
4.4.5 ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "การหาระยะทางและความสูง" ได้

5. เนื้อหา/สาระ

การหาระยะทางและความสูง

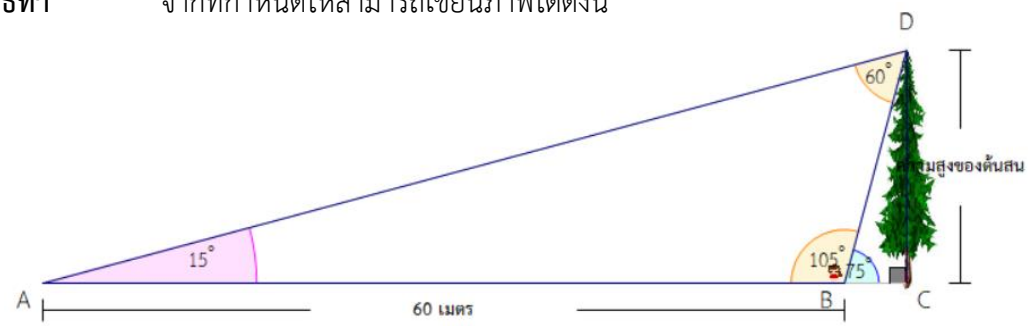
ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูง ซึ่งบางครั้งใช้เครื่องมือวัดโดยตรงไม่ได้ เช่น การวัดความสูงของภูเขา การหาความกว้างของแม่น้ำ สามารถทำได้โดยอาศัยความรูเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งจะมีขนาดของมุมเข้ามาเกี่ยวข้องรวมทั้ง **มุมก้ม(angle of depression)** และ **มุมเงย (angle of elevation)**

มุมก้มและมุมเงยเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและเส้นจากตาไปยังวัตถุ ถ้าวัตถุอยู่ต่ำกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า มุมก้ม แต่ถ้าวัตถุอยู่สูงกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า มุมเงย ดังรูป โดยขนาดของมุมก้มและมุมเงยจะเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ



ตัวอย่างที่ 1 น้องมิ้นยืนอยู่บนสนามแห่งหนึ่งมองเห็นยอดต้นสนเป็นมุมเงย 15 องศา แต่เมื่อเดินตรงเข้าไปหาเสาธงอีก 60 เมตร เขามองเห็นยอดต้นสนเป็นมุมเงย 75 องศา ถ้าไม่คิดความสูงน้องมิ้นต้นสนสูงประมาณเท่าใด

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A เป็นจุดที่น้องมิ้นยืนมองยอดต้นสนในครั้งแรก

ให้ B เป็นจุดที่น้องมิ้นยืนมองยอดต้นสนในครั้งหลัง

และ CD เป็นความสูงของต้นสน

จะได้ ระยะ AB เท่ากับ 60 เมตร

เนื่องจาก $C\hat{A}D = 15^\circ$ และ $C\hat{B}D = 75^\circ$

จะได้ $A\hat{B}D = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

ดังนั้น $A\hat{D}B = 180^\circ - 105^\circ - 15^\circ = 60^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin 15^\circ}{BD} = \frac{\sin 60^\circ}{AB}$$

$$BD = \frac{AB \sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$$

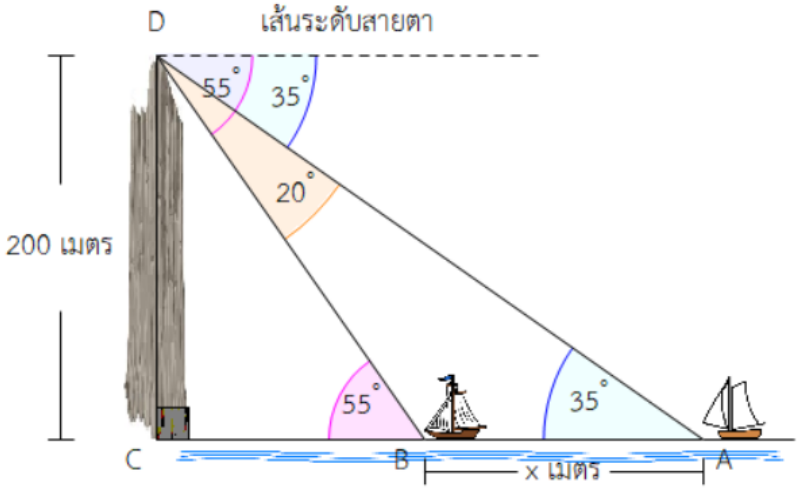
พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\begin{aligned}
CD &= BD \sin 75^\circ \\
&= \frac{AB \sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}\left(\sin 75^\circ\right) \\
&= 60\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin 15^\circ \sin 75^\circ\right) \\
&= \frac{60}{\sqrt{3}}\left(2 \sin 15^\circ \sin 75^\circ\right) \\
&= \frac{60}{\sqrt{3}}\left(2 \sin 15^\circ \sin\left(90^\circ - 15^\circ\right)\right) \\
&= \frac{60}{\sqrt{3}}\left(2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ\right) \\
&= \frac{60}{\sqrt{3}} \sin\left(2 \cdot 15^\circ\right) \\
&= \frac{60\sqrt{3}}{3} \sin 30^\circ \\
&= 20\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 10\sqrt{3} \\
&\approx 17.32
\end{aligned}$$

ดังนั้น ความสูงของต้นสนสูงประมาณ 17.32 เมตร □

ตัวอย่างที่ 2 จากหน้าผาสูง 200 เมตร จากระดับน้ำทะเลปานกลาง นักสำรวจคนหนึ่งมองเห็นเรือสองลำทอดสมออยู่ในทะเลเป็นมุมก้ม 35° และ 55° จากเส้นระดับสายตาเส้นเดียวกัน จงหาเรือทั้งสองลำนั้นอยู่ห่างกันเท่าใด

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A และ B เป็นตำแหน่งของเรือสองลำ โดยให้เรือทั้งสองห่างกัน x เมตร และ CD เป็นความสูงของหน้าผา

จะได้ว่า $CD = 200$ เมตร และ $A\hat{D}B = 55^\circ - 35^\circ = 20^\circ$

โดยใช้ความรู้เรื่องเส้นขนาน จะได้ $D\hat{A}B = 35^\circ$ และ $D\hat{B}C = 55^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\sin D\hat{B}C = \frac{CD}{BD}$$

$$\sin 55^\circ = \frac{200}{BD}$$

ดังนั้น

$$BD = \frac{200}{\sin 55^\circ}$$

$$\approx \frac{200}{0.8192}$$

$$\approx 244.14$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ADB จากฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin A\hat{D}B}{x} = \frac{\sin D\hat{A}B}{BD}$$

$$\frac{\sin 20^\circ}{x} = \frac{\sin 35^\circ}{BD}$$

$$x = \frac{BD \sin 20^\circ}{\sin 35^\circ}$$

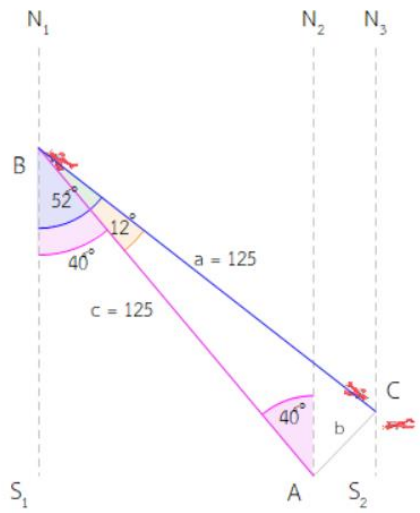
$$\approx \frac{(244.14)(0.3420)}{(0.5736)}$$

$$\approx 145.56$$

ดังนั้น เรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันประมาณ 145.56 เมตร □

ตัวอย่างที่ 3 จากจุด A นักบินบินไปยังจุด B ในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตก โดยทำมุม 40° กับทิศเหนือเป็นระยะทาง 125 ไมล์ และบินไปยังจุด C เป็นระยะทาง 125 ไมล์ ในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออกโดยทำมุม 52° กับทิศใต้ จงหาว่านักบินจะต้องบินจากจุด C ไปแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตกเป็นระยะทางเท่าใด โดยบินทำมุมเท่าใดกับทิศใต้ เพื่อกลับไปยังจุด A

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



จากรูป $\overline{S_1N_1}$ ขนานกับ $\overline{AN_2}$ จะได้ $S_1\hat{B}A = 40^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จะได้ $A\hat{B}C = 52^\circ - 40^\circ = 12^\circ$

จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos A\hat{B}C \\
&= 125^2 + 125^2 - 2(125)(125)\cos 12^\circ \\
&\approx 125^2 + 125^2 - 2(125)(125)(0.9781) \\
&\approx 15,625 + 15,625 - 2(15,625)(0.9781) \\
&\approx 31,250 - 30,565.625 \\
&\approx 684.375
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $b \approx 26.16$

จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin B\hat{A}C}{a} = \frac{\sin A\hat{B}C}{b}$$

$$\sin B\hat{A}C = \frac{a\sin A\hat{B}C}{b}$$

$$= \frac{125\sin 12^\circ}{26.16}$$

$$\approx \frac{125(0.2079)}{26.16}$$

$$\approx 0.9934$$

จะได้ $B\hat{A}C \approx 83.42^\circ$

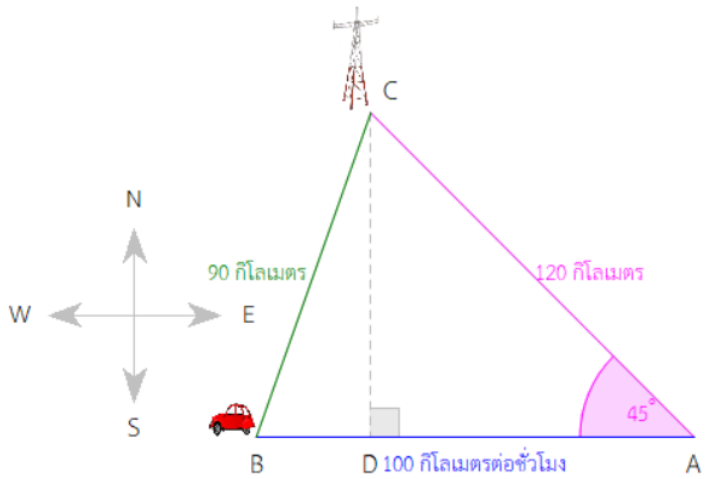
ดังนั้น $C\hat{A}N_2 \approx 83.42^\circ - 40^\circ$ นั่นคือ $C\hat{A}N_2 \approx 43.42^\circ$

จะได้ $A\hat{C}S_2 \approx 43.42^\circ$

ดังนั้น นักบินจะต้องบินจากจุด C ไปแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตกเป็นระยะทางประมาณ 26.16 ไมล์ โดยบินทำมุมประมาณ 43.42° กับทิศใต้เพื่อกลับไปยังจุด A

ตัวอย่างที่ 4 เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ต้นหนึ่งอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น A เป็นระยะทาง 120 กิโลเมตร ในทิศตะวันตกเฉียงเหนือของจุดเริ่มต้น รถคันหนึ่งวิ่งออกจากจุดเริ่มต้น A ในเวลา 06.00 น. โดยวิ่งไปทางทิศตะวันตกด้วยความเร็ว 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาว่า ณ เวลาใดที่รถคันนี้อยู่ห่างจากเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ทางซ้ายมือเป็นระยะทาง 90 กิโลเมตร

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A แทนตำแหน่ง จุดเริ่มต้น

B แทนตำแหน่ง รถคนนี้อยู่ห่างจากเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ทางซ้ายมือเป็นระยะทาง 90 กิโลเมตร

C แทนตำแหน่ง เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์

จากรูปสามเหลี่ยม ABC ใช้กฎของไซน์จะได้ว่า

$$\frac{\sin B\hat{A}C}{BC} = \frac{\sin A\hat{B}C}{AC}$$

$$\sin A\hat{B}C = \frac{AC\sin B\hat{A}C}{BC}$$

$$= \frac{120\sin 45^{\circ}}{90}$$

$$= \frac{120\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{90}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\approx 0.9428$$

จะได้ $A\hat{B}C \approx 70.50^{\circ}$

นั่นคือ $A\hat{C}B \approx 180^{\circ} - 45^{\circ} - 70.50^{\circ} \approx 64.50^{\circ}$

จากกฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC)\cos A\hat{C}B$$

$$= 120^2 + 90^2 - 2(120)(90)\cos 64.50^{\circ}$$

$$\approx 14,400 + 8,100 - (21,600)(0.4305)$$

$$\approx 22,500 - 9,298.8$$

$$\approx 13,201.2$$

จะได้ $AB \approx 114.90$

เนื่องจาก รถวิ่งด้วยความเร็ว 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เวลาที่ใช้ในการวิ่งจาก A ถึง B $\approx \frac{114.90}{100} \approx 1.15$ ชั่วโมง หรือ

1 ชั่วโมง 9 นาที

ดังนั้น เวลาที่รถคนนี้อยู่ห่างจากเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ทางซ้ายมือเป็นระยะทาง 90 กิโลเมตร เมื่อเวลาประมาณ 07.09 น.

