



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201

ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

สาระการเรียนรู้ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เวลา 3 ชั่วโมง

1. ผลการเรียนรู้

เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทุกฟังก์ชัน เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ (Periodic Function) กล่าวคือ สามารถแบ่งแกน x ออกเป็นช่วงย่อย (Subinterval) โดยที่ความยาวแต่ละช่วงย่อยเท่ากันและกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน ความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดมีสมบัติดังกล่าวเรียกว่าคาบ (Period)

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 เขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

4.1.2 หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์จากกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

4.2.2 ใช้การให้เหตุผลในการจับคู่กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

- 4.3.1 ซื่อสัตย์สุจริต
- 4.3.2 มีวินัย
- 4.3.3 ใฝ่เรียนรู้
- 4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

- 4.4.1 ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
- 4.4.2 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้
- 4.4.3 ใช้เทคโนโลยี เพื่อหาบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's

Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้

5. เนื้อหา/สาระ

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเฉพาะกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เป็นกราฟที่มีความสำคัญมากทั้งในวิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆ เช่น ในวิชาฟิสิกส์เรื่องกลศาสตร์ คลื่นแสง คลื่นเสียง คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

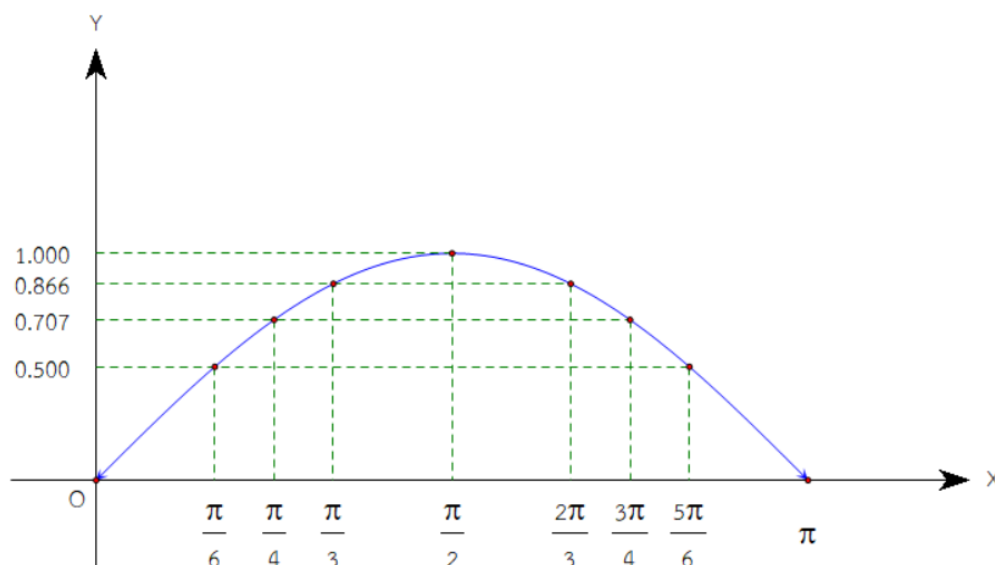
ดังนั้น จึงควรศึกษาลักษณะและการเขียนกราฟฟังก์ชันทั้งสองและฟังก์ชันอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

การเขียนกราฟ $y = \sin x$ เขียนได้ดังนี้

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$ ได้ดังตาราง

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

จะได้กราฟ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$ เป็นดังนี้



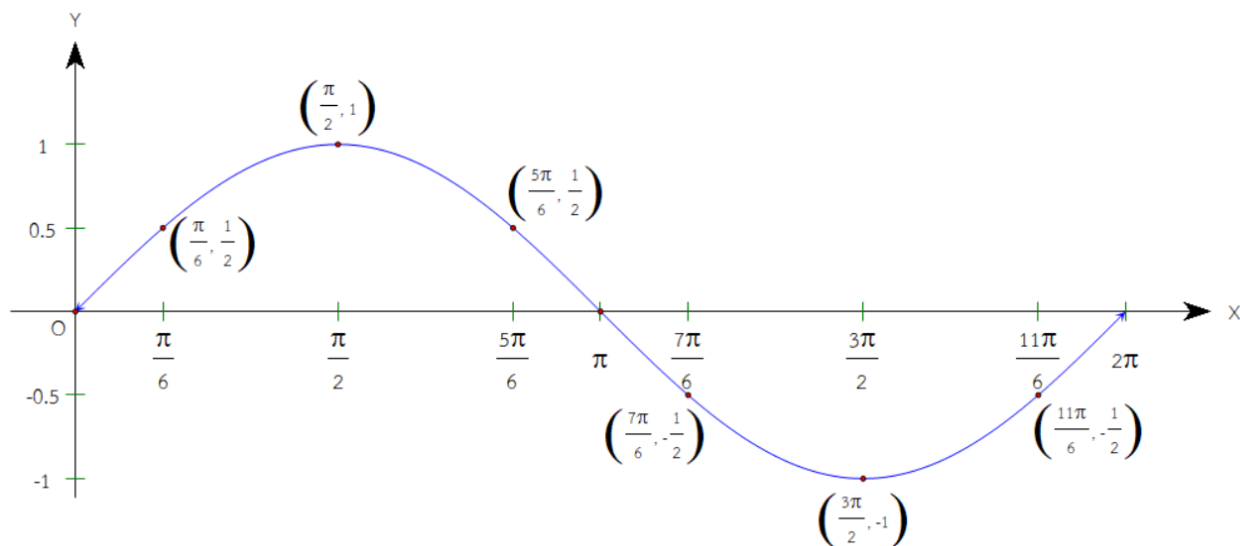
เนื่องจากเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์จึงมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1 ซึ่งค่าของ $\sin x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จึงมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังลักษณะในตารางดังนี้

x	
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	เพิ่มขึ้นจาก 0 ไปถึง 1
$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$	ลดลงจาก 1 ไปถึง 0
$\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$	ลดลงจาก 0 ไปถึง -1
$\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$	เพิ่มขึ้นจาก -1 ไปถึง 0

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ได้ดังตาราง

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

จะได้กราฟ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นดังนี้

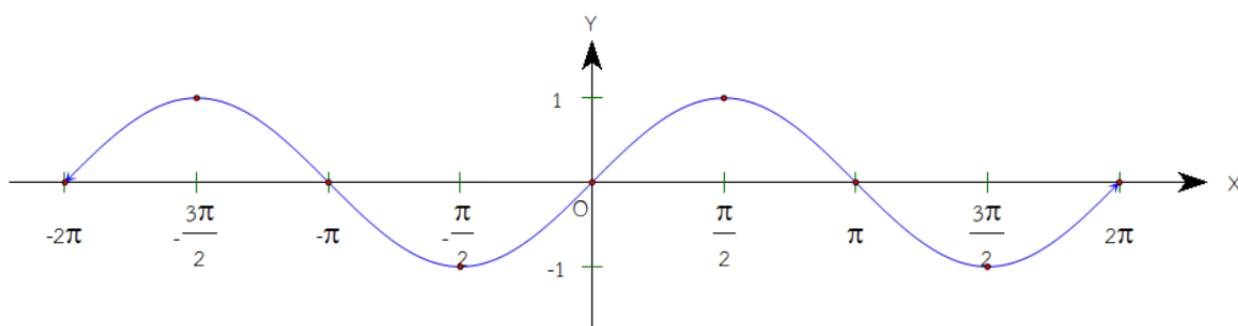


จากที่ทราบมาแล้วว่า $\sin(2n\pi + x) = \sin x$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม สมบัตินี้เป็นสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของฟังก์ชันไซน์ ทำให้กราฟของฟังก์ชันไซน์มีลักษณะซ้ำกันเป็นช่วง ๆ ซึ่งช่วยให้การเขียนกราฟง่ายขึ้น