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาระยะทางและความสูงได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง”	- แบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง”	- แบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง”	- แบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์วิธีการที่หลากหลายในการในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง”	- แบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	ใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์วิธีการที่หลากหลายในการในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ 1) รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์	ตรวจการร่วมกิจกรรมวันสำคัญที่แสดงถึง รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์	- บันทึกการเข้าร่วมกิจกรรมวันสำคัญ - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนรักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ซื่อสัตย์สุจริต	ตรวจการทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง””	- แบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีวินัย อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึกการเข้าเรียน - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนใฝ่เรียนรู้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
5) อยู่อย่างพอเพียง	ตรวจสมุด ชิ้นงาน	- สมุด ชิ้นงาน - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนอยู่อย่างพอเพียงอยู่ในระดับดีขึ้นไป
6) มุ่งมั่นในการทำงาน	การส่งแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง”	- แบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง”	นักเรียนมุ่งมั่นในการทำงานอยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
		- แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	
7) รักความเป็นไทย	ตรวจการแสดงความเคารพในชั้นเรียน	- แบบสังเกตการทำความเคารพ - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนรักความเป็นไทยอยู่ในระดับดีขึ้นไป
8) มีจิตสาธารณะ	ตรวจการรักษาความสะอาดโต๊ะเรียนและบริเวณที่นั่งเรียน	- แบบบันทึกการรักษาความสะอาดโต๊ะเรียน - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีจิตสาธารณะอยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาระยะทางและความสูงได้	ตรวจใบงาน “การหาระยะทางและความสูง”	- ใบงาน “การหาระยะทางและความสูง” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การสื่อสารในการนำเสนอในการหาระยะทางและความสูงได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การคิดในการแสดงวิธีทำในการหาระยะทางและความสูงได้	ตรวจใบงาน “การหาระยะทางและความสูง”	- ใบงาน “การหาระยะทางและความสูง” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การคิดในการแสดงวิธีทำในการหาระยะทางและความสูงได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงได้	ตรวจใบงาน “การหาระยะทางและความสูง”	- ใบงาน “การหาระยะทางและความสูง”	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความ

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
		- แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	สูงได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึกการทำงานกลุ่ม - แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
5) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "การหาระยะทางและความสูง" ได้	ตรวจการใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "การหาระยะทางและความสูง"	- สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "การหาระยะทางและความสูง" - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้เทคโนโลยีเพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "การหาระยะทางและความสูง"ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน

7.2 นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้ในการหาระยะทางและความสูงในชีวิตประจำวันได้อย่างบ้าง

แนวคำตอบ

หาความสูงของเสาธง

หาความสูงของตึก

หาความกว้างของแม่น้ำ

หาระยะห่างของเรือในทะเล

ขั้นสอนและอธิบายทฤษฎี

7.4 ครูอธิบายมุมก้มมุมเงย โดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” (หน้า 1) ควบคู่กับให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ “การหาระยะทางและความสูง” โดยการสนทนาถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน

7.5 ครูยกตัวอย่างการหาระยะทางและความสูง โดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” (หน้า 2 - 5) ควบคู่กับให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ “การหาระยะทางและความสูง” โดยการสนทนาถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน

ชั่วโมงที่ 2

7.6 ครูทบทวนการหาระยะทางและความสูงโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” (หน้า 2 - 5) ประกอบ

ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.7 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน “การหาระยะทางและความสูง” โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ “การหาระยะทางและความสูง” ในชั่วโมงที่ 1 ประกอบครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 3

7.8 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน “การหาระยะทางและความสูง” โดยครูสนทนาถามตอบกับนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม หน้าชั้นเรียน ครูอธิบายและนักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมอธิบายเพิ่มเติม

7.9 ครูอธิบายเฉลยใบงาน “การหาระยะทางและความสูง” เพิ่มเติม โดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” (หน้า 6 – 16) ร่วมการสนทนาถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน

ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.10 จากการทำใบงาน “การหาระยะทางและความสูง” และศึกษาใบความรู้ “การหาระยะทางและความสูง” ให้นักเรียนสรุปการหาระยะทางและความสูงโดยนำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติไปใช้ในชีวิตประจำวันอย่างน้อยคนละ 2 ตัวอย่าง และสรุปความรู้จากเรื่องฟังก์ชันเรื่องไหนบ้างที่ใช้ในการหาระยะทางและความสูงลงในสมุดหรือกระดาษ A4 เพื่อนำไปใช้ต่อไป

ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.11 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” เป็นการบ้าน

7.12 มอบหมายให้นักเรียนทบทวน “การหาระยะทางและความสูง” โดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง”

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/เทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- ใบความรู้ “การหาระยะทางและความสูง” - ใบงาน “การหาระยะทางและความสูง” - แบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง”	สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง”	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้ 1) นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาระยะทางและความสูงได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้				

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้				
3) ใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์วิธีการที่หลากหลายในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้				
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ 1) รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์				
2) ซื่อสัตย์สุจริต				
3) มีวินัย				
4) ใฝ่เรียนรู้				
5) อยู่อย่างพอเพียง				
6) มุ่งมั่นในการทำงาน				
7) รักความเป็นไทย				
8) มีจิตสาธารณะ				
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาระยะทางและความสูงได้				
2) ใช้การคิดในการแสดงวิธีทำในการหาระยะทางและความสูงได้				
3) ใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงได้				
4) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				
5) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” ได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

ใบความรู้ “การหาระยะทางและความสูง”

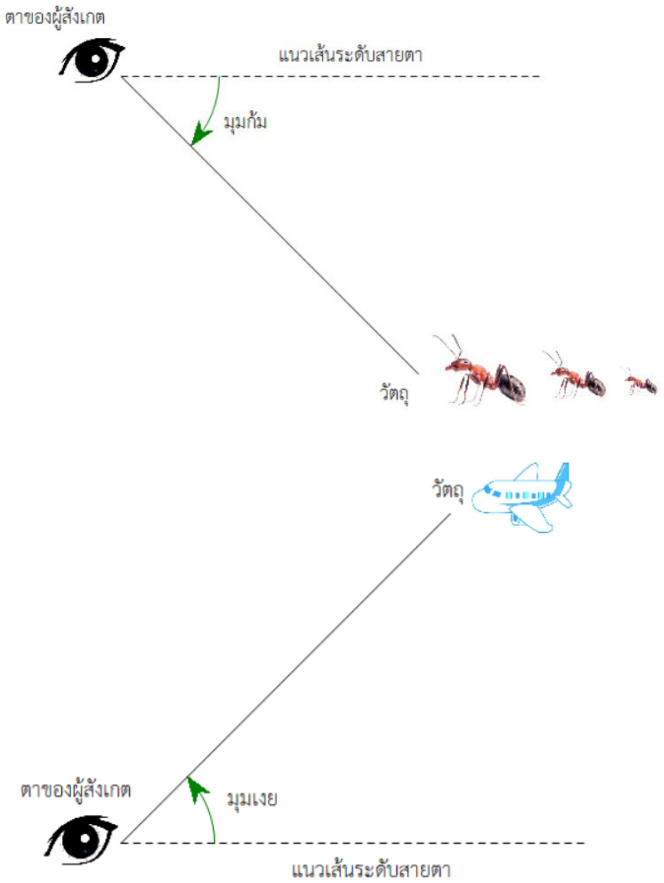
จุดประสงค์การเรียนรู้

นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาระยะทางและความสูงได้

การหาระยะทางและความสูง

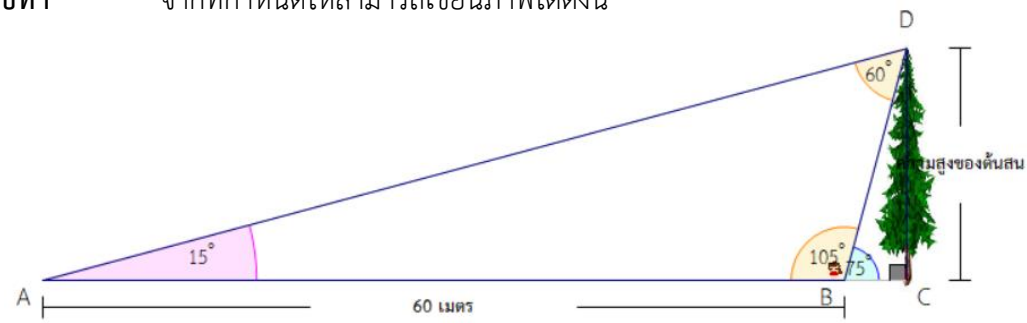
ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูง ซึ่งบางครั้งใช้เครื่องมือวัดโดยตรงไม่ได้ เช่น การวัดความสูงของภูเขา การหาความกว้างของแม่น้ำ สามารถทำได้โดยอาศัยความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งจะมีขนาดของมุมเข้ามาเกี่ยวข้องรวมทั้ง **มุมก้ม(angle of depression)** และ **มุมเงย (angle of elevation)**

มุมก้มและมุมเงยเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและเส้นจากตาไปยังวัตถุ ถ้าวัตถุอยู่ต่ำกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า มุมก้ม แต่ถ้าวัตถุอยู่สูงกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า มุมเงย ดังรูป โดยขนาดของมุมก้มและมุมเงยจะเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ



ตัวอย่างที่ 1 น้องมิ้นยืนอยู่บนสนามแห่งหนึ่งมองเห็นยอดต้นสนเป็นมุมเงย 15 องศา แต่เมื่อเดินตรงเข้าไปหาเสาธงอีก 60 เมตร เขามองเห็นยอดต้นสนเป็นมุมเงย 75 องศา ถ้าไม่คิดความสูงน้องมิ้นต้นสนสูงประมาณเท่าใด

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A เป็นจุดที่น้องมิ้นยืนมองยอดต้นสนในครั้งแรก

ให้ B เป็นจุดที่น้องมิ้นยืนมองยอดต้นสนในครั้งหลัง

และ CD เป็นความสูงของต้นสน

จะได้ ระยะ AB เท่ากับ 60 เมตร

เนื่องจาก $C\hat{A}D = 15^\circ$ และ $C\hat{B}D = 75^\circ$

จะได้ $A\hat{B}D = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

ดังนั้น $A\hat{D}B = 180^\circ - 105^\circ - 15^\circ = 60^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin 15^\circ}{BD} = \frac{\sin 60^\circ}{AB}$$

$$BD = \frac{AB \sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

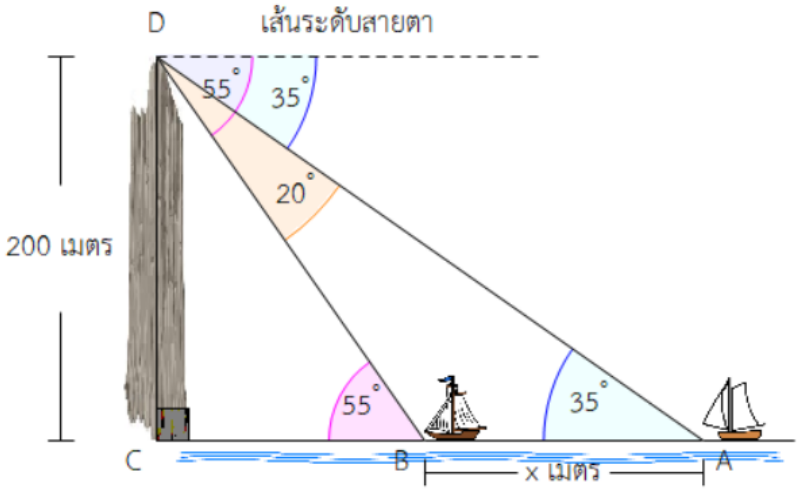
$$\begin{aligned} CD &= BD \sin 75^\circ \\ &= \frac{AB \sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}\left(\sin 75^\circ\right) \\ &= 60\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin 15^\circ \sin 75^\circ\right) \\ &= \frac{60}{\sqrt{3}}\left(2 \sin 15^\circ \sin 75^\circ\right) \\ &= \frac{60}{\sqrt{3}}\left(2 \sin 15^\circ \sin\left(90^\circ - 15^\circ\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{60}{\sqrt{3}}\left(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ\right)$$
$$= \frac{60}{\sqrt{3}}\sin\left(2\cdot 15^\circ\right)$$
$$= \frac{60\sqrt{3}}{3}\sin 30^\circ$$
$$= 20\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= 10\sqrt{3}$$
$$\approx 17.32$$

ดังนั้น ความสูงของต้นสนสูงประมาณ 17.32 เมตร □

ตัวอย่างที่ 2 จากหน้าผาสูง 200 เมตร จากระดับน้ำทะเลปานกลาง นักสำรวจคนหนึ่งมองเห็นเรือสองลำทอดสมออยู่ในทะเลเป็นมุมก้ม 35° และ 55° จากเส้นระดับสายตาเส้นเดียวกัน จงหาเรือทั้งสองลำนั้นอยู่ห่างกันเท่าใด

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A และ B เป็นตำแหน่งของเรือสองลำ โดยให้เรือทั้งสองห่างกัน x เมตร และ CD เป็นความสูงของหน้าผา

จะได้ว่า $CD = 200$ เมตร และ $A\hat{D}B = 55^\circ - 35^\circ = 20^\circ$

โดยใช้ความรู้เรื่องเส้นขนาน จะได้ $D\hat{A}B = 35^\circ$ และ $D\hat{B}C = 55^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\sin D\hat{B}C = \frac{CD}{BD}$$

$$\sin 55^{\circ} = \frac{200}{BD}$$

ดังนั้น

$$BD = \frac{200}{\sin 55^{\circ}}$$

$$\approx \frac{200}{0.8192}$$

$$\approx 244.14$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ADB จากฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin A\hat{D}B}{x} = \frac{\sin D\hat{A}B}{BD}$$

$$\frac{\sin 20^{\circ}}{x} = \frac{\sin 35^{\circ}}{BD}$$

$$x = \frac{BD \sin 20^{\circ}}{\sin 35^{\circ}}$$

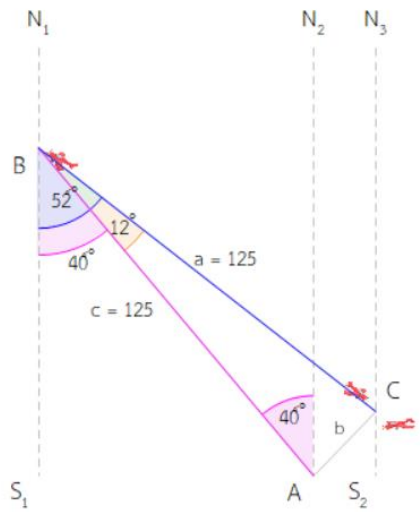
$$\approx \frac{(244.14)(0.3420)}{(0.5736)}$$

$$\approx 145.56$$

ดังนั้น เรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันประมาณ 145.56 เมตร □

ตัวอย่างที่ 3 จากจุด A นักบินบินไปยังจุด B ในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตก โดยทำมุม 40° กับทิศเหนือเป็นระยะทาง 125 ไมล์ และบินไปยังจุด C เป็นระยะทาง 125 ไมล์ ในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออกโดยทำมุม 52° กับทิศใต้ จงหาว่านักบินจะต้องบินจากจุด C ไปแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตกเป็นระยะทางเท่าใด โดยบินทำมุมเท่าใดกับทิศใต้ เพื่อกลับไปยังจุด A

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



จากรูป $\overline{S_1N_1}$ ขนานกับ $\overline{AN_2}$ จะได้ $S_1\hat{B}A = 40^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จะได้ $A\hat{B}C = 52^\circ - 40^\circ = 12^\circ$

จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos A\hat{B}C \\ &= 125^2 + 125^2 - 2(125)(125)\cos 12^\circ \\ &\approx 125^2 + 125^2 - 2(125)(125)(0.9781) \\ &\approx 15,625 + 15,625 - 2(15,625)(0.9781) \\ &\approx 31,250 - 30,565.625 \\ &\approx 684.375 \end{aligned}$$

ดังนั้น $b \approx 26.16$

จากกฎของไซน์ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\sin B\hat{A}C}{a} &= \frac{\sin A\hat{B}C}{b} \\ \sin B\hat{A}C &= \frac{a\sin A\hat{B}C}{b} \\ &= \frac{125\sin 12^\circ}{26.16} \\ &\approx \frac{125(0.2079)}{26.16} \\ &\approx 0.9934 \end{aligned}$$

จะได้ $B\hat{A}C \approx 83.42^\circ$

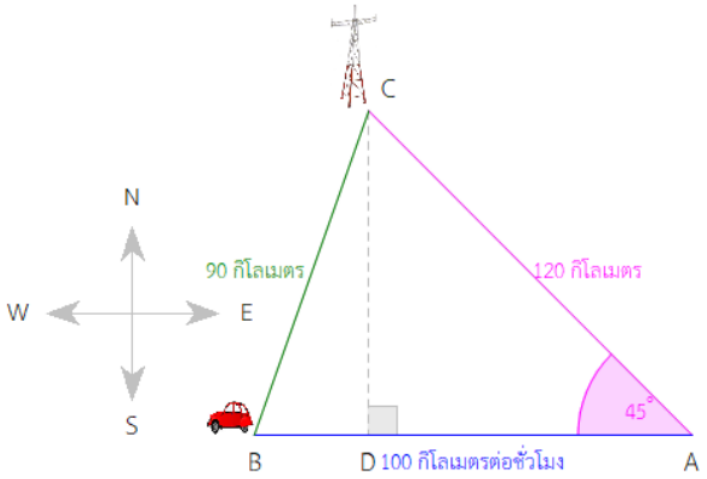
ดังนั้น $C\hat{A}N_2 \approx 83.42^\circ - 40^\circ$ นั่นคือ $C\hat{A}N_2 \approx 43.42^\circ$

จะได้ $A\hat{C}S_2 \approx 43.42^\circ$

ดังนั้น นักบินจะต้องบินจากจุด C ไปแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตกเป็นระยะทางประมาณ 26.16 ไมล์ โดยบินทำมุมประมาณ 43.42° กับทิศใต้เพื่อกลับไปยังจุด A

ตัวอย่างที่ 4 เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ต้นหนึ่งอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น A เป็นระยะทาง 120 กิโลเมตร ในทิศตะวันตกเฉียงเหนือของจุดเริ่มต้น รถคันหนึ่งวิ่งออกจากจุดเริ่มต้น A ในเวลา 06.00 น. โดยวิ่งไปทางทิศตะวันตกด้วยความเร็ว 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาว่า ณ เวลาใดที่รถคันนี้อยู่ห่างจากเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ทางซ้ายมือเป็นระยะทาง 90 กิโลเมตร

วิธีทำ จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A แทนตำแหน่ง จุดเริ่มต้น

B แทนตำแหน่ง รถคนนี้อยู่ห่างจากเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ทางซ้ายมือเป็นระยะทาง 90 กิโลเมตร

C แทนตำแหน่ง เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์

จากรูปสามเหลี่ยม ABC ใช้กฎของไซน์จะได้ว่า

$$\frac{\sin B\hat{A}C}{BC} = \frac{\sin A\hat{B}C}{AC}$$

$$\sin A\hat{B}C = \frac{AC\sin B\hat{A}C}{BC}$$

$$= \frac{120\sin 45^\circ}{90}$$

$$= \frac{120\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{90}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\approx 0.9428$$

จะได้ $A\hat{B}C \approx 70.50^\circ$

นั่นคือ $A\hat{C}B \approx 180^\circ - 45^\circ - 70.50^\circ \approx 64.50^\circ$

จากกฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC)\cos A\hat{C}B$$

$$= 120^2 + 90^2 - 2(120)(90)\cos 64.50^\circ$$

$$\approx 14,400 + 8,100 - (21,600)(0.4305)$$

$$\approx 22,500 - 9,298.8$$

$$\approx 13,201.2$$

จะได้ $AB \approx 114.90$

เนื่องจาก รถวิ่งด้วยความเร็ว 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เวลาที่ใช้ในการวิ่งจาก A ถึง B $\approx \frac{114.90}{100} \approx 1.15$ ชั่วโมง หรือ

1 ชั่วโมง 9 นาที

ดังนั้น เวลาที่รถคนนี้อยู่ห่างจากเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ทางซ้ายมือเป็น

ระยะทาง 90 กิโลเมตร เมื่อเวลาประมาณ 07.09 น.

ใบงาน “การหาระยะทางละความสูง”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาระยะทางและความสูงได้
2) ใช้การคิดในการแสดงวิธีทำในการหาระยะทางและความสูงได้
3) ใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงาน “การหาระยะทางละความสูง” ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1) รับใบงาน “การหาระยะทางละความสูง”
2) ให้นักเรียจับฉลากหมายเลขสถานการณ์ที่ได้รับมอบหมายกลุ่มละ 1 ข้อ
3) ให้นักเรียนระดมความคิดในการแก้ปัญหาสถานการณ์ที่กำหนดให้โดยใช้ความรู้เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ”
4) นักเรียนแต่ละกลุ่มออกนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาสถานการณ์ของกลุ่ม โดยใช้การอธิบาย แสดงบทบาทสมมติ การใช้เทคโนโลยี หรือวิธีอื่น ๆ
5) นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ แสดงความคิดเห็นและตอบคำถามเพิ่มเติม

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที

ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....

<table>
<tr><td rowspan="2">ข้อที่ 1</td><td colspan="2">สถานการณ์
เพชรยืนอยู่ที่เชิงเขาแห่งหนึ่ง มองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 47 องศา ถ้าเดินขึ้นไปตามไหล่เขาซึ่งเอียงทำมุม 32 องศา กับแนวระนาบ เป็นระยะทาง 100 เมตร พบว่ามุมเงยที่มองยอดเขาเป็น 77 องศา โดยวัดจากแนวระนาบ จงหาความสูงของภูเขาลูกนี้</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ความรู้ที่ใช้</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>ข้อที่ 2</td><td colspan="2">สถานการณ์
กล้ายืนอยู่บนพื้นราบมองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 15 องศา และเมื่อเดินเข้าไปหาตึกอีก 100 เมตร เขามองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 75 องศา ถ้ากล้าสูง 185 เซนติเมตร แล้วตึกมีความสูงเท่าใด</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิธีทำ</td><td>ความรู้ที่ใช้</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

ข้อที่ 3	**สถานการณ์** นักสำรวจยืนบนหน้าผาแห่งหนึ่งมองเห็นเรือสองลำลอยอยู่กลางทะเลเป็นมุมก้ม 30 องศา และ 75 องศา ตามลำดับ ถ้าหน้าผานี้สูง 50 เมตร แล้วเรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันเท่าใด

วิธีทำ	**ความรู้ที่ใช้**
ภาพ	

<table>
<tr><td rowspan="2">ข้อที่ 4</td><td colspan="2">สถานการณ์
มานะขับรถยนต์จากบ้านเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม 30 องศา กับทิศเหนือ เป็นระยะทาง 40 กิโลเมตร ไปยังร้านกาแฟแห่งหนึ่ง จากนั้นเขาขับรถยนต์ต่อไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออกโดยทำมุม 30 องศา กับทิศใต้เป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร ไปยังโรงเรียนทับปุดวิทยา มานะอยู่ห่างจากบ้านเป็นระยะทางเท่าใดและอยู่ทิศทางใดของบ้าน</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ความรู้ที่ใช้</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">ข้อที่ 5</td><td colspan="2">สถานการณ์
มานีอยู่ทางทิศใต้ของเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์และทำมุมเงย 60 องศา กับยอดเสา ชูใจอยู่ห่างทางทิศตะวันออกของมานี มองยอดเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์เป็นมุมเงย 30 องศา ถ้าระยะห่างระหว่างมานีกับชูใจ เท่ากับ 60 เมตร เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์สูงประมาณเท่าใด</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ความรู้ที่ใช้</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

ข้อที่ 6	**สถานการณ์** วีระยืนระหว่างตึกสองหลัง เขามองยอดตึกแรกเป็นมุมเงย 30 องศา และมองยอดตึกที่สองเป็นมุมเงย 60 องศา ถ้าตึกที่สองสูงกว่าตึกแรก $20\sqrt{3}$ เมตร และตึกทั้งสองห่างกัน 120 เมตร วีระจะยืนอยู่ห่างตึกแรกกี่เมตร

วิธีทำ	**ความรู้ที่ใช้**

ภาพ

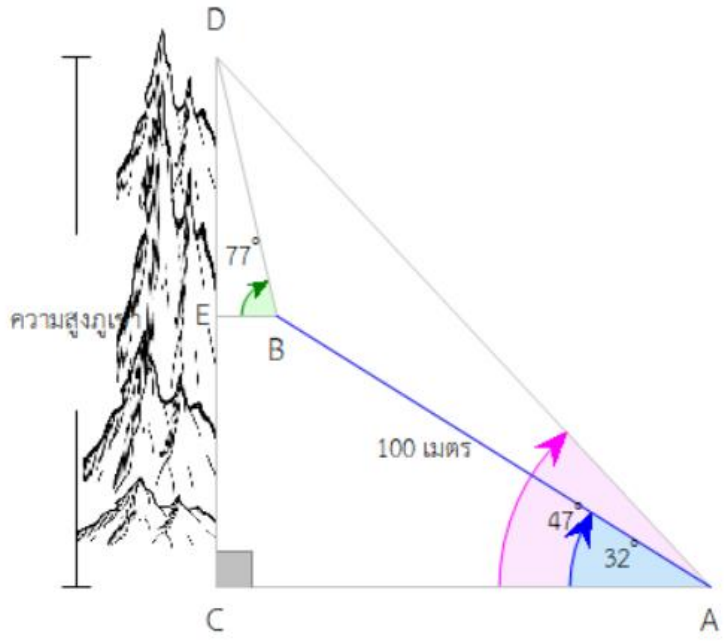
<table>
<tr><td rowspan="2">ข้อที่ 7</td><td colspan="2">สถานการณ์
เรือสองลำออกจากท่าเรือพร้อมกัน โดยเรือลำแรกเดินทางไปทางทิศเหนือ เรือลำที่สองเดินทางไปในทิศทำมุมกับเรือลำแรก 80 องศา ถ้าเรือลำแรกและลำที่สองวิ่งด้วยความเร็ว 60 ไมล์ทะเลต่อชั่วโมงและ 45 ไมล์ทะเลต่อชั่วโมง ตามลำดับ จงหาระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองลำเมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที</td></tr>
<tr><td>วิธีทำ</td><td>ความรู้ที่ใช้</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>ข้อที่ 8</td><td colspan="2">สถานการณ์
ปิติยืนบนดาดฟ้าของตึกสูง 30 เมตร มองเป็นรถยนต์คันที่ 1 จอดอยู่บนพื้นราบทางทิศใต้ของตึกเป็นมุมก้ม 30 องศา และมองเห็นรถยนต์คันที่ 2 จอดอยู่บนพื้นราบทางทิศตะวันตกของตึกเป็นมุมก้ม 60 องศา รถยนต์ทั้งสองคันจอดห่างกันเท่าใด</td></tr>
<tr><td colspan="2">วิธีทำ</td><td>ความรู้ที่ใช้</td></tr>
<tr><td colspan="3">ภาพ</td></tr>
</table>

เฉลยใบงาน “การหาระยะทางละความสูง”

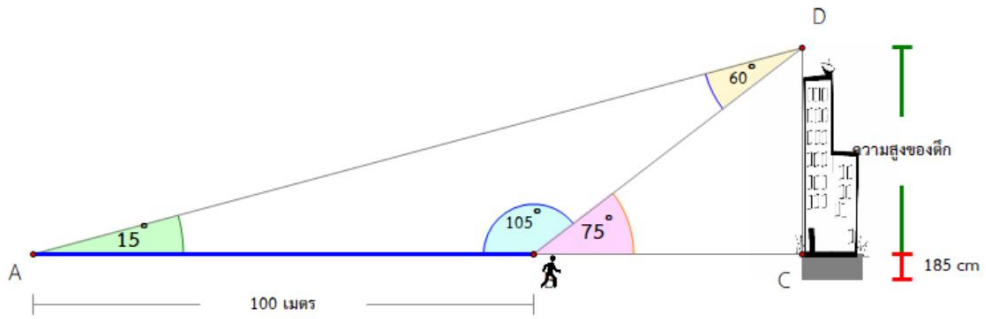
ข้อที่ 1	
ให้ A แทน จุดที่เพชรยืนอยู่ที่เชิงเขาแห่งหนึ่ง มองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 47 องศา B แทน จุดที่เพชรเดินขึ้นไปตามไหล่เขาทำมุม 32 องศากับแนวระนาบ เป็นระยะทาง 100 เมตร และ CD แทน ความสูงของภูเขา จาก $C\hat{A}D = 47^\circ$ และ $B\hat{A}C = 32^\circ$ จะได้ $D\hat{A}B = 47^\circ - 32^\circ = 15^\circ$ จาก $E\hat{B}D = 77^\circ$ จะได้ $B\hat{D}E = 90^\circ - 47^\circ = 13^\circ$ จาก $C\hat{A}D = 47^\circ$ จะได้ $A\hat{D}C = 43^\circ$ นั่นคือ $A\hat{D}B = 43^\circ - 13^\circ = 30^\circ$ จาก $D\hat{A}B = 15^\circ$ และ $A\hat{D}B = 30^\circ$ จะได้ $A\hat{B}D = 180^\circ - \left(15^\circ + 30^\circ\right) = 135^\circ$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จากกฎของไซน์จะได้ $\frac{\sin A\hat{B}D}{AD} = \frac{\sin A\hat{D}B}{AB}$ $\frac{\sin 135^\circ}{AD} = \frac{\sin 30^\circ}{100}$ $AD = \frac{100\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}$ $= \frac{100\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = 100\sqrt{2}$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD จะได้ $\sin C\hat{A}D = \frac{CD}{AD}$ $CD = AD\sin C\hat{A}D$ $= 100\sin 47^\circ$ ≈ 103.43 ดังนั้น ภูเขาลูกนี้สูงประมาณ 103.43 เมตร	**ความรู้ที่ใช้** ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมีขนาด 180 องศา กฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

ภาพ



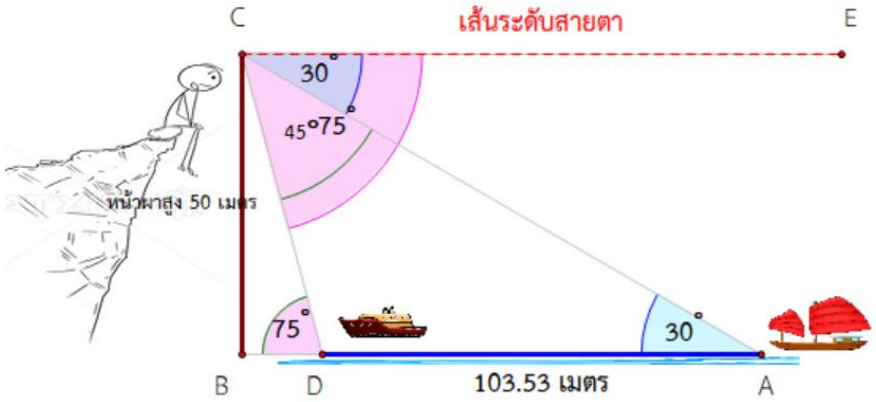
ข้อที่ 2	
ให้ A แทน จุดที่กล้าอยู่บนพื้นราบมองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 15 องศา B แทน จุดที่กล้าเดินเข้าไปหาตึกอีก 100 เมตร มองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 75 องศา และ CD แทน ความสูงของตึก จาก $C\hat{B}D = 75^\circ$ จะได้ $A\hat{B}D = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ และ $A\hat{D}B = 180^\circ - \left(15^\circ + 105^\circ\right) = 60^\circ$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จากกฎของไซน์จะได้ $\frac{\sin B\hat{A}D}{BD} = \frac{\sin A\hat{D}B}{AB}$ $\frac{\sin 15^\circ}{BD} = \frac{\sin 60^\circ}{100}$ $BD = \frac{100\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$ $= \frac{100\sin 15^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{200\sqrt{3}}{3}\sin 15^\circ$ $= \frac{200\sqrt{3}}{3}\sin 15^\circ$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้ $\sin C\hat{B}D = \frac{CD}{BD}$ $CD = BD\sin C\hat{B}D$ $= \frac{200\sqrt{3}}{3}\sin 15^\circ \sin 75^\circ$ $= \frac{200\sqrt{3}}{3}\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ $= \frac{100\sqrt{3}}{3}\left(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ\right)$ $= \frac{100\sqrt{3}}{3}\sin 30^\circ$ $= \frac{100\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{50\sqrt{3}}{3}$ ≈ 28.8667 ดังนั้น ตึกสูงประมาณ 28.8667 + 1.85 = 30.7167 เมตร	**ความรู้ที่ใช้** ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไปมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมีขนาด 180 องศา กฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\sin\left(90^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha$