จะได้กราฟ $y = \sin x$ เป็นดังนี้

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



จากกราฟจะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ $[-1, 1]$

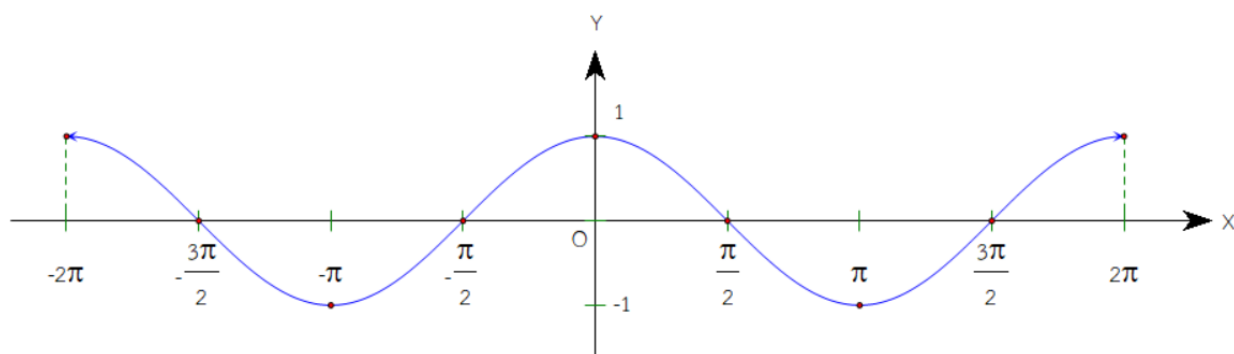
กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$

กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 0)$

ในทำนองเดียวกันกับการเขียนกราฟของ $y = \sin x$ จะเขียนกราฟของ $y = \cos x$ ได้ดังนี้

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \cos x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



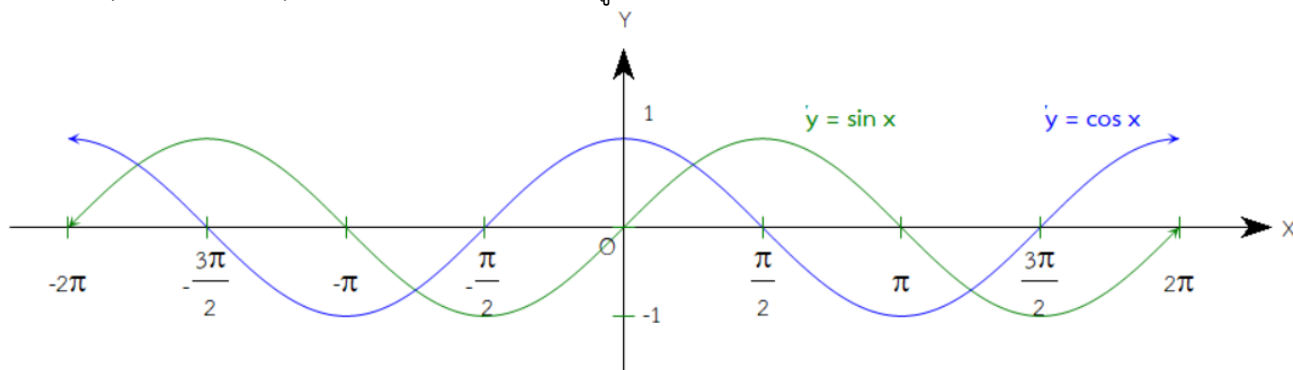
จากกราฟจะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง
เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ $[-1, 1]$

กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 1)$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ(periodic function) กล่าวคือ สามารถแบ่งแกน X ออกเป็นช่วงย่อย (subinterval) โดยที่ความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากันและกราฟแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน ความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดที่มีสมบัติดังกล่าวเรียกว่า คาบ(period) ของฟังก์ชัน เช่น กราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ ในช่วง $\dots, [-4\pi, -2\pi], [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \dots$ เป็นช่วงที่สั้นที่สุดที่แบ่งแล้วทำให้กราฟในแต่ละช่วงเหล่านั้นมีลักษณะเหมือนกัน คาบของฟังก์ชัน

$y = \sin x$ และ $y = \cos x$ จึงเท่ากับ 2π ดังรูป



สำหรับฟังก์ชันที่เป็นคาบซึ่งมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นว่า แอมพลิจูด (amplitude) นั่นคือ

ถ้า a เป็นค่าสูงสุด และ b เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบ แล้วจะได้แอมพลิจูดของฟังก์ชันนี้ คือ

$$\frac{1}{2}(a-b)$$

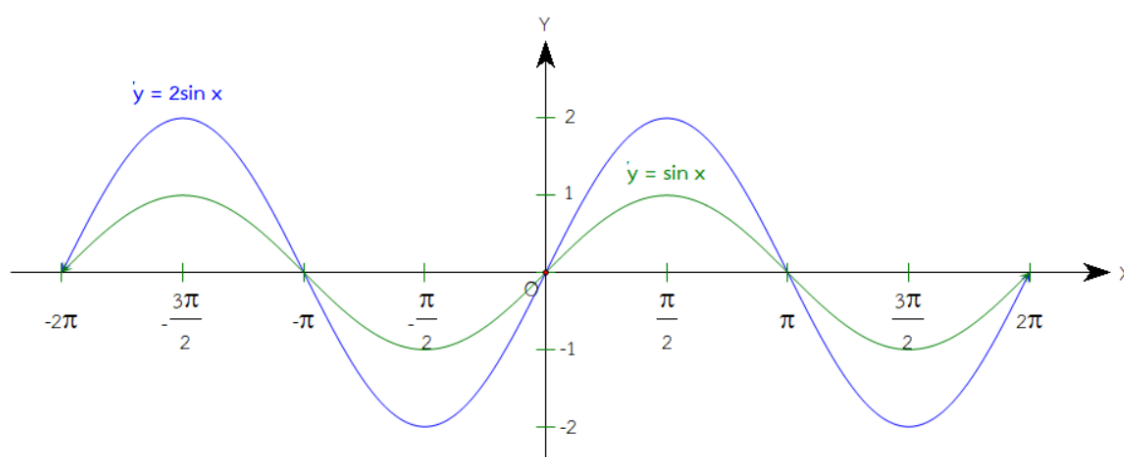
ดังนั้น ฟังก์ชัน $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ มีแอมพลิจูดเป็น 1 เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของ $y = \sin x$ และ $y = 2\sin x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = 2\sin x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และ y จาก $y = \sin x$ และ $y = 2\sin x$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$2\sin x$	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \sin x$ และ $y = 2\sin x$ ตัดแกน X ที่จุดเดียวกัน คือที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ $y = 2\sin x$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ $y = 2\sin x$ คือ $[-2, 2]$

คาบของฟังก์ชันไซน์ $y = 2\sin x$ คือ 2π

และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = 2\sin x$ คือ $\frac{2 - (-2)}{2} = 2$

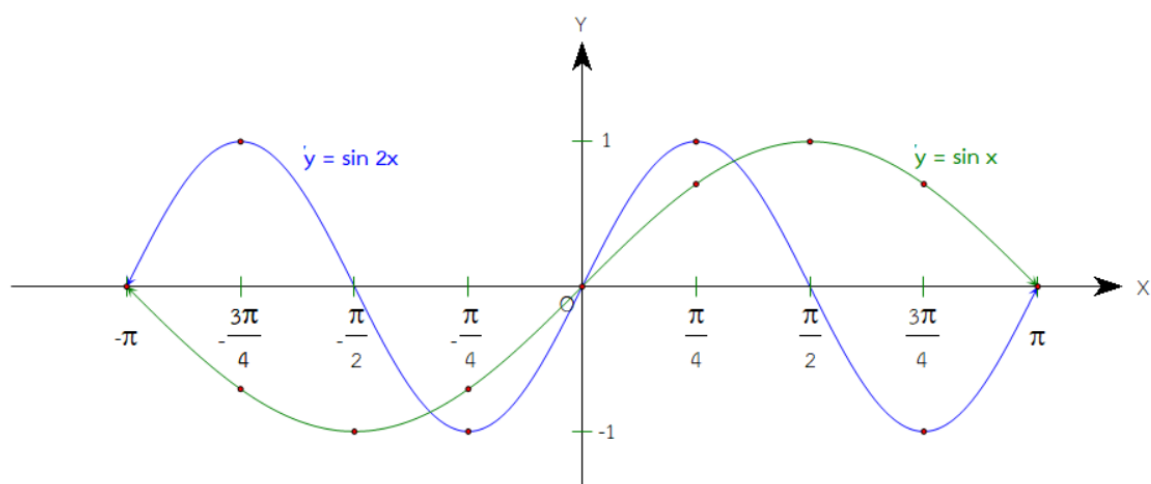
□

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \sin 2x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \sin 2x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และ y จาก $y = \sin x$ และ $y = \sin 2x$ ได้ดังตาราง

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin x$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \sin 2x$ ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ

$$..., -2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, ...$$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin 2x$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin 2x$ คือ $[-1, 1]$

คาบของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin 2x$ คือ π

และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \sin 2x$ คือ $\frac{1 - (-1)}{2} = 1$

□

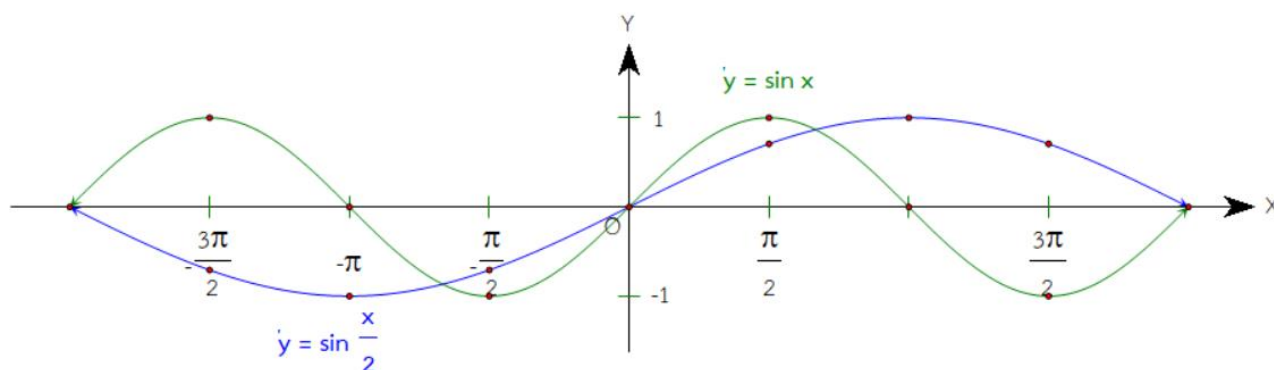
ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \sin \frac{x}{2}$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหา

จุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \sin \frac{x}{2}$

วิธีทำ กำหนดค่า x และ y จาก $y = \sin x$ และ $y = \sin \frac{x}{2}$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\sin \frac{x}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \sin \frac{x}{2}$ ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ

$$..., -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ...$$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin \frac{x}{2}$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin \frac{x}{2}$ คือ $[-1, 1]$

คาบของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin \frac{x}{2}$ คือ 4π

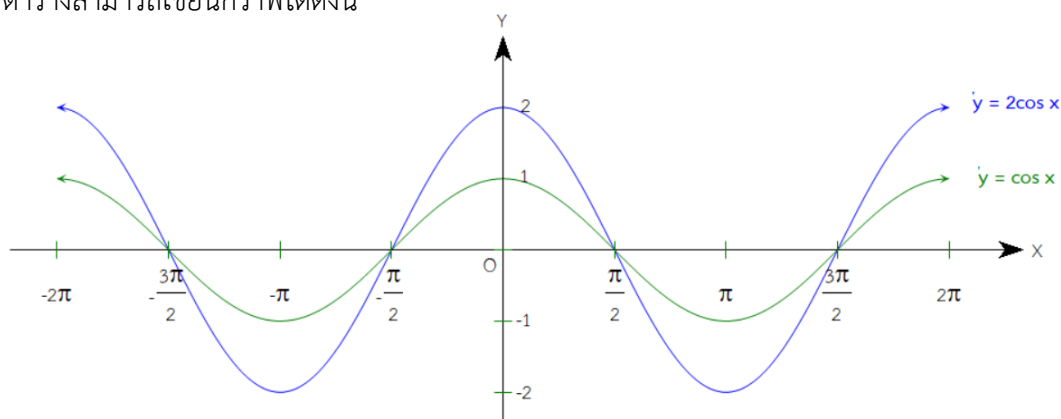
และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \sin \frac{x}{2}$ คือ $\frac{1 - (-1)}{2} = 1$ □

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนกราฟของ $y = \cos x$ และ $y = 2\cos x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = 2\cos x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และ y จาก $y = \cos x$ และ $y = 2\sin x$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$2\cos x$	2	0	-2	0	1	0	-2	0	2

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \cos x$ และ $y = 2\cos x$ ตัดแกน X ที่จุดเดียวกัน คือ

ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ $y = 2\cos x$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ $y = 2\cos x$ คือ $[-2, 2]$

คาบของฟังก์ชันไซน์ $y = 2\cos x$ คือ 2π

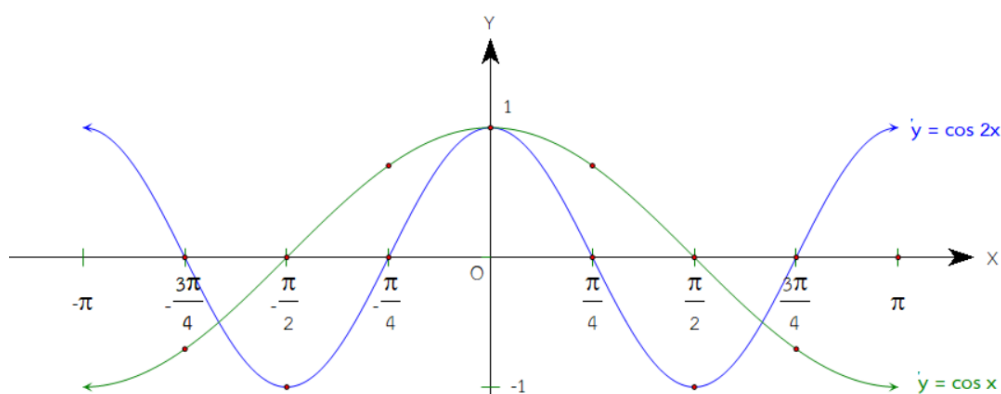
และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = 2\cos x$ คือ $\frac{2 - (-2)}{2} = 2$ □

ตัวอย่างที่ 5 จงเขียนกราฟของ $y = \cos x$ และ $y = \cos 2x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \cos 2x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และ y จาก $y = \cos x$ และ $y = \cos 2x$ ได้ดังตาราง

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\cos 2x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \cos 2x$ ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ

$\dots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ $y = \cos 2x$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ $y = \cos 2x$ คือ $[-1, 1]$

คาบของฟังก์ชันไซน์ $y = \cos 2x$ คือ π

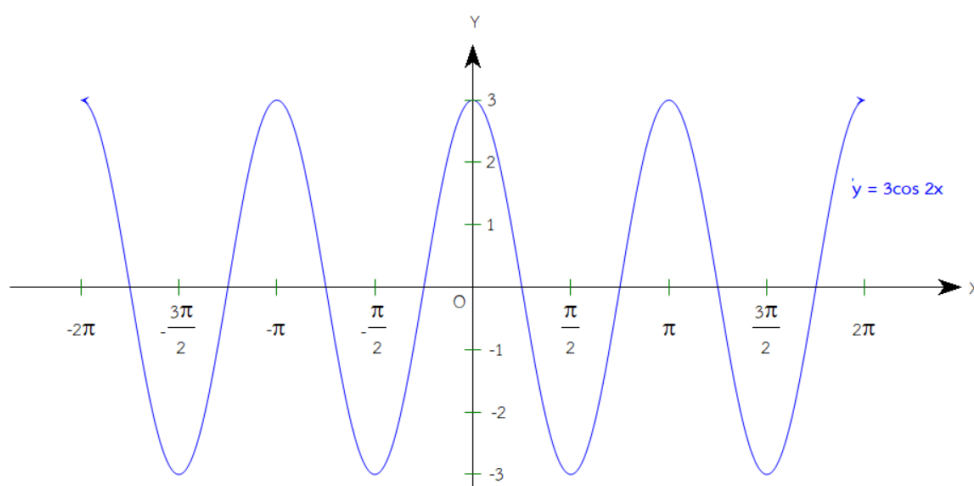
และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \cos 2x$ คือ $\frac{1 - (-1)}{2} = 1$ □