ภาพ



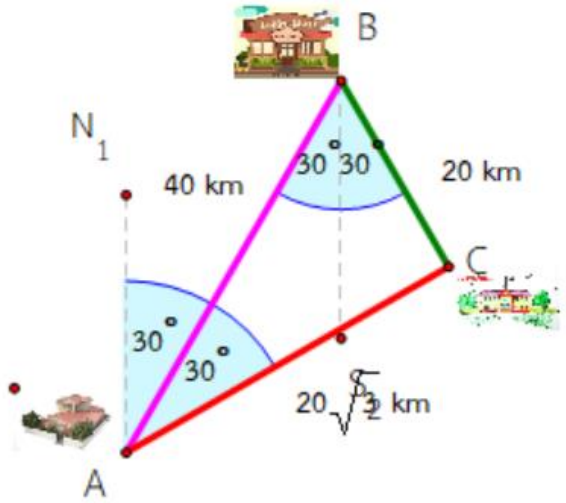
ข้อที่ 3	
ให้ C แทน จุดที่นักสำรวจยืนบนหน้าผาแห่งหนึ่ง A แทน ตำแหน่งของเรือรำแรก D แทน ตำแหน่งของเรือรำที่สอง BC แทน ความสูงของหน้าผา CE แทน เส้นระดับสายตา และ AD แทน ระยะห่างระหว่างเรือทั้งของลำ จาก $A\hat{C}E = 30^\circ$ และ $D\hat{C}E = 75^\circ$ จะได้ $A\hat{C}D = 45^\circ$ และ จาก $\overline{AB} // \overline{CE}$ จะได้ $B\hat{A}C = 30^\circ$ และ $B\hat{D}C = 75^\circ$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม CBD จะได้ $\sin B\hat{D}C = \frac{BC}{CD}$ $\sin 75^\circ = \frac{50}{CD}$ $CD = \frac{50}{\sin 75^\circ}$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ADC จะได้ จากกฎของไซน์จะได้ $\frac{\sin A\hat{C}D}{AD} = \frac{\sin D\hat{A}C}{CD}$ $\frac{\sin 45^\circ}{AD} = \frac{\sin 30^\circ}{\frac{50}{\sin 75^\circ}}$ $AD = \frac{50 \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ \sin 30^\circ}$ $= \frac{50}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2}}$ $= \frac{400}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ ≈ 103.53 ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเรือทั้งของลำประมาณ 103.53 เมตร	**ความรู้ที่ใช้** ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนาดกันและมีเส้นตัด มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน กฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

ภาพ



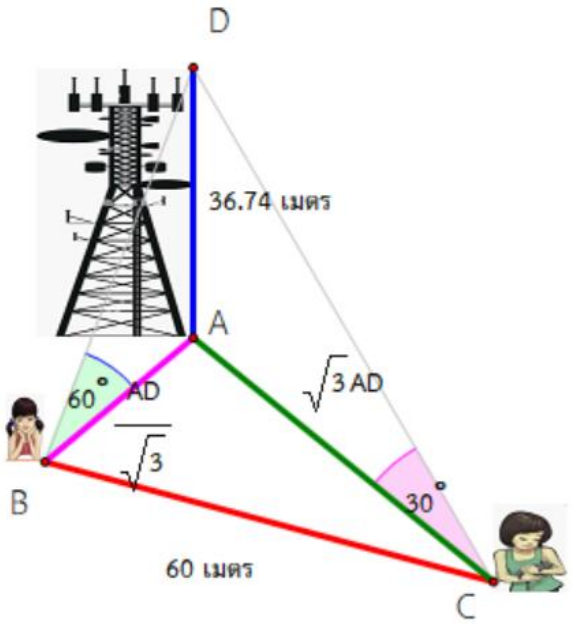
ข้อที่ 4	
ให้ A แทน ตำแหน่งของบ้านมานะ B แทน ตำแหน่งของร้านกาแฟ C แทน ตำแหน่งของโรงเรียนทับปุดวิทยา AB แทน ระยะทางบ้านมานะกับร้านกาแฟ BC แทน ระยะทางร้านกาแฟกับโรงเรียนทับปุดวิทยา และ AC แทน ระยะทางบ้านมานะกับโรงเรียนทับปุดวิทยา จากรูป $\overline{AN_1}$ ขนานกับ $\overline{BS_2}$ จะได้ $A\hat{B}S_2 = N_1\hat{A}B = 30^\circ$ ดังนั้น $A\hat{B}C = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ จากกฎของโคไซน์ $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2(BC)(AB)\cos A\hat{B}C$ $= 20^2 + 40^2 - 2(20)(40)\cos 60^\circ$ $= 400 + 1,600 - 1,600\left(\frac{1}{2}\right)$ $= 2,000 - 800$ $= 1,200$ นั่นคือ $AC = 20\sqrt{3}$ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B\hat{A}C}{BC} = \frac{\sin A\hat{B}C}{AC}$ $\frac{\sin B\hat{A}C}{20} = \frac{\sin 60^\circ}{20\sqrt{3}}$ $\sin B\hat{A}C = \frac{20\frac{\sqrt{3}}{2}}{20\sqrt{3}}$ $= \frac{1}{2}$ นั่นคือ $B\hat{A}C = 30^\circ$ จะได้ $N_1\hat{A}C = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ ดังนั้น มานะอยู่ห่างจากบ้านเป็นระยะทาง $20\sqrt{3}$ กิโลเมตรและอยู่ทิศทางเฉียงไปทางทิศตะวันออกของบ้านโดยทำมุม 60 องศากับทิศเหนือ	**ความรู้ที่ใช้** ทิศ กฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ กฎของโคไซน์ $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2(BC)(AB)\cos A\hat{B}C$

ภาพ



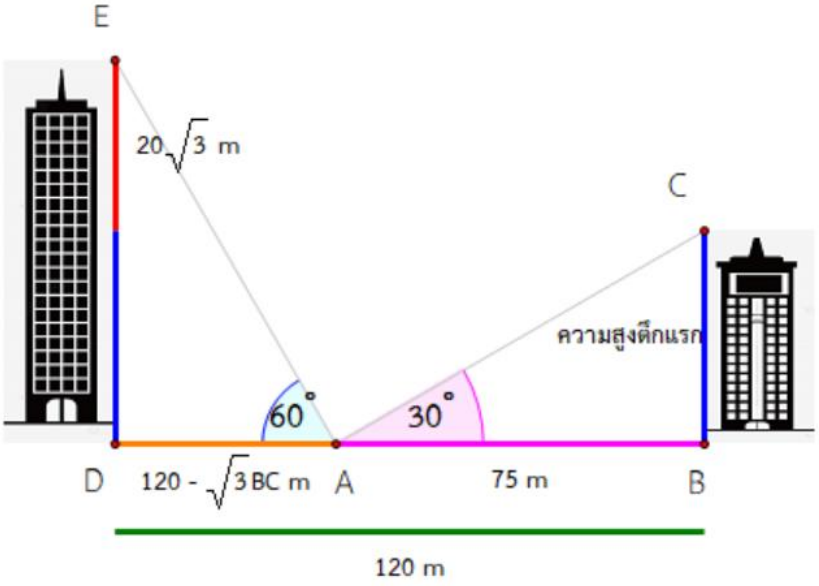
ข้อที่ 5	
ให้ AD แทน ความสูงของเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ B แทน ตำแหน่งของมานีอยู่ทางทิศใต้ของเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ และทำมุมเงย 60 องศา C แทน ตำแหน่งของชูใจอยู่ห่างทางทิศตะวันออกของมานี มองยอดเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์เป็นมุมเงย 30 องศา BC แทน ระยะห่างระหว่างมานีกับชูใจ เท่ากับ 60 เมตร $A\hat{B}D = 60^\circ$ และ $A\hat{C}D = 30^\circ$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จะได้ $\tan A\hat{B}D = \frac{AD}{AB}$ $\tan 60^\circ = \frac{AD}{AB}$ $AB = \frac{AD}{\tan 60^\circ} = \frac{AD}{\sqrt{3}}$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD จะได้ $\tan A\hat{C}D = \frac{AD}{AC}$ $\tan 30^\circ = \frac{AD}{AC}$ $AC = \frac{AD}{\tan 30^\circ} = \frac{AD}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}AD$ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม $A\hat{B}C = 90^\circ$ จะได้ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ $\left(\sqrt{3}AD\right)^2 = \left(\frac{AD}{\sqrt{3}}\right)^2 + 60^2$ $\left(\sqrt{3}AD\right)^2 - \left(\frac{AD}{\sqrt{3}}\right)^2 = 60^2$ $3AD^2 - \frac{AD^2}{3} = 60^2$ $\frac{8}{3}AD^2 = 60^2$ $AD^2 = \frac{3}{8}60^2$ $AD \approx 36.74$ ดังนั้น เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์สูงประมาณ 36.74 เมตร	**ความรู้ที่ใช้** ทฤษฎีบทพีทาโกรัส $AC^2 = AB^2 + AC^2$ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ภาพ



ข้อที่ 6	
ให้ A แทน ตำแหน่งวีระยืนระหว่างตึกสองหลัง มองยอดตึกแรกเป็นมุมเงย 30 องศา และมองยอดตึกที่สองเป็นมุมเงย 60 องศา BC แทน ความสูงของตึกแรก ED แทน ความสูงของตึกที่สอง เท่ากับ $BC + 20\sqrt{3}$ เมตร BD แทน ระยะห่างระหว่างตึกทั้งสองห่างกัน 120 เมตร AB แทน วีระยืนอยู่ห่างตึกแรก พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จะได้ $A\hat{C}B = 180^\circ - \left(90^\circ + 30^\circ\right) = 60^\circ$ จากฎของไซน์ $\frac{\sin B\hat{A}C}{BC} = \frac{\sin A\hat{C}B}{AB}$ $\frac{\sin 30^\circ}{BC} = \frac{\sin 60^\circ}{AB}$ $\frac{\frac{1}{2}}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{AB}$ $AB = \sqrt{3}BC$ นั่นคือ $AD = 120 - \sqrt{3}BC$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม AED จะได้ $A\hat{E}D = 180^\circ - \left(90^\circ + 60^\circ\right) = 30^\circ$ จากฎของไซน์ $\frac{\sin D\hat{A}E}{ED} = \frac{\sin A\hat{E}D}{AD}$ $\frac{\sin 60^\circ}{ED} = \frac{\sin 30^\circ}{AD}$ $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{BC+20\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{120-\sqrt{3}BC}$ $120\sqrt{3} - 3BC = BC + 20\sqrt{3}$ $4BC = 100\sqrt{3}$ $BC = 25\sqrt{3}$ ดังนั้นวีระยืนอยู่ห่างตึกแรกเท่ากับ $AB = \sqrt{3}\left(25\sqrt{3}\right) = 75$ เมตร	**ความรู้ที่ใช้** ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมีขนาด 180 องศา กฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

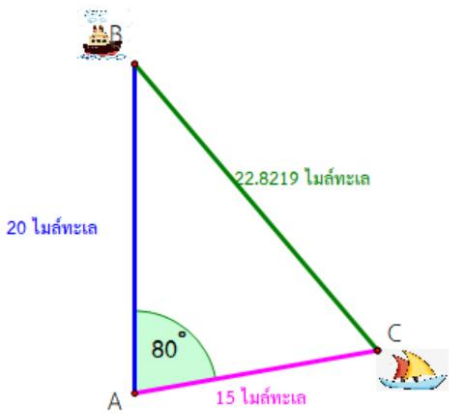
ภาพ



ข้อที่ 7

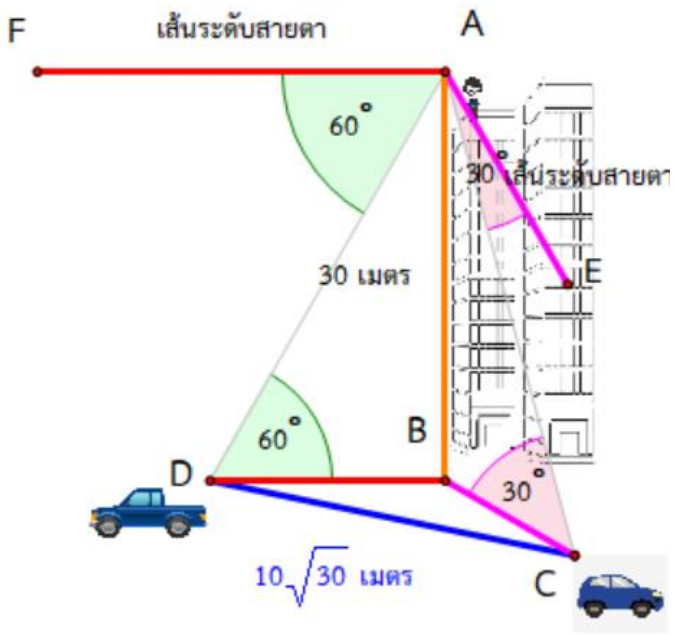
ให้ A แทน ตำแหน่งเรือสองลำออกจากท่าเรือพร้อมกัน AB แทน ระยะท่าเรือกับเรือลำแรกเดินทางไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว 60 ไมล์ทะเลต่อชั่วโมงเมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที AC แทน ระยะท่าเรือกับเรือลำที่สองเดินทางไปในทิศทำมุมกับเรือลำแรก 80 องศา ด้วยความเร็ว 45 ไมล์ทะเลต่อชั่วโมง เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที BC แทน ระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองลำเมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที จาก เรือลำแรกวิ่งด้วยความเร็ว 60 ไมล์ทะเลต่อชั่วโมง เมื่อเวลา 20 นาที จะได้ AB เท่ากับ 20 ไมล์ทะเล และ เรือลำที่สองวิ่งด้วยความเร็ว 45 ไมล์ทะเลต่อชั่วโมง เมื่อเวลา 20 นาที จะได้ AC เท่ากับ 15 ไมล์ทะเล กฎของโคไซน์ $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos B\hat{A}C$ $= 20^2 + 15^2 - 2(20)(15)\cos 80^\circ$ $= 400 + 225 - 600\cos 80^\circ$ $\approx 625 - 600(0.1736)$ $\approx 625 - 104.16$ ≈ 520.84 นั่นคือ $BC \approx 22.8219$ ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองลำเมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ประมาณ 22.8219 ไมล์ทะเล	**ความรู้ที่ใช้** กฎของโคไซน์ $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos B\hat{A}C$ ความเรื่องความเร็ว