ในกรณีทั่วไป จะได้ว่า

ฟังก์ชัน	โดเมน	คาบ	แอมพลิจูด	เรนจ์
$y = \sin(nx), n > 0$	\mathbb{R}	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1, 1]$
$y = \cos(nx), n > 0$	\mathbb{R}	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1, 1]$
$y = a\sin(nx), n > 0$	\mathbb{R}	$\frac{2\pi}{n}$	$ a $	$[- a , a]$
$y = a\cos(nx), n > 0$	\mathbb{R}	$\frac{2\pi}{n}$	$ a $	$[- a , a]$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาคาบ แอมพลิจูด และเรนจ์ของฟังก์ชัน $y = 3\cos 2x$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จาก $y = 3\cos 2x$ จะได้ คาบ คือ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ แอมพลิจูด คือ 3 และ เรนจ์คือ $[-3, 3]$
เขียนกราฟของ $y = 3\cos 2x$ ได้ดังนี้



ก่อนเขียนกราฟของฟังก์ชันอื่น ๆ ให้พิจารณาโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ \mathbb{R}

โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ \mathbb{R}

โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ $\left\{x \mid x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

โดเมนของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ $\left\{x \mid x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

โดเมนของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ $\{x \mid x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

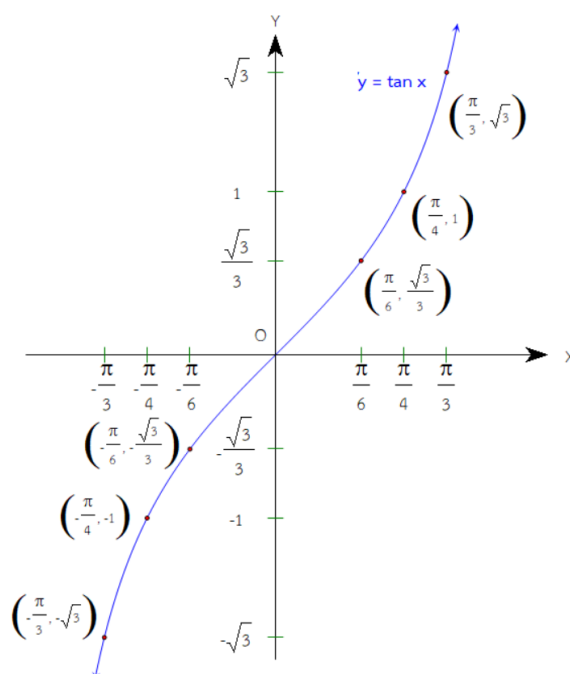
และ โดเมนของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ $\{x \mid x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

การเขียนกราฟของ $y = \tan x$ เขียนได้ ดังนี้

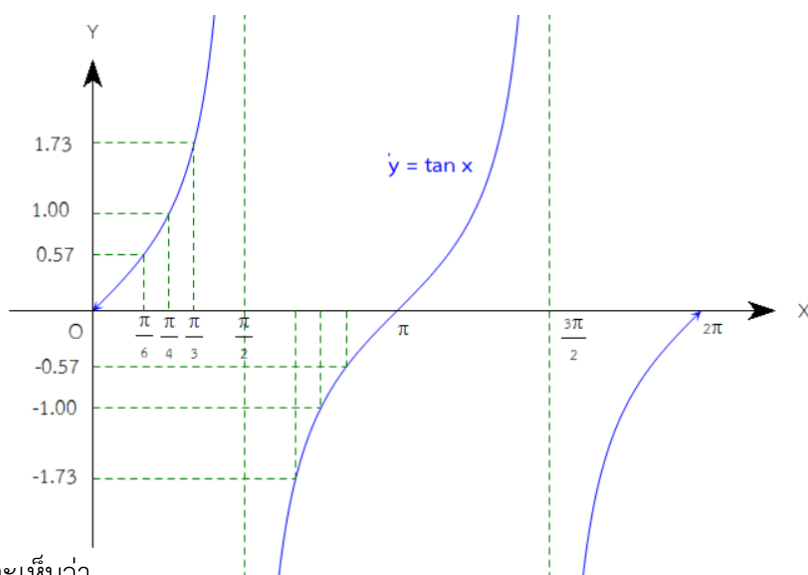
กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ได้ดังตาราง

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
tan x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

จะได้ กราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ เป็นดังนี้



พิจารณากราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $0 < x < 2\pi$



จากรูป จะเห็นว่า

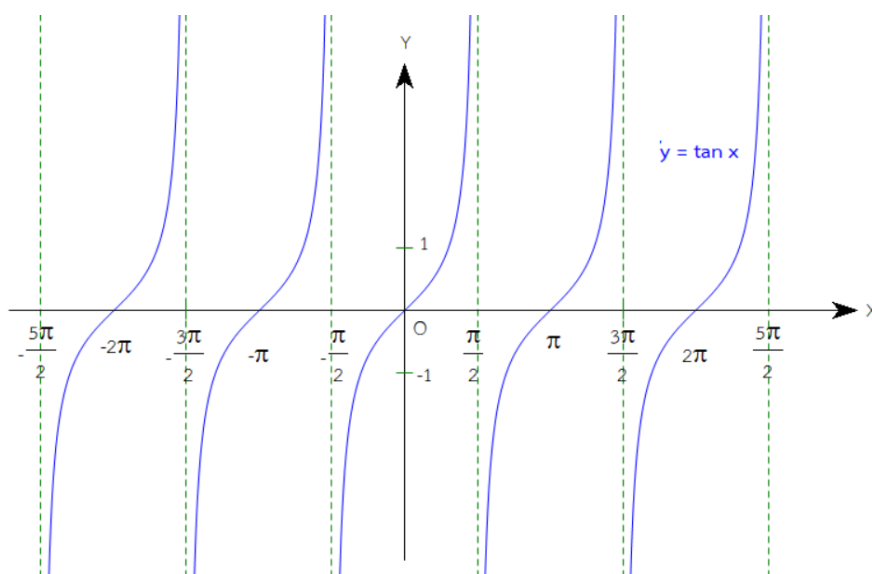
เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0 และเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงบวก และเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{\pi}{2}$ แต่ $\tan x$ ไม่นิยามที่ $x = \frac{\pi}{2}$ เมื่อ x มีค่าลดลงจาก π และเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงลบ และลดลงเรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{\pi}{2}$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจาก π และเข้าใกล้ $\frac{3\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงบวก และเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{3\pi}{2}$ แต่ $\tan x$ ไม่นิยามที่ $x = \frac{3\pi}{2}$

เมื่อ x มีค่าลดลงจาก 2π และเข้าใกล้ $\frac{3\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงลบ และลดลงเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น ในการเขียนกราฟดังกล่าว ถ้าลากเส้นประ $x = \frac{\pi}{2}$ และ $x = \frac{3\pi}{2}$ ก่อน จะช่วยให้เขียนกราฟได้ง่ายขึ้น แต่เส้นประดังกล่าวนี้มีได้เป็นส่วนหนึ่งของกราฟ

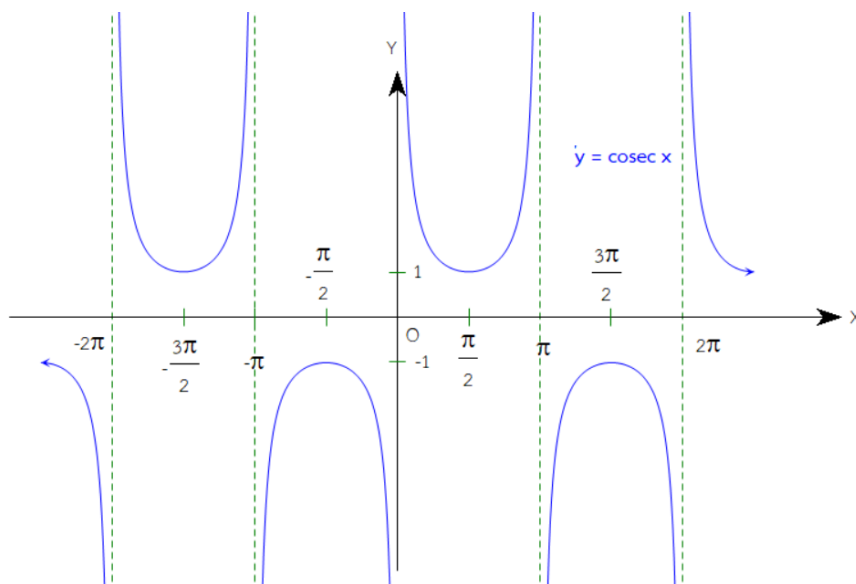
เนื่องจาก $\tan(n\pi + \theta) = \tan \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์จึงมีลักษณะซ้ำกันเป็นช่วง ๆ ดังนั้นฟังก์ชันแทนเจนต์จึงเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ
จะได้กราฟของ $y = \tan x$ เป็นดังนี้



จากรูปจะเห็นว่า ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ π

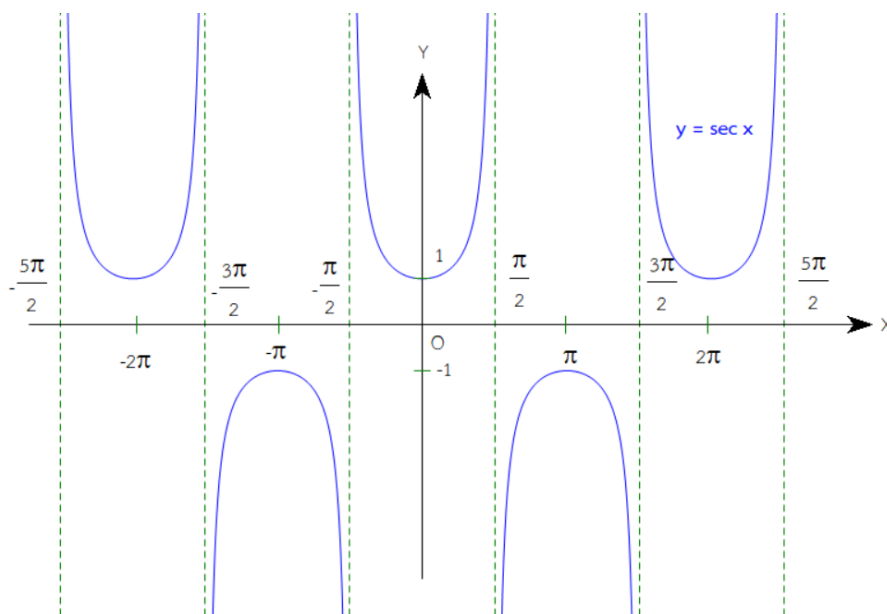
เนื่องจากค่าของ ฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ที่ x เป็นส่วนกลับของ ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ที่ x ตามลำดับ จึงสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ได้ดังนี้

กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$ เป็นดังนี้



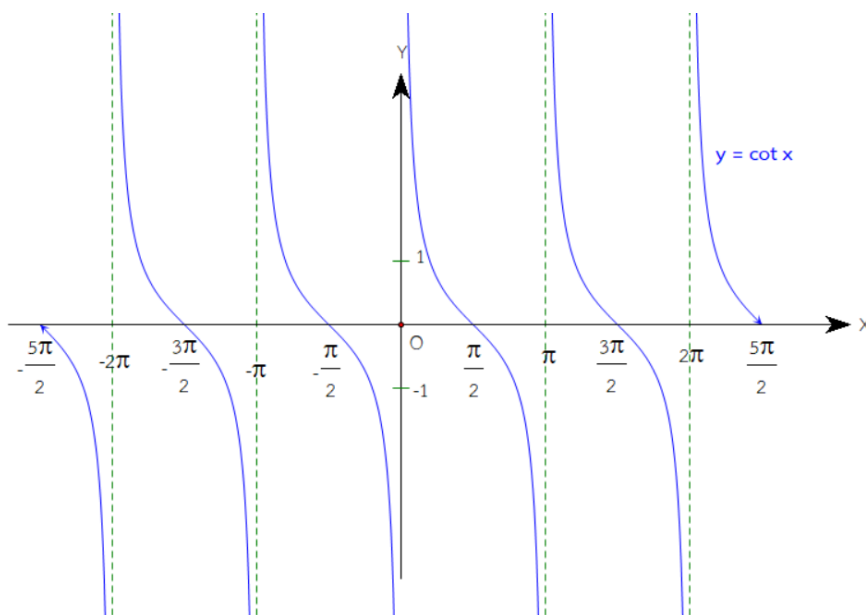
จะเห็นว่า ฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ 2π

กราฟของ $y = \sec x$ เป็นดังนี้



จะเห็นว่า ฟังก์ชันเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ 2π

กราฟของ $y = \cot x$ เป็นดังนี้



จะเห็นว่า ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ π

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) เขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้	ตรวจสอบแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1	- แบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์จากกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้	ตรวจสอบแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1	- แบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1	- แบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การให้เหตุผลในการจับคู่กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2	- แบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 2 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้เหตุผลจับคู่กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต	ตรวจการทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”	- แบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีวินัย อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึกการเข้าเรียน	นักเรียนใฝ่เรียนรู้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
		- แบบบันทึก ประเมินผลด้าน คุณลักษณะที่พึง ประสงค์	
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	การส่งแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ”	- แบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ” - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน คุณลักษณะที่พึง ประสงค์	นักเรียนมุ่งมั่นในการ ทำงานอยู่ในระดับดี ขึ้นไป
ด้านสมรรถนะสำคัญ of นักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอ การเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ได้	ตรวจใบงาน “กราฟ ของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ”	- ใบงาน “กราฟของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ” - แบบบันทึกประเมิน ด้านสมรรถนะสำคัญ ของผู้เรียน	นักเรียนใช้การ สื่อสารในการ นำเสนอการเขียน กราฟของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติได้อยู่ใน ระดับดีขึ้นไป
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรม กลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึก การทำงานกลุ่ม - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน สมรรถนะสำคัญ of ผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิต ในการทำกิจกรรม กลุ่มร่วมกับสมาชิกได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหา จากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กราฟของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้	ตรวจการใช้สื่อ โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ”	- สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ” - แบบบันทึกประเมิน ด้านสมรรถนะสำคัญ ของผู้เรียน	นักเรียนใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหา จากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ” ได้ อยู่ใน ระดับดีขึ้นไป