ภาพ



ข้อที่ 8	
ให้ AB แทน ความสูงของตึก 30 เมตร BC แทน ระยะห่างรถยนต์คันที่ 1 กับตึกไปทางทิศใต้ของตึกเป็นมุมก้ม 30 องศา BD แทน ระยะห่างรถยนต์คันที่ 2 กับตึกไปทางทิศตะวันตกของตึกเป็นมุมก้ม 60 องศา CD แทน ระยะห่างระหว่างรถยนต์คันที่ 1 กับรถยนต์คันที่ 2 $\overline{AE}$ ขนานกับ $\overline{BC}$ จะได้ $C\hat{A}E = A\hat{C}B = 30^\circ$ และ $\overline{AF}$ ขนานกับ $\overline{BD}$ จะได้ $D\hat{A}F = A\hat{D}B = 60^\circ$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จะได้ $\tan A\hat{C}B = \frac{AB}{BC}$ $\tan 30^\circ = \frac{30}{BC}$ $BC = \frac{30}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 30\sqrt{3}$ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จะได้ $\tan A\hat{D}B = \frac{AB}{BD}$ $\tan 60^\circ = \frac{30}{BD}$ $BD = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$ จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD มีมุม $C\hat{B}D = 90^\circ$ จะได้ $CD^2 = BC^2 + BD^2$ $= \left(30\sqrt{3}\right)^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2$ $= 2700 + 300$ $= 3000$ $CD = \sqrt{3000} = 10\sqrt{30}$ ดังนั้น รถยนต์ทั้งสองคันจอดห่างกัน $10\sqrt{30}$ เมตร	**ความรู้ที่ใช้** ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนาดกันและมีเส้นตัด มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน ทฤษฎีบทพีทาโกรัส $CD^2 = BC^2 + BD^2$ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ภาพ


F
เส้นระดับสายตา
A
60°
30° เส้นระดับสายตา
30 เมตร
E
60°
B
D
30°
10√30 เมตร
C

แบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1) นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาระยะทางและความสูงได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1) ใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้
3) ใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์วิธีการที่หลากหลายในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้

.....

1. พิเชษฐ์ยืนอยู่ห่างจากตึกหลังหนึ่งเป็นระยะทางตามแนวราบ 18 เมตร เขามองเห็นยอดตึกและยอดเสาอากาศซึ่งอยู่บนยอดตึกเป็นมุมเงย 45 และ 60 องศา ตามลำดับ จงหาความสูงของเสาอากาศ
2. เรือสองลำแล่นออกจากจุด O พร้อมกัน โดยเรือลำหนึ่งแล่นไปยังจุด A เป็นระยะทาง 6 กิโลเมตร และอีกลำหนึ่งแล่นไปยังจุด B เป็นระยะทาง 4 กิโลเมตร ถ้าแนวที่เรือสองลำแล่นออกจากกันทำมุม 30 องศา แล้วจงหาระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B
3. ขณะที่เรือใบของทิพย์อยู่ห่างจากแนวชายฝั่งเป็นระยะทาง 500 เมตร ทิพย์มองเห็นยอดหน้าผาด้วยมุมเงย 24 องศา จงหาความสูงของหน้าผาและเมื่อเรือใบของทิพย์อยู่ห่างจากแนวชายฝั่ง 200 เมตร ทิพย์จะมองเห็นยอดหน้าผาด้วยมุมเงยเท่าใด
4. เมื่อพิชัยยืนบนพื้นราบห่างจากเสาอากาศของสถานีโทรทัศน์แห่งหนึ่งเป็นระยะทาง 100 เมตร จะมองเห็นยอดเสาอากาศเป็นมุมเงย θ องศา และเมื่อเขายืนอยู่ห่างจากเสาอากาศเป็นระยะทาง 200 เมตร จะมองเห็นยอดเสาอากาศเป็นมุมเงย α องศา ถ้ามุมเงยทั้งสองนั้นรวมกันได้หนึ่งมุฉาก แล้วเสาอากาศสูงเท่าใด
5. ก้านยืนอยู่บนดาดฟ้าของตึก 15 ชั้น เขามองเห็นป้อมยามที่อยู่ทางทิศตะวันออกของตึกเป็นมุมก้ม 60 องศา และมองเห็นรถบรรทุกคันหนึ่งจอดอยู่ทางทิศใต้ของป้อมยามเป็นมุมก้ม 30 องศา จงหาว่ารถบรรทุกอยู่ห่างจากป้อมยามเท่าใด ถ้าก้านสูง 170 เซนติเมตร และตึกสูงชั้นละ 4 เมตร
6. นรินทร์ต้องการถ่ายภาพตนเอง โดยตั้งกล้องถ่ายรูปเข้ากับขาตั้งกล้องซึ่งสูง 140 เซนติเมตร และยืนหน้ากล้องห่างจากจุดที่ตั้งกล้อง 230 เซนติเมตร ถ้านรินทร์สูง 170 เซนติเมตร และกล้องมีมุมรับ

ภาพทั้งมุมก้มและมุมเงยเป็น 30 องศา จงพิจารณาว่ากล้องจะสามารถถ่ายภาพเต็มตัวของนรินทร์ได้หรือไม่ ถ้าไม่ได้ นรินทร์จะต้องยืนห่างจากจุดที่ตั้งกล้องอย่างน้อยเท่าใด จึงจะได้ภาพถ่ายเต็มตัว

7. จากยอดหอคอยซึ่งสูง h เมตร สังเกตเห็นวัตถุ 2 ชิ้น ซึ่งอยู่บนพื้นราบในทิศทางเดียวกันและอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เป็นมุมก้ม $45^{\circ} - \alpha$ และ $45^{\circ} + \alpha$ จงแสดงว่าวัตถุทั้งสองอยู่ห่างกัน $2h\tan 2\alpha$ เมตร

8. หอคอยแห่งหนึ่งสูง 60 เมตร ตั้งอยู่บนยอดเขา จากจุดที่อัญชันอยู่สามารถมองเห็นยอดหอคอยด้วยมุมเงย 49 องศา และมองเห็นฐานหอคอยด้วยมุมเงย 37 องศา จงหาว่าฐานหอคอยอยู่ห่างจากอัญชันและจงหาความสูงของภูเขา

9. มหาพีระมิดแห่งกีซาเริ่มแรกได้รับการบันทึกไว้ว่าสูงประมาณ 146.5 เมตร แต่เนื่องจากถูกพายุและกระแสลมทำให้เกิดการสึกกร่อน ปัจจุบันความสูงของพีระมิดจึงลดลง ถ้าวัดมุมเงยที่ระยะห่างจากปลายฐานของพีระมิด 30 เมตรและ 60 เมตร ได้ 43.71 องศาและ 38.39 องศา ตามลำดับ แล้วจงหาความสูงของพีระมิดในปัจจุบัน

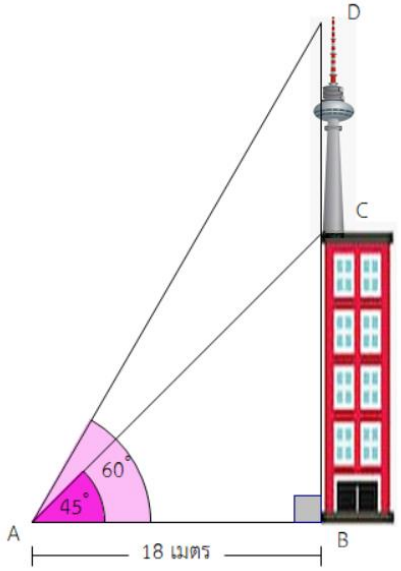
10. จงหา

1) ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมที่มีรัศมียาว 5 เซนติเมตร

2) ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบนอกวงกลมที่มีรัศมียาว 5 เซนติเมตร

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง”

1. จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A แทน จุดที่พิเชษฐ์ยืนมองยอดตึกและยอดเสาอากาศซึ่งอยู่บนยอดตึก

B แทน ฐานของตึก

C แทน ยอดของตึก

และ D แทน ยอดตึกและยอดเสาอากาศซึ่งอยู่บนยอดตึก

จะได้ระยะ AB เท่ากับ 18 เมตร ระยะ BC และ CD เป็นความสูงของยอดตึกและเสาอากาศ ตามลำดับ

จาก $B\hat{A}C = 45^\circ$ และ $B\hat{A}D = 60^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จะได้

$$\tan B\hat{A}C = \frac{BC}{AB}$$

$$\begin{aligned} BC &= AB\tan B\hat{A}C \\ &= (18)\tan 45^\circ \\ &= (18)(1) \\ &= 18 \end{aligned}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จะได้

$$\tan B\hat{A}D = \frac{BD}{AB}$$

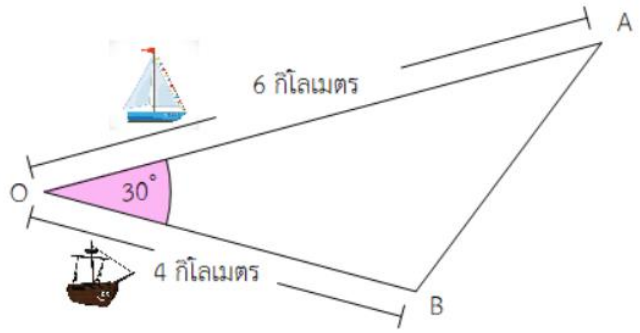
$$BD = AB\tan B\hat{A}D$$

$$= (18)\tan 60^{\circ}$$
$$= (18)\left(\sqrt{3}\right)$$
$$= 18\sqrt{3}$$

นั่นคือ $CD = BD - BC = 18\sqrt{3} - 18$

ดังนั้น เสาอากาศสูง $18\sqrt{3} - 18$ เมตร □

2. จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



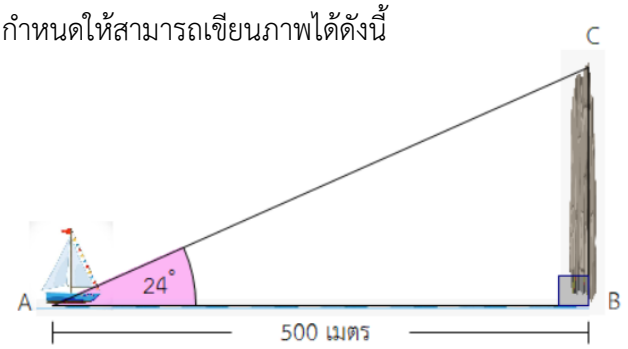
จากกฎของโคไซน์จะได้

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2(AO)(BO)\cos A\hat{O}B$$
$$= 6^2 + 4^2 - 2(6)(4)\cos 30^{\circ}$$
$$= 36 + 16 - (48)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 52 - 24\sqrt{3}$$
$$\approx 10.43$$

นั่นคือ $AB \approx 3.23$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B ประมาณ 3.23 กิโลเมตร □

3. 1) จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A แทน จุดทิพย์มองเห็นยอดหน้าผา

B แทน ฐานของหน้าผาบนชายฝั่ง

C แทน ยอดหน้าผา

ระยะ AB เท่ากับ 500 เมตร

และ BC เป็น ความสูงของหน้าผาส่วนที่เหนือระดับสายตา

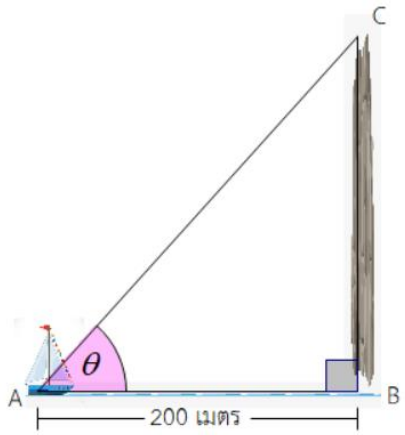
จาก $B\hat{A}C = 24^{\circ}$

จะได้ $\tan B\hat{A}C = \frac{BC}{AB}$

$$BC = AB\tan B\hat{A}C$$
$$= 500\tan 24^{\circ}$$
$$\approx 500(0.4452)$$
$$\approx 222.6$$

ดังนั้น ความสูงของหน้าผาประมาณ 222.6 เมตร

2) จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A แทน จุดทิพย์มองเห็นยอดหน้าผาอยู่ห่างจากแนวชายฝั่ง 200 เมตร

B แทน ฐานของหน้าผาบนชายฝั่ง

C แทน ยอดหน้าผา

ระยะ AB เท่ากับ 200 เมตร

และ BC เท่ากับ 222.6 เมตร

จาก $\tan B\hat{A}C = \frac{BC}{AB}$

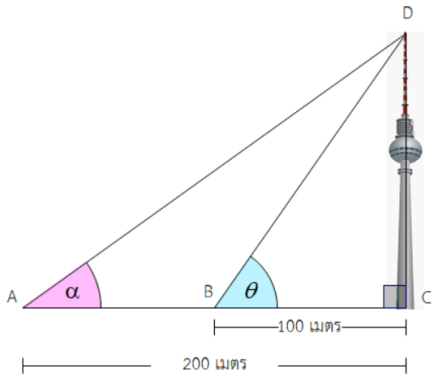
จะได้ $\tan\theta = \frac{222.6}{200}$

$= 1.113$

นั่นคือ $\theta \approx 48.06$

ดังนั้น ทิพย์จะมองเห็นยอดหน้าผาด้วยมุมเงย ประมาณ 48.06 องศา □

4. จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A แทน จุดที่พิชัยยืนมองเสาอากาศเป็นมุม α

B แทน จุดที่พิชัยยืนมองเสาอากาศเป็นมุม θ

C แทน ฐานเสาอากาศ

CD แทน ความสูงของเสาอากาศ

ระยะ AC เท่ากับ 200 เมตร

และ BC เท่ากับ 100 เมตร

จาก $\theta + \alpha = 90^\circ$ จะได้ $\theta = 90^\circ - \alpha$

เนื่องจาก $C\hat{B}D = \theta$ จะได้ $B\hat{D}C = 90^\circ - \theta = \alpha$

และ $C\hat{A}D = \alpha$ จะได้ $A\hat{D}C = 90^\circ - \alpha = \theta$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\tan C\hat{B}D = \frac{CD}{BC}$$

$$\tan\theta = \frac{CD}{BC}$$

$$CD = BC\tan\theta$$

$$= 100\tan\theta$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACB จะได้

$$\tan A\hat{D}C = \frac{AC}{AD}$$

$$\tan\theta = \frac{AC}{CD}$$

$$CD = \frac{200}{\tan\theta}$$

นั่นคือ $$\frac{200}{\tan\theta} = 100\tan\theta$$

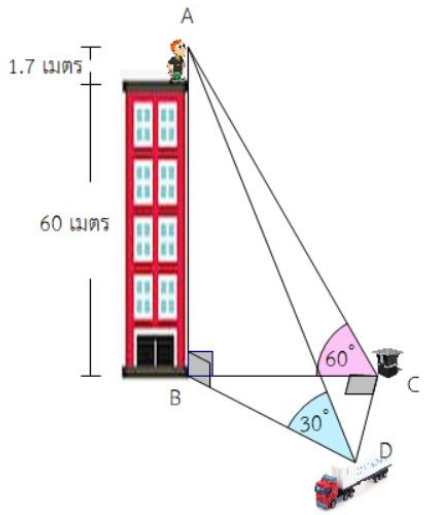
$$\tan^2\theta = 2$$

จะได้ $\tan\theta = \sqrt{2}$ เพราะ $\theta > 0$

จาก $CD = 100\tan\theta = 100\sqrt{2}$

ดังนั้น เสาอากาศสูง $100\sqrt{2}$ เมตร □

5. จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



เนื่องจากก้านมองเห็นป้อมยามเป็นมุมก้ม 60 องศา

จะได้ $A\hat{C}B = 60^\circ$ และ

$$\tan A\hat{C}B = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{61.7}{BC}$$

$$BC = \frac{61.7}{\tan 60^\circ}$$

$$= \frac{61.7}{\sqrt{3}}$$

เนื่องจากก้านมองเห็นรถบรรทุกเป็นมุมก้ม 30 องศา

จะได้ $A\hat{D}B = 30^\circ$

$$\tan A\hat{D}B = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan 30^{\circ} = \frac{61.7}{BD}$$

$$BD = \frac{61.7}{\tan 30^{\circ}}$$

$$= 61.7\sqrt{3}$$

เนื่องจากรถบรรทุกอยู่ทางทิศใต้ของป้อมยาม จะได้ $B\hat{C}D = 90^{\circ}$

นั่นคือรูป BCD เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

$$CD^2 = BD^2 - BC^2$$

$$= \left(61.7\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{61.7}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \left(3 - \frac{1}{3}\right)(61.7)^2$$

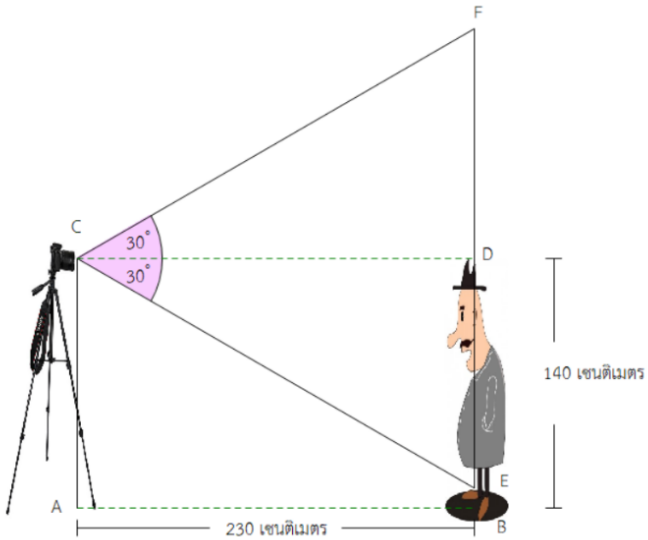
$$= \left(\frac{8}{3}\right)(61.7)^2$$

$$\approx 10{,}151.71$$

จะได้ $CD \approx 100.76$

ดังนั้น รถบรรทุกอยู่ห่างจากป้อมยาม ประมาณ 100.76 เมตร □

6. จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A เป็น ตำแหน่งที่ตั้งกล้อง

B เป็น ตำแหน่งที่นรินทร์ยืน

ระยะ AB เท่ากับ 230 เซนติเมตร

และ AC เป็นความสูงของขากล้องซึ่งสูง 140 เซนติเมตร

จะได้ $E\hat{C}D = 30^{\circ}$

$$\tan E\hat{C}D = \frac{ED}{CD}$$

$$ED = 230\tan 30^{\circ}$$

$$= 230\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\approx 132.79$$

นั่นคือ ระยะ ED น้อยกว่าระยะ BD

ดังนั้น กล้องไม่สามารถถ่ายภาพเต็มตัวของนรินทร์ได้

ให้ y แทนระยะอย่างน้อยที่นรินทร์จะต้องยืนห่างจากจุดที่ตั้งกล้อง

$$\tan 30^{\circ} = \frac{BD}{y}$$

$$y = \frac{BD}{\tan 30^{\circ}}$$

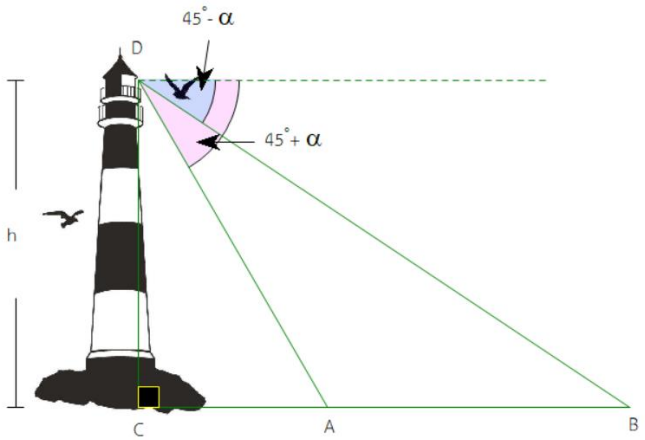
$$= \frac{140}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= 140\sqrt{3}$$

$$\approx 242.49$$

ดังนั้น นรินทร์จะต้องยืนห่างจากจุดที่ตั้งกล้องอย่างน้อย 242.49 เซนติเมตรจึงจะได้ภาพถ่ายเต็มตัว □

7. จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ใช้ความรู้เรื่องเส้นขนานจะได้

$$D\hat{A}C = 45^{\circ} + \alpha \text{ และ } D\hat{B}C = 45^{\circ} - \alpha$$

$$\tan D\hat{A}C = \frac{DC}{AC}$$

$$\tan\left(45^{\circ} + \alpha\right) = \frac{h}{AC}$$

$$AC = \frac{h}{\tan\left(45^{\circ} + \alpha\right)}$$

และ

$$\tan D\hat{B}C = \frac{DC}{BC}$$

$$\tan\left(45^{\circ} - \alpha\right) = \frac{h}{BC}$$

$$BC = \frac{h}{\tan\left(45^{\circ} - \alpha\right)}$$

จะได้

$$AB = BC - AC$$

$$= \frac{h}{\tan\left(45^{\circ} - \alpha\right)} - \frac{h}{\tan\left(45^{\circ} + \alpha\right)}$$

$$= h\left(\frac{1}{\tan\left(45^{\circ} - \alpha\right)} - \frac{1}{\tan\left(45^{\circ} + \alpha\right)}\right)$$

$$= h\left(\frac{1}{\frac{\tan 45^{\circ} - \tan\alpha}{1 + \tan 45^{\circ}\tan\alpha}} - \frac{1}{\frac{\tan 45^{\circ} + \tan\alpha}{1 - \tan 45^{\circ}\tan\alpha}}\right)$$

$$= h\left(\frac{1 + \tan 45^{\circ}\tan\alpha}{\tan 45^{\circ} - \tan\alpha} - \frac{1 - \tan 45^{\circ}\tan\alpha}{\tan 45^{\circ} + \tan\alpha}\right)$$

$$= h\left(\frac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} - \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}\right)$$

$$= h\left(\frac{(1 + \tan\alpha)^2}{(1 - \tan\alpha)\gamma(1 + \tan\alpha)} - \frac{(1 - \tan\alpha)^2}{(1 - \tan\alpha)(1 + \tan\alpha)}\right)$$

$$= h\left(\frac{(1 + \tan\alpha)^2 - (1 - \tan\alpha)^2}{1^2 - \tan^2\alpha}\right)$$

$$= h\left(\frac{[(1+\tan\alpha)-(1-\tan\alpha)][(1+\tan\alpha)+(1-\tan\alpha)]}{1-\tan^2\alpha}\right)$$

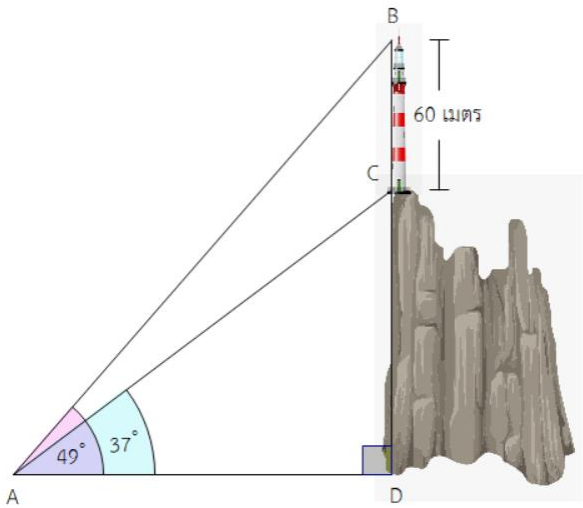
$$= h\left(\frac{(2\tan\alpha)(2)}{1-\tan^2\alpha}\right)$$

$$= 2h\left(\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)$$

$$= 2h\tan 2\alpha$$

ดังนั้น วัตถุทั้งสองอยู่ห่างกัน $2h\tan 2\alpha$ เมตร □

8. จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



ให้ A เป็นจุดที่อัญชันยืนมองยอดหอคอย

B เป็นจุดยอดหอคอย

C เป็นฐานของหอคอย

ระยะ BC เท่ากับ 60 เมตร

และ D เป็นตำแหน่งตีนเขา

เนื่องจาก $D\hat{A}C = 37^\circ$ และ $D\hat{A}B = 49^\circ$

จะได้ $B\hat{A}C = 49^\circ - 37^\circ = 12^\circ$ และ $A\hat{B}C = 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin 41^\circ}{AC} = \frac{\sin 12^\circ}{60}$$

$$AC = \frac{60\sin 41^\circ}{\sin 12^\circ}$$
$$\approx \frac{60(0.6561)}{0.2079}$$
$$\approx 189.35$$

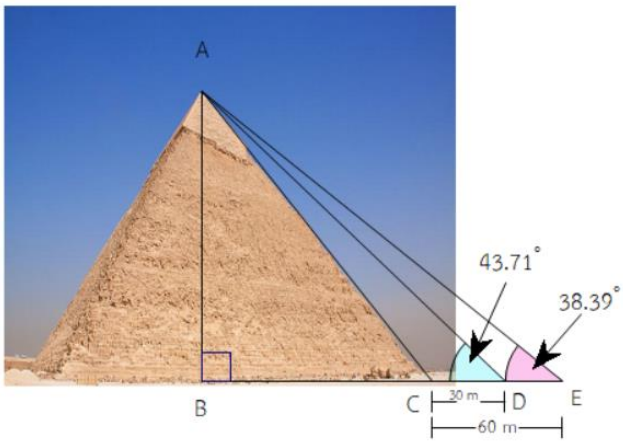
พิจารณารูปสามเหลี่ยม ADC จะได้ว่า

$$\sin D\hat{A}C = \frac{CD}{AC}$$
$$\sin 41^\circ = \frac{CD}{AC}$$
$$CD = AC\sin 41^\circ$$
$$\approx (189.35)(0.6018)$$
$$\approx 113.95$$

ดังนั้น ฐานหอคอยอยู่ห่างจากอัญชัน 189.35 เมตร และ

ความสูงของภูเขาลูกนี้ประมาณ 113.94 เมตร □

9. จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



จะได้ $B\hat{D}A = 43.71^\circ$ และ $B\hat{E}A = 38.39^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จะได้ว่า

$$\tan B\hat{D}A = \frac{AB}{BD}$$
$$\tan 43.71^\circ = \frac{AB}{BC+30}$$
$$AB = (BC+30)\tan 43.71^\circ$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABE จะได้ว่า

$$\tan B\hat{E}A = \frac{AB}{BE}$$

$$\tan 38.39^{\circ} = \frac{AB}{BC+60}$$

$$AB = (BC+60)\tan 38.39^{\circ}$$

นั่นคือ

$$(BC+30)\tan 43.71^{\circ} = (BC+60)\tan 38.39^{\circ}$$

$$BC\tan 43.71^{\circ} + 30\tan 43.71^{\circ} = BC\tan 38.39^{\circ} + 60\tan 38.39^{\circ}$$

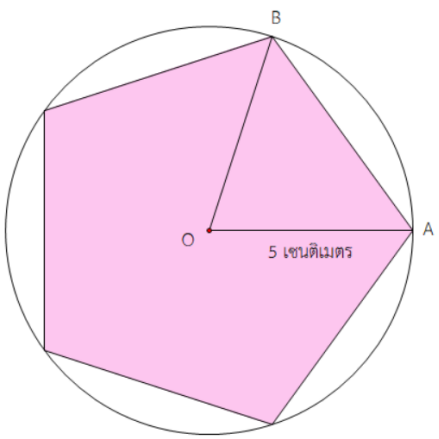
$$\left(\tan 43.71^{\circ} - \tan 38.39^{\circ}\right)BC = 60\tan 38.39^{\circ} - 30\tan 43.71^{\circ}$$

$$\begin{aligned} BC &= \frac{60\tan 38.39^{\circ} - 30\tan 43.71^{\circ}}{\tan 43.71^{\circ} - \tan 38.39^{\circ}} \\ &\approx \frac{60(0.7923) - 30(0.9560)}{0.9560 - 0.7923} \\ &\approx \frac{47.538 - 28.68}{0.1637} \\ &\approx \frac{18.858}{0.1637} \\ &\approx 115.20 \end{aligned}$$

จะได้ $AB \approx (115.20+60)(0.7923) \approx 138.80$

ดังนั้น ความสูงของพีระมิดในปัจจุบันประมาณ 138.80 เมตร □

10. 1) จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



เนื่องจาก $A\hat{O}B = \frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$

และเนื่องจากวงกลมมีรัศมียาว 5 เซนติเมตร จะได้ $AO = BO = 5$ เซนติเมตร

จากกฎของโคไซน์ $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB)\cos A\hat{O}B$

$= 5^2 + 5^2 - 2(5)(5)\cos 72^\circ$

$\approx 50 - 50(0.3090)$

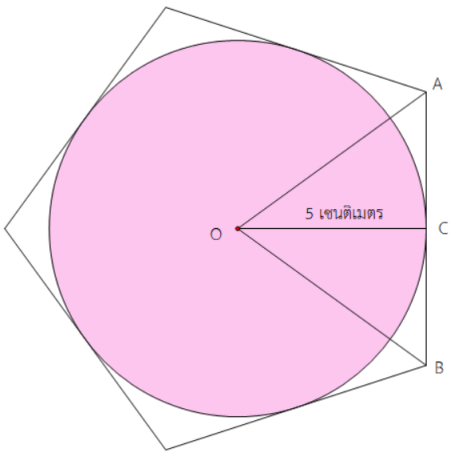
$\approx 50 - 15.45$

≈ 34.55

จะได้ $AB \approx 5.88$

ดังนั้น ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมที่มีรัศมียาว 5 เซนติเมตร ยาวประมาณ $5.88 \times 5 = 29.4$ เซนติเมตร