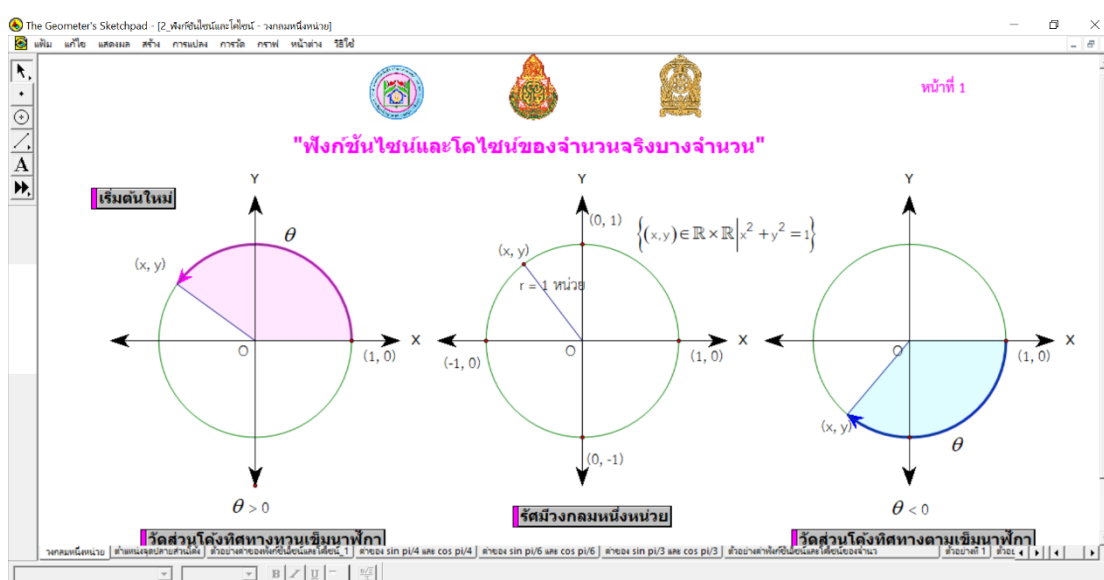
7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน

7.2 ครูทบทวนเรื่อง “วงกลมหนึ่งหน่วย” โดยการสนทนาถามตอบกับนักเรียนและใช้ สื่อ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” หน้าที่ 1 ประกอบ ดังรูป



แล้วถามคำถาม จากรูป “จากวงกลมหนึ่งหน่วยฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์เกิดจากความสัมพันธ์ของค่าใด”

แนวคำตอบ

- ฟังก์ชันไซน์(sine function) เกิดจากความสัมพันธ์ของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) ยาว $|\theta|$ หน่วย กับค่าในพิกัด y

- ฟังก์ชันโคไซน์(cosine function) เกิดจากความสัมพันธ์ของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด (1, 0) ยาว $|\theta|$ หน่วย กับค่าในพิกัด x

“นักเรียนคิดว่าสามารถเขียนกราฟฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ได้หรือไม่อย่างไร”

แนวคำตอบ

ได้ เขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์โดยนำความยาวส่วนโค้งที่วัดจากจุด (1, 0) ยาว $|\theta|$ หน่วย กับค่าในพิกัด y มาใส่ในแกนระบบพิกัดฉาก และ

เขียนกราฟของฟังก์ชันโคไซน์โดยนำความยาวส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย กับค่าในพิกัด x มาใส่ในแกนระบบพิกัดฉาก

ขั้นตอนและอธิบายทฤษฎี

7.3 ครูอธิบายการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” (หน้า 1 - 10) โดยการสื่อนักเรียนในชั้นเรียนตอบคำถามหรือสนทนากลับกับนักเรียนระหว่างการอธิบาย นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติมนักเรียนศึกษาใบความรู้ “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ประกอบ

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.4 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ในชั่วโมงที่ 1 ประกอบครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 3

7.5 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยครูสนทนากลับกับนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม หน้าชั้นเรียนและครูใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” (หน้า 11 - 12) อธิบายนักเรียนเพิ่มเติม

ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.6 จากการทำใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” และศึกษาใบความรู้ “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” นักเรียนสามารถกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อย่างไร

แนวคำตอบ

- เขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์โดยนำความยาวส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย กับค่าในพิกัด y มาใส่ในแกนระบบพิกัดฉาก และ

- เขียนกราฟของฟังก์ชันโคไซน์โดยนำความยาวส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย กับค่าในพิกัด x มาใส่ในแกนระบบพิกัดฉาก

7.7 ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน สุ่มให้นักเรียนอธิบายและให้นักเรียนคนอื่นร่วมอธิบายเพิ่มเติม

ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.8 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” เป็นการบ้าน

7.9 ครูมอบหมายให้นักเรียนทบทวนบทเรียนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” เพื่อเป็นการทบทวนและศึกษาความรู้เพิ่มเติมด้วยตัวเอง

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- ใบความรู้ “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” - ใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” - แบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”	สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้				
1) เขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้				
2) หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์จากกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์				
1) ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้				
2) ใช้การให้เหตุผลในการจับคู่กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันที่กำหนดให้				

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์				
1) ซื่อสัตย์สุจริต				
2) มีวินัย				
3) ใฝ่เรียนรู้				
4) มุ่งมั่นในการทำงาน				
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน				
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้				
2) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				
3) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้บริหารโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา



ใบความรู้ “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
2. หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์จากกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเฉพาะกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เป็นกราฟที่มีความสำคัญมากทั้งในวิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆ เช่น ในวิชาฟิสิกส์เรื่องกลศาสตร์ คลื่นแสง คลื่นเสียง คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

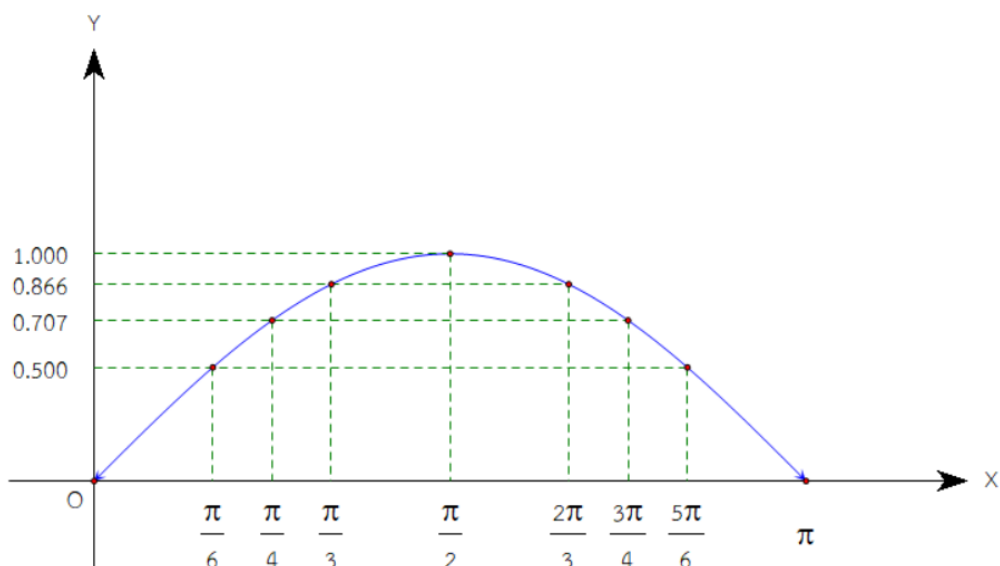
ดังนั้น จึงควรศึกษาลักษณะและการเขียนกราฟฟังก์ชันทั้งสองและฟังก์ชันอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องดังนี้

การเขียนกราฟ $y = \sin x$ เขียนได้ดังนี้

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$ ได้ดังตาราง

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

จะได้กราฟ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$ เป็นดังนี้



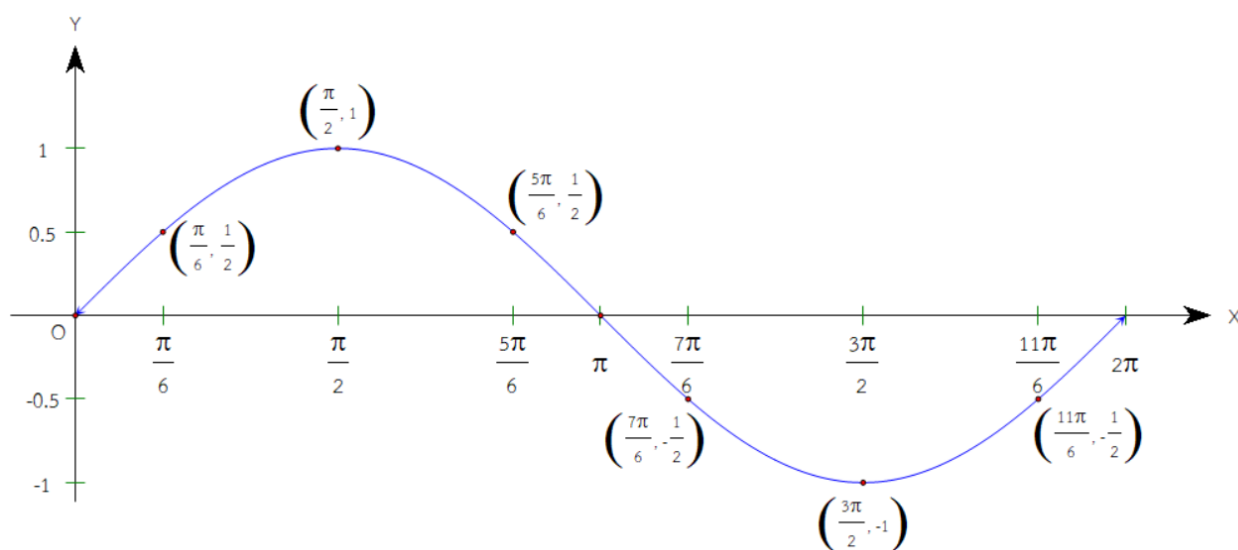
เนื่องจากเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์จึงมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1 ซึ่งค่าของ $\sin x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จึงมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังลักษณะในตารางดังนี้

x	
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	เพิ่มขึ้นจาก 0 ไปถึง 1
$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$	ลดลงจาก 1 ไปถึง 0
$\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$	ลดลงจาก 0 ไปถึง -1
$\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$	เพิ่มขึ้นจาก -1 ไปถึง 0

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ได้ดังตาราง

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

จะได้กราฟ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นดังนี้

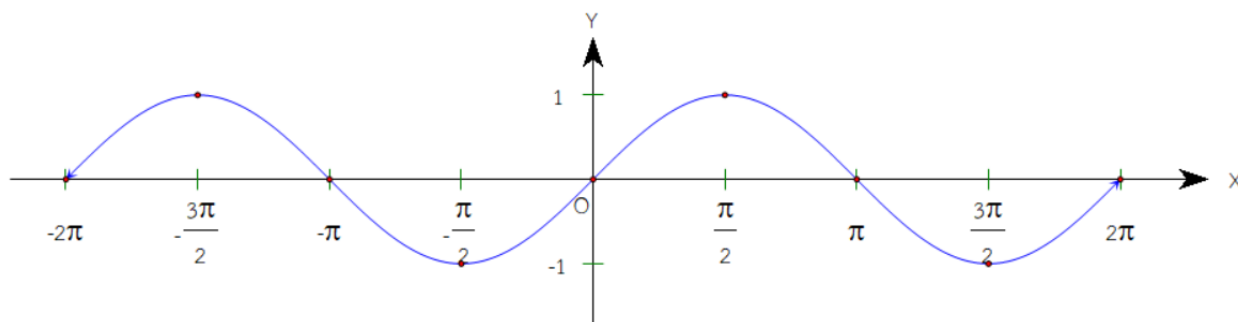


จากที่ทราบมาแล้วว่า $\sin(2n\pi + x) = \sin x$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม สมบัตินี้เป็นสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของฟังก์ชันไซน์ ทำให้กราฟของฟังก์ชันไซน์มีลักษณะซ้ำกันเป็นช่วง ๆ ซึ่งช่วยให้การเขียนกราฟง่ายขึ้น

จะได้กราฟ $y = \sin x$ เป็นดังนี้

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \sin x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



จากกราฟจะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ $[-1, 1]$

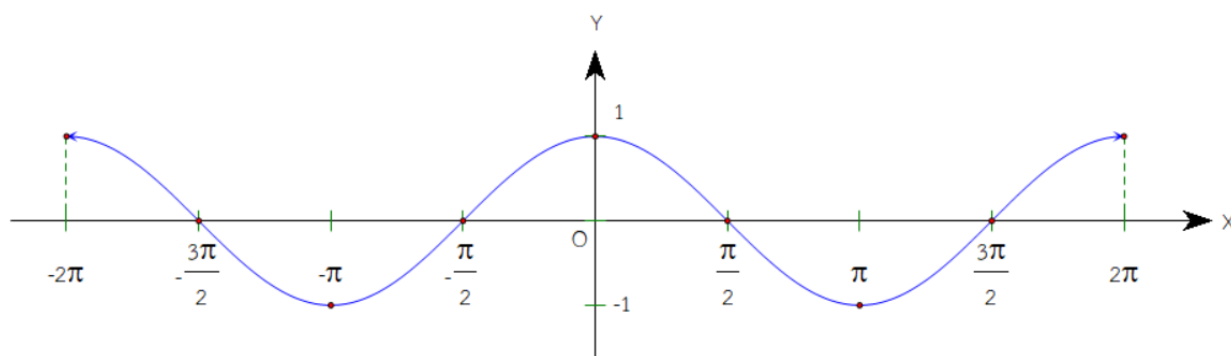
กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$

กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 0)$

ในทำนองเดียวกันกับการเขียนกราฟของ $y = \sin x$ จะเขียนกราฟของ $y = \cos x$ ได้ดังนี้

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \cos x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



จากกราฟจะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง

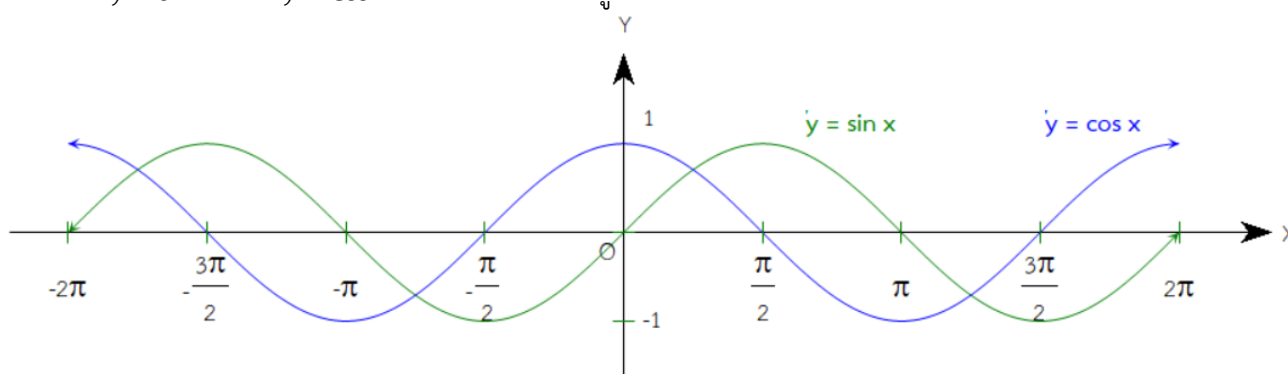
เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ $[-1, 1]$

กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 1)$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ(periodic function) กล่าวคือ สามารถแบ่งแกน X ออกเป็นช่วงย่อย (subinterval) โดยที่ความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากันและกราฟแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน ความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดที่มีสมบัติดังกล่าวเรียกว่า คาบ(period) ของฟังก์ชัน เช่น กราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ ในช่วง $\dots, [-4\pi, -2\pi], [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \dots$ เป็นช่วงที่สั้นที่สุดที่แบ่งแล้วทำให้กราฟในแต่ละช่วงเหล่านั้นมีลักษณะเหมือนกัน คาบของฟังก์ชัน

$y = \sin x$ และ $y = \cos x$ จึงเท่ากับ 2π ดังรูป



สำหรับฟังก์ชันที่เป็นคาบซึ่งมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นว่า แอมพลิจูด (amplitude) นั่นคือ