2) จากที่กำหนดให้สามารถเขียนภาพได้ดังนี้



เนื่องจากมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ารวมกันเท่ากับ 540°

จะได้มุมแต่ละมุมมีขนาด 108°

นั่นคือ $O\hat{A}B = 54^\circ = O\hat{A}C$

จะได้ $\tan O\hat{A}C = \frac{OC}{AC}$

$\tan 54^\circ = \frac{5}{AC}$

$AC = \frac{5}{\tan 54^\circ}$

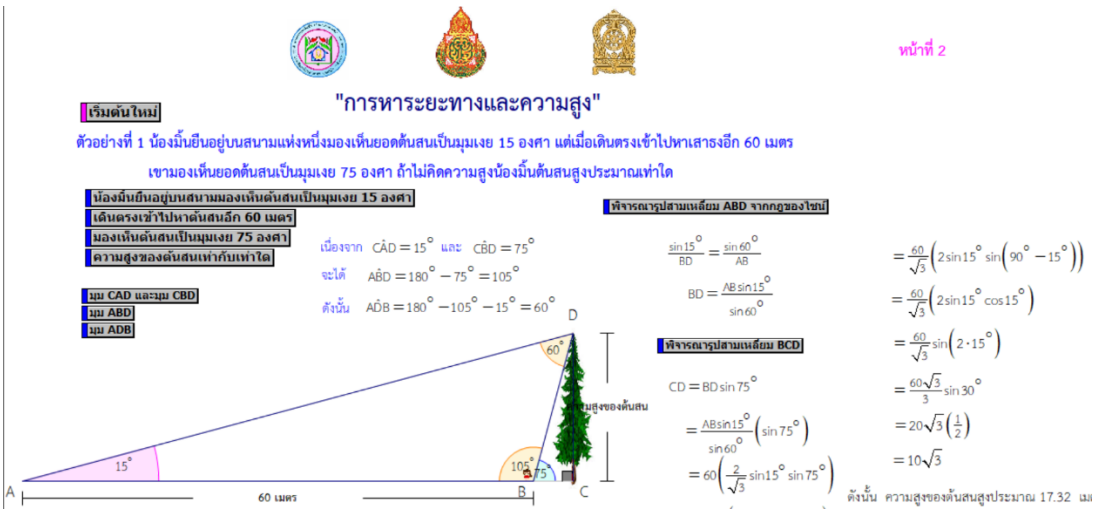
$\approx \frac{5}{1.3764}$

≈ 3.6327

นั่นคือ $AB \approx 2 \times 3.6327 \approx 7.2654$

ดังนั้น ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบนอกวงกลมที่มีรัศมียาว 5 เซนติเมตร ยาวประมาณ $5 \times 7.2654 = 36.327$ เซนติเมตร □

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” หน้า 1 – 3



สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” หน้า 4 – 6

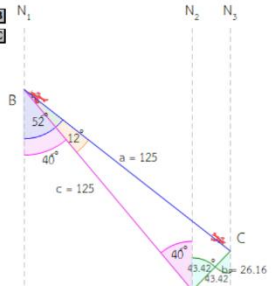
หน้าที่ 4

เริ่มต้นใหม่

"การหาระยะทางและความสูง"

ตัวอย่างที่ 3 จากจุด A นักบินบินไปยังจุด B ในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตก โดยทำมุม 40° กับทิศเหนือเป็นระยะทาง 125 ไมล์ และบินไปยังจุด C เป็นระยะทาง 125 ไมล์ ในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออกโดยทำมุม 52° กับทิศใต้ จงหาว่านักบินจะต้องบินจากจุด C ไปแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตกเป็นระยะทางเท่าใด โดยบินทำมุมเท่าใดกับทิศใต้เพื่อกลับไปยังจุด A

นักบินบินจากจุด A ไปยังจุด B
นักบินบินจากจุด B ไปยังจุด C



มุม S1BA

จากรูป $\overline{S_1N_1}$ ขนานกับ $\overline{AN_2}$ $S_1\hat{B}A = 40^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จะได้

$A\hat{B}C = 52^\circ - 40^\circ = 12^\circ$

จากกฎของโคไซน์ จะได้

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos A\hat{B}C$

$= 125^2 + 125^2 - 2(125)(125)\cos 12^\circ$

$\approx 125^2 + 125^2 - 2(125)(125)(0.9781)$

$\approx 15,625 + 15,625 - 2(15,625)(0.9781)$

$\approx 31,250 - 30,565.625$

≈ 684.375

ดังนั้น

จากกฎของไซน์ จะได้

$\frac{\sin B\hat{A}C}{a} = \frac{\sin A\hat{B}C}{b}$

$\sin B\hat{A}C = \frac{a\sin A\hat{B}C}{b}$

$= \frac{125\sin 12^\circ}{26.16}$

$\approx \frac{125(0.2079)}{26.16}$

≈ 0.9934

$B\hat{A}C \approx 83.42^\circ$

$C\hat{A}N_2 \approx 83.42^\circ - 40^\circ$

นั่นคือ $C\hat{A}N_2 \approx 43.42^\circ$ จะได้ $A\hat{C}S_2 \approx 43.42^\circ$

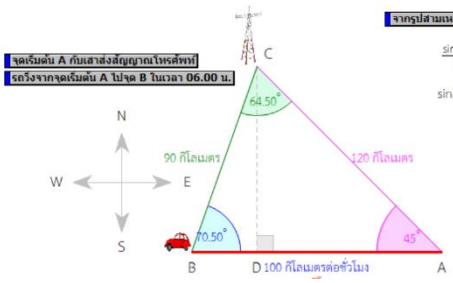
หน้าที่ 5

เริ่มต้นใหม่

"การหาระยะทางและความสูง"

ตัวอย่างที่ 4 เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ต้นหนึ่งอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น A เป็นระยะทาง 120 กิโลเมตร ในทิศตะวันตกเฉียงเหนือของจุดเริ่มต้น รถคันหนึ่งวิ่งออกจากจุดเริ่มต้น A ในเวลา 06.00 น. โดยวิ่งไปทางทิศตะวันตกด้วยความเร็ว 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จงหาว่า ณ เวลาใดที่รถคันนี้อยู่ห่างจากเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ทางซ้ายมือเป็นระยะทาง 90 กิโลเมตร

จุดเริ่มต้น A กับเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์
รถวิ่งจากจุดเริ่มต้น A ไปจุด B ในเวลา 06.00 น.



จากรูปสามเหลี่ยม ABC ใช้กฎของไซน์จะได้ว่า

$\frac{\sin B\hat{A}C}{BC} = \frac{\sin A\hat{B}C}{AC}$

$\sin A\hat{B}C = \frac{AC\sin B\hat{A}C}{BC}$

$= \frac{120\sin 45^\circ}{90}$

$= \frac{120\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{90}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$

≈ 0.9428

มุม ACB

$A\hat{C}B \approx 180^\circ - 45^\circ - 70.50^\circ \approx 64.50^\circ$

จากกฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2(AC)(BC)\cos A\hat{C}B$

$= 120^2 + 90^2 - 2(120)(90)\cos 64.50^\circ$

$\approx 14,400 + 8,100 - (21,600)(0.4305)$

$\approx 22,500 - 9,298.8$

$\approx 13,201.2$

$AB \approx 114.90$

ดังนั้น

รถวิ่งด้วยความเร็ว 100 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เวลาที่ใช้ในการวิ่งจาก A ถึง B $\approx \frac{114.90}{100} \approx 1.15$

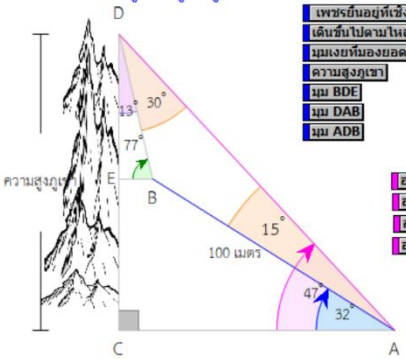
เวลาที่รถคันนี้อยู่ห่างจากเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ทางซ้ายมือ

หน้าที่ 6

เริ่มต้นใหม่

"การหาระยะทางและความสูง"

ใบงานข้อที่ 1 เพชรยืนอยู่ที่เชิงเขาแห่งหนึ่ง มองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 47 องศา ถ้าเดินขึ้นไปตามไหล่เขาซึ่งเอียงทำมุม 32 องศา กับแนวระนาบ เป็นระยะทาง 100 เมตร พบว่ามุมเงยที่มองยอดเขาเป็น 77 องศา โดยวัดจากแนวระนาบ จงหาความสูงของภูเขาลูกนี้



รูป

เพชรยืนอยู่ที่เชิงเขาแห่งหนึ่ง มองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 47 องศา
เดินขึ้นไปตามไหล่เขาซึ่งเอียงทำมุม 32 องศา กับแนวระนาบ เป็นระยะทาง 100 เมตร
มุมเงยที่มองยอดเขาเป็น 77 องศา
ความสูงภูเขา
มุม BDE
มุม DAB
มุม ADB

อธิบาย 1
อธิบาย 2
อธิบาย 3
อธิบาย 4

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD

จากกฎของไซน์จะได้

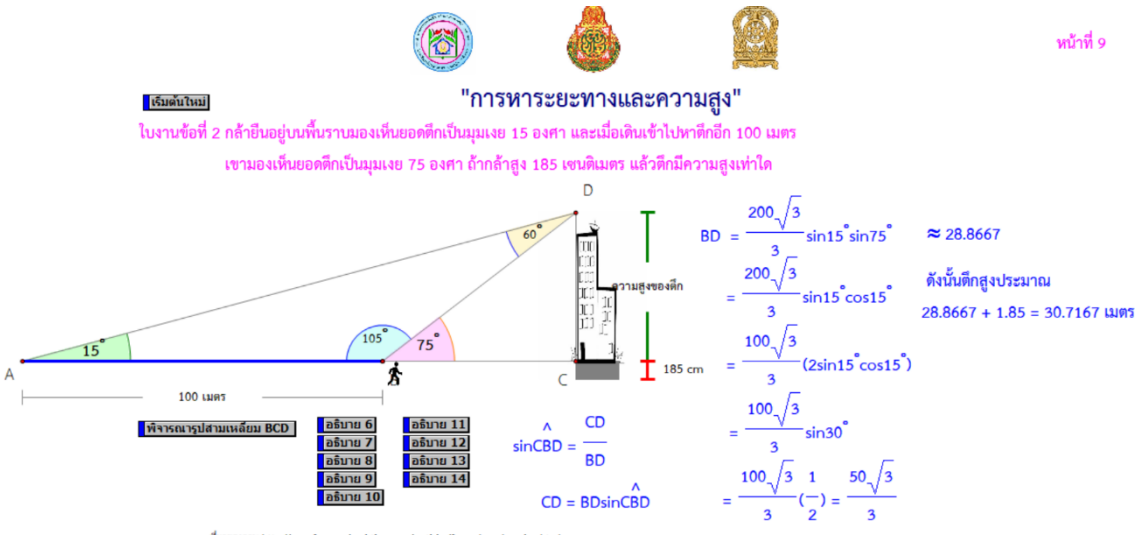
$\frac{\sin A\hat{B}D}{AD} = \frac{\sin A\hat{D}B}{AB}$

$\frac{\sin 135^\circ}{AD} = \frac{\sin 30^\circ}{100}$

$AD = \frac{100\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}$

$= \frac{100\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = 100\sqrt{2}$

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” หน้า 7 – 9



สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad
เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” หน้า 10 – 12

หน้าที่ 10

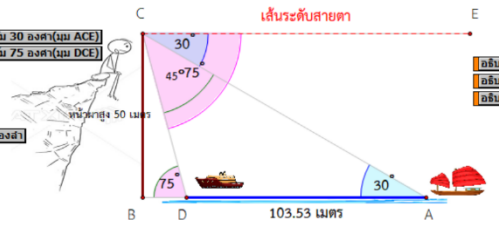
เริ่มต้นใหม่

"การหาระยะทางและความสูง"

ใบงานข้อที่ 3 นักสำรวจยืนบนหน้าผาแห่งหนึ่งมองเห็นเรือสองลำลอยอยู่กลางทะเลเป็นมุมก้ม 30 องศา และ 75 องศา ตามลำดับ ถ้าหน้าผานี้สูง 50 เมตร แล้วเรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันเท่าใด

พิจารณารูปสามเหลี่ยม CBD

รูป
เส้นระดับสายตา
นักสำรวจเห็นเรือเป็นมุมก้ม 30 องศา(มุม ACE)
นักสำรวจเห็นเรือเป็นมุมก้ม 75 องศา(มุม DCE)
หน้าผาสูง 50 เมตร
มุม ACD(45 องศา)
มุม BDC(75 องศา)
มุม BAC(30 องศา)
ระยะห่างระหว่างเรือทั้งของลำ



อธิบาย 1
อธิบาย 2
อธิบาย 3

$$\sin\hat{BDC} = \frac{BC}{CD}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{50}{CD}$$

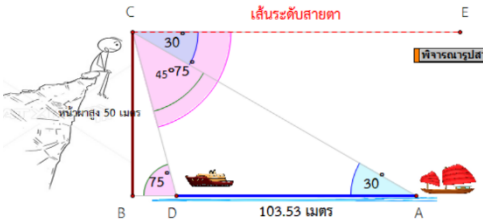
$$CD = \frac{50}{\sin 75^\circ}$$

หน้าที่ 11

เริ่มต้นใหม่

"การหาระยะทางและความสูง"

ใบงานข้อที่ 3 นักสำรวจยืนบนหน้าผาแห่งหนึ่งมองเห็นเรือสองลำลอยอยู่กลางทะเลเป็นมุมก้ม 30 องศา และ 75 องศา ตามลำดับ ถ้าหน้าผานี้สูง 50 เมตร แล้วเรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันเท่าใด



พิจารณารูปสามเหลี่ยม ADC

อธิบาย 4
อธิบาย 5
อธิบาย 6
อธิบาย 7
อธิบาย 8
อธิบาย 9

$$\frac{\sin\hat{ACD}}{AD} = \frac{\sin\hat{DAC}}{CD}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{AD} = \frac{\sin 30^\circ}{\frac{50}{\sin 75^\circ}}$$

$$AD = \frac{50\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ \sin 30^\circ}$$

$$= \frac{50}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{400}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$\approx 103.53$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างเรือทั้งของลำประมาณ 103.53 เมตร

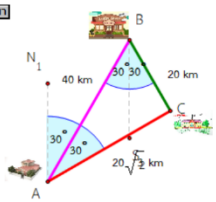
หน้าที่ 12

เริ่มต้นใหม่

"การหาระยะทางและความสูง"

ใบงานข้อที่ 4 มานะขับรถยนต์จากบ้านเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม 30 องศา กับทิศเหนือ เป็นระยะทาง 40 กิโลเมตร ไปยังร้านกาแฟแห่งหนึ่ง จากนั้นเขาขับรถยนต์ต่อไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออกโดยทำมุม 30 องศา กับทิศใต้เป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร ไปยังโรงเรียนทับปุดวิทยา มานะอยู่ห่างจากบ้านเป็นระยะทางเท่าใดและอยู่ทิศทางใดของบ้าน

บ้านมานะกับร้านกาแฟทำมุม 30 องศากับทิศเหนือ
ร้านกาแฟกับโรงเรียนทับปุดวิทยาทำมุม 30 องศากับทิศใต้
มุม BAC
บ้านมานะกับโรงเรียนทับปุดวิทยา
มุม ABS[2]
รูป



อธิบาย 1
อธิบาย 2
อธิบาย 3
อธิบาย 4
อธิบาย 5

จากกฎของโคไซน์

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2(BC)(AB)\cos\hat{ABC}$$

$$= 20^2 + 40^2 - 2(20)(40)\cos 60^\circ$$

$$= 400 + 1{,}600 - 1{,}600\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2{,}000 + 800$$

$$= 1{,}200$$

นั่นคือ $AC = 20\sqrt{3}$

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad
เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” หน้า 13 – 15

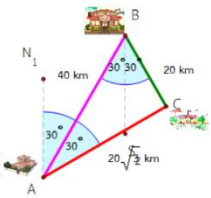
หน้าที่ 13

เริ่มต้นใหม่

"การหาระยะทางและความสูง"

ใบงานข้อที่ 4 มานะขับรถยนต์จากบ้านเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม 30 องศา กับทิศเหนือ เป็นระยะทาง 40 กิโลเมตร ไปยังร้านกาแฟแห่งหนึ่ง จากนั้นเขาขับรถยนต์ต่อไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออกโดยทำมุม 30 องศา กับทิศใต้เป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร ไปยังโรงเรียนทับปุดวิทยา มานะอยู่ห่างจากบ้านเป็นระยะทางเท่าใดและอยู่ทิศทางใดของบ้าน

อธิบาย 6
อธิบาย 7
อธิบาย 8
อธิบาย 9
อธิบาย 10
อธิบาย 11



จากกฎของไซน์ $\frac{\sin B\hat{A}C}{BC} = \frac{\sin A\hat{B}C}{AC}$

$\frac{\sin B\hat{A}C}{20} = \frac{\sin 60^\circ}{20\sqrt{3}}$

$\sin BAC = \frac{20\frac{\sqrt{3}}{2}}{20\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{2}$

นั่นคือ $B\hat{A}C = 30^\circ$

$N_1AC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$

ดังนั้น มานะอยู่ห่างจากบ้านเป็นระยะทาง กิโลเมตรและอยู่ทิศทางเฉียงไปทางทิศตะวันออกของบ้าน โดยทำมุม 60 องศากับทิศเหนือ

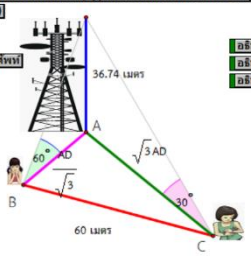
หน้าที่ 14

เริ่มต้นใหม่

"การหาระยะทางและความสูง"

ใบงานข้อที่ 5 มานีอยู่ทางทิศใต้ของเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์และทำมุมเงย 60 องศา กับยอดเสา ชูใจอยู่ห่างทางทิศตะวันออกของมานี มองยอดเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์เป็นมุมเงย 30 องศา ถ้าระยะห่างระหว่างมานีกับชูใจ เท่ากับ 60 เมตร เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์สูงประมาณเท่าใด

มานีอยู่ทางทิศใต้ของเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์ทำมุมเงย 60 องศา
ชูใจอยู่ทางทิศตะวันออกของมานีมองยอดเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์เป็นมุมเงย 30 องศา
ระยะห่างระหว่างมานีกับชูใจ(BC)
AB
AC
ความสูงของเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์
รูป



อธิบาย 1
อธิบาย 2
อธิบาย 3

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD

$\tan A\hat{B}D = \frac{AD}{AB}$

$\tan 60^\circ = \frac{AD}{AB}$

$AB = \frac{AD}{\tan 60^\circ} = \frac{AD}{\sqrt{3}}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD

อธิบาย 4
อธิบาย 5
อธิบาย 6

$\tan A\hat{C}D = \frac{AD}{AC}$

$\tan 30^\circ = \frac{AD}{AC}$

$AC = \frac{AD}{\tan 30^\circ} = \frac{AD}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}AD$

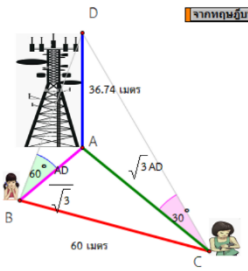
หน้าที่ 15

เริ่มต้นใหม่

"การหาระยะทางและความสูง"

ใบงานข้อที่ 5 มานีอยู่ทางทิศใต้ของเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์และทำมุมเงย 60 องศา กับยอดเสา ชูใจอยู่ห่างทางทิศตะวันออกของมานี มองยอดเสาส่งสัญญาณโทรศัพท์เป็นมุมเงย 30 องศา ถ้าระยะห่างระหว่างมานีกับชูใจ เท่ากับ 60 เมตร เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์สูงประมาณเท่าใด

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC



อธิบาย 7
อธิบาย 8
อธิบาย 9
อธิบาย 10
อธิบาย 11
อธิบาย 12
อธิบาย 13
อธิบาย 14

จากมุม ABC เท่ากับ 90 องศา จะได้

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(\sqrt{3}AD)^2 = (\frac{AD}{\sqrt{3}})^2 + 60^2$

$(\sqrt{3}AD)^2 - (\frac{AD}{\sqrt{3}})^2 = 60^2$

$3AD^2 - \frac{AD^2}{3} = 60^2$

$\frac{8}{3}AD^2 = 60^2$

$AD^2 = \frac{3}{8}60^2$

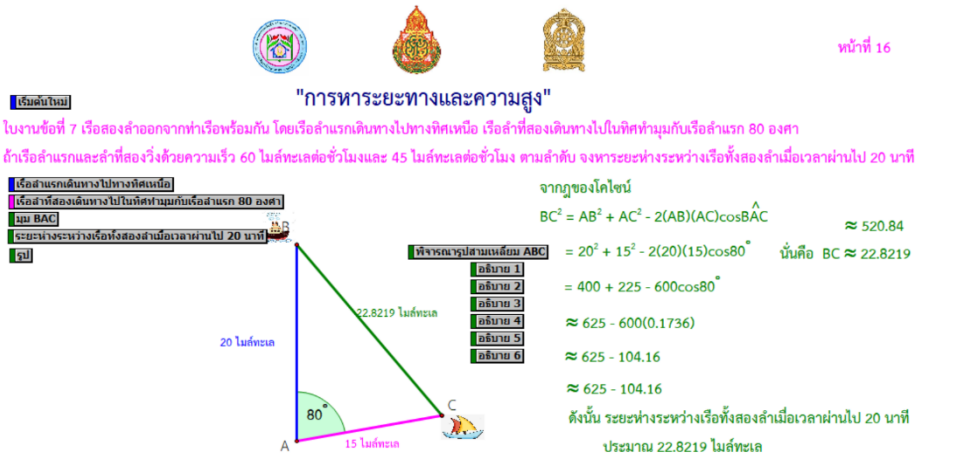
$AD^2 = \frac{3}{8}60^2$

$AD \approx 36.74$

ดังนั้น เสาส่งสัญญาณโทรศัพท์สูงประมาณ 36.74 เมตร

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad

เรื่อง “การหาระยะทางและความสูง” หน้า 16 – 18



เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) นำความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาระยะทางและความสูงได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 9 - 10 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ หรือมีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
4	5
3	4
2	3
1	2
0	1

แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ					ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (นำความรู้ไปใช้) แบบฝึกหัดที่ 11						
		4	3	2	1	0		

เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	สามารถแก้ปัญหาโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 9 - 10 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถทำสามารถแก้ปัญหาโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ หรือมีร่องรอยของความพยายามในการแก้ปัญหาโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 9 - 10 ข้อ	สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ หรือ มีร่องรอยของความพยายามสามารถเชื่อมโยง

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
				ความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ได้แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
3) ใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์วิธีการที่หลากหลายในการในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ได้	สามารถใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์วิธีการที่หลากหลายในการในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ต่างจากแนวทางที่เฉลยอย่างน้อย 3 ข้อและถูกต้องสมบูรณ์	สามารถใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์วิธีการที่หลากหลายในการในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ต่างจากแนวทางที่เฉลยอย่างน้อย 2 ข้อและถูกต้องสมบูรณ์	สามารถใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์วิธีการที่หลากหลายในการในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ต่างจากแนวทางที่เฉลยอย่างน้อย 1 ข้อและถูกต้องสมบูรณ์	มีร่องรอยของความพยายามใช้ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์วิธีการที่หลากหลายในการในการหาระยะทางและความสูงจากสถานการณ์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ															ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (การแก้ปัญหา)					2) (การเชื่อมโยง)					3) (การคิดสร้างสรรค์)						
		แบบฝึกหัดที่ 11					แบบฝึกหัดที่ 11					แบบฝึกหัดที่ 11						
		4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0		

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์	ร่วมกิจกรรมวันสำคัญที่แสดงถึง รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ อย่างน้อย 3 กิจกรรม	ร่วมกิจกรรมวันสำคัญที่แสดงถึง รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ อย่างน้อย 2 กิจกรรม	ร่วมกิจกรรมวันสำคัญที่แสดงถึง รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์ อย่างน้อย 1 กิจกรรม	ไม่ร่วมกิจกรรมวันสำคัญที่แสดงถึง รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์
2) ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น	ทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” โดยคัดลอกจากผู้อื่น
3) มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อยโดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อยบางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน	แต่งกายไม่เรียบร้อยหรือไม่แก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน
4) ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรงเวลา	การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที
5) อยู่อย่างพอเพียง	เขียนสมุดจดงานสมุดแบบฝึกหัดเรียบร้อย ใช้พื้นที่อย่างประหยัด คุ้มค่าทุกหน้า	เขียนสมุดจดงานสมุดแบบฝึกหัดเรียบร้อย ใช้พื้นที่อย่างประหยัด คุ้มค่าทุกหน้าเป็นส่วนใหญ่	เขียนสมุดจดงานสมุดแบบฝึกหัดเรียบร้อย ใช้พื้นที่อย่างประหยัด คุ้มค่าทุกหน้าบางส่วน	เขียนสมุดจดงานสมุดแบบฝึกหัด ไม่เรียบร้อย ใช้พื้นที่ไม่ประหยัด คุ้มค่า
6) มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 11 “การหาระยะทางและความสูง” ไม่ทุกข้อหรือครบทุกข้อแต่ไม่ถูกต้องหรือไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 11

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
				“การหาระยะทางและความสูง”
7) รักความเป็นไทย	แสดงความเคารพด้วยการไหว้ทักทายครูในชั้นเรียน ทุกครั้ง	แสดงความเคารพด้วยการไหว้ทักทายครูในชั้นเรียน เป็นส่วนใหญ่	แสดงความเคารพด้วยการไหว้ทักทายครูในชั้นเรียน เป็นบางครั้ง	ไม่แสดงความเคารพด้วยการไหว้ทักทายครูในชั้นเรียน
8) มีจิตสาธารณะ	รักษาความสะอาดโต๊ะเรียนและบริเวณที่นั่งเรียนให้สะอาดเรียบร้อยทุกครั้ง	รักษาความสะอาดโต๊ะเรียนและบริเวณที่นั่งเรียนให้สะอาดเรียบร้อยเป็นส่วนใหญ่	รักษาความสะอาดโต๊ะเรียนและบริเวณที่นั่งเรียนให้สะอาดเรียบร้อยเป็นบางครั้ง	ไม่รักษาความสะอาดโต๊ะเรียนและบริเวณที่นั่งเรียนให้สะอาดเรียบร้อย

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์)				2) (ซื่อสัตย์สุจริต)				3) (มีวินัย)				4) (ใฝ่เรียนรู้)					
		กิจกรรมวันสำคัญ				แบบฝึกหัดที่ 11				การแต่งกาย				การเข้าเรียน					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		5) (อยู่อย่างพอเพียง)				6) (มีวินัย)				7) (มุ่งมั่นในการทำงาน)				8) (มีจิตสาธารณะ)					
		สมุด				การแต่งกาย				แบบฝึกหัด 11				แบบฝึกหัด 10					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาระยะทางและความสูงได้	สามารถใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาระยะทางและความสูงในใบงาน “ระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาระยะทางและความสูงในใบงาน “ระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาระยะทางและความสูงในใบงาน “ระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาระยะทางและความสูงในใบงาน “ระยะทางและความสูง” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การคิดในการแสดงวิธีทำในการหาระยะทางและความสูงได้	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ระยะทางและความสูง” ได้อย่างเป็นขั้นตอนและถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ระยะทางและความสูง” ได้อย่างเป็นขั้นตอนและถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ระยะทางและความสูง” ได้อย่างเป็นขั้นตอนและถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามแสดงวิธีทำในใบงาน “ระยะทางและความสูง” แต่ไม่เป็นขั้นตอนและถูกต้องสมบูรณ์
3) ใช้การแก้ปัญหาในการหาระยะทางและความสูงได้	สามารถแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ระยะทางและความสูง” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ระยะทางและความสูง” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
4) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	ไม่มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน ไม่แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มหรือช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
5) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "การหาระยะทางและความสูง" ได้	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ระยะทางและความสูง"ทบทวนและสรุปเนื้อหาทุกครั้ง	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ระยะทางและความสูง"ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นส่วนใหญ่	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ระยะทางและความสูง" ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นบางครั้ง	ไม่ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ระยะทางและความสูง"ทบทวนและสรุปเนื้อหา

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (การสื่อสาร)				2) (การคิด)				3) (การแก้ปัญหา)				4) (การใช้ทักษะชีวิต)					
		ใบงาน การหาระยะทางและความสูง				ใบงาน การหาระยะทางและความสูง				ใบงาน การหาระยะทางและความสูง				การทำงานกลุ่ม					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ 5) (การใช้เทคโนโลยี) สื่อโปรแกรม GSP					ผลการประเมิน	คะแนน
		4	3	2	1	0		

แบบบันทึกสรุปคะแนนแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14
การหาระยะทางและความสูง

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้				คะแนนรวม	น้ำหนักคะแนน
		1 ด้านความรู้	2 ด้านทักษะฯ	3 ด้านคุณลักษณะฯ	4 ด้านสมรรถนะฯ		
		5	5	5	5	20	5

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ : บริษัท ธนธัชการพิมพ์ จำกัด.

พิชิต ฤทธิ์จรูญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงกทพฯ : เฮ้าส์ออฟเคอร์มิสท์.

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ.** พระนครศรีอยุทธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.

ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฎานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-NET คณิตศาสตร์ ม.6.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.**

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.** พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 5. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.

อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.