ถ้า a เป็นค่าสูงสุด และ b เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบ แล้วจะได้แอมพลิจูดของฟังก์ชันนี้ คือ

$$\frac{1}{2}(a-b)$$

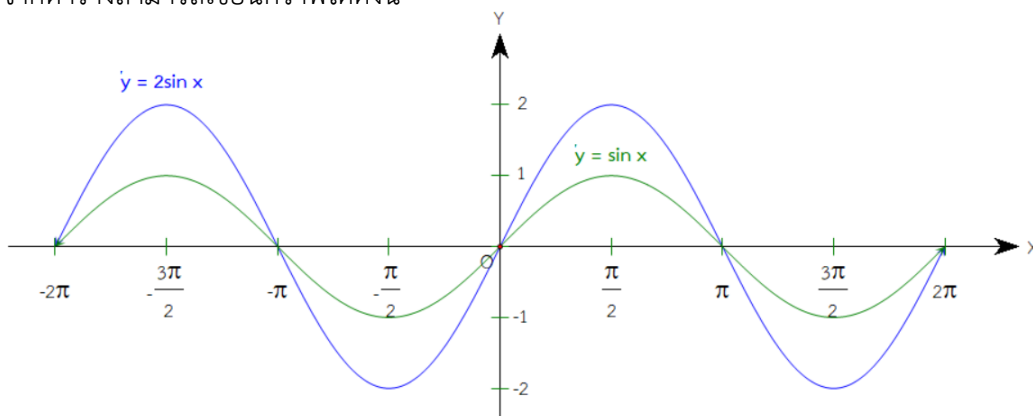
ดังนั้น ฟังก์ชัน $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ มีแอมพลิจูดเป็น 1 เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของ $y = \sin x$ และ $y = 2\sin x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = 2\sin x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และ y จาก $y = \sin x$ และ $y = 2\sin x$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$2\sin x$	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \sin x$ และ $y = 2 \sin x$ ตัดแกน X ที่จุดเดียวกัน คือ ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ $y = 2 \sin x$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ $y = 2 \sin x$ คือ $[-2, 2]$

คาบของฟังก์ชันไซน์ $y = 2 \sin x$ คือ 2π

และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = 2 \sin x$ คือ $\frac{2 - (-2)}{2} = 2$

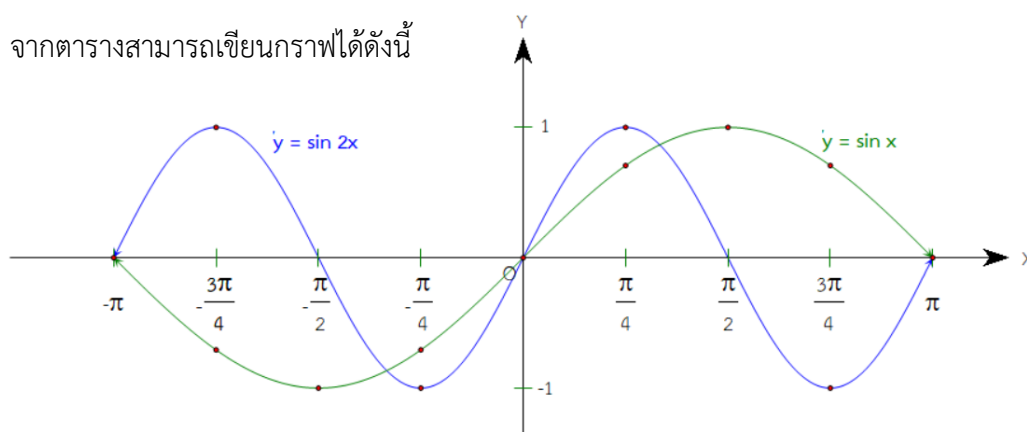
□

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \sin 2x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \sin 2x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และ y จาก $y = \sin x$ และ $y = \sin 2x$ ได้ดังตาราง

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin x$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \sin 2x$ ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ

$$\dots, -2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin 2x$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin 2x$ คือ $[-1, 1]$

คาบของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin 2x$ คือ π

และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \sin 2x$ คือ $\frac{1 - (-1)}{2} = 1$

□

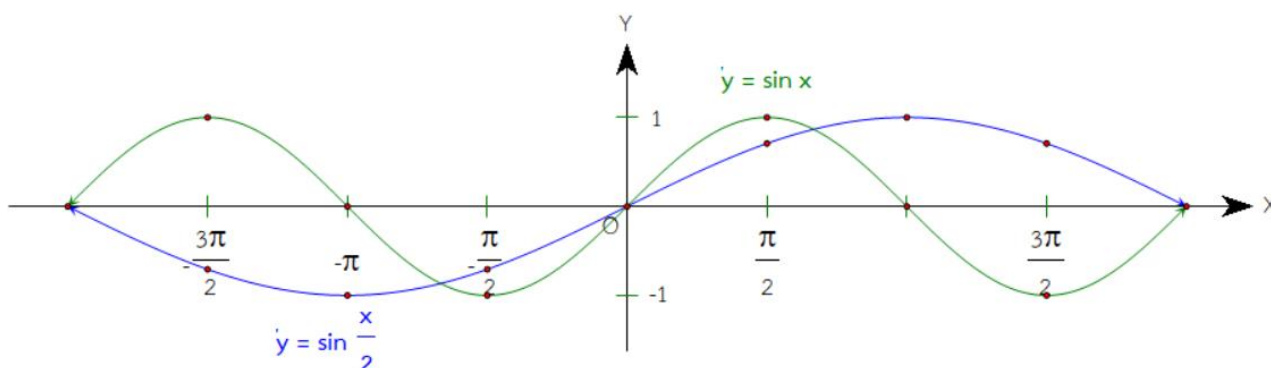
ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \sin \frac{x}{2}$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหา

จุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \sin \frac{x}{2}$

วิธีทำ กำหนดค่า x และ y จาก $y = \sin x$ และ $y = \sin \frac{x}{2}$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\sin \frac{x}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \sin \frac{x}{2}$ ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ

$$\dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin \frac{x}{2}$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin \frac{x}{2}$ คือ $[-1, 1]$

คาบของฟังก์ชันไซน์ $y = \sin \frac{x}{2}$ คือ 4π

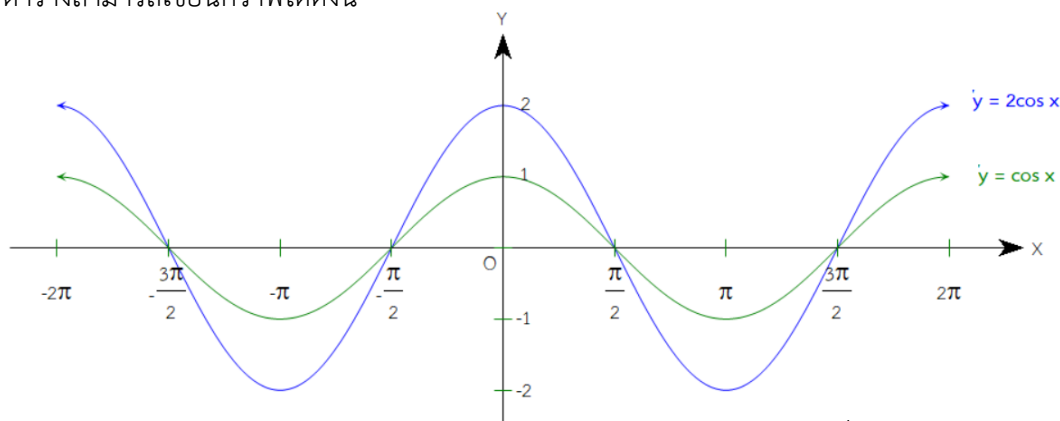
และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \sin \frac{x}{2}$ คือ $\frac{1-(-1)}{2} = 1$ □

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนกราฟของ $y = \cos x$ และ $y = 2\cos x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = 2\cos x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และ y จาก $y = \cos x$ และ $y = 2\sin x$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$2\cos x$	2	0	-2	0	1	0	-2	0	2

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \cos x$ และ $y = 2\cos x$ ตัดแกน X ที่จุดเดียวกัน คือ

ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ $y = 2\cos x$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ $y = 2\cos x$ คือ $[-2, 2]$

คาบของฟังก์ชันไซน์ $y = 2\cos x$ คือ 2π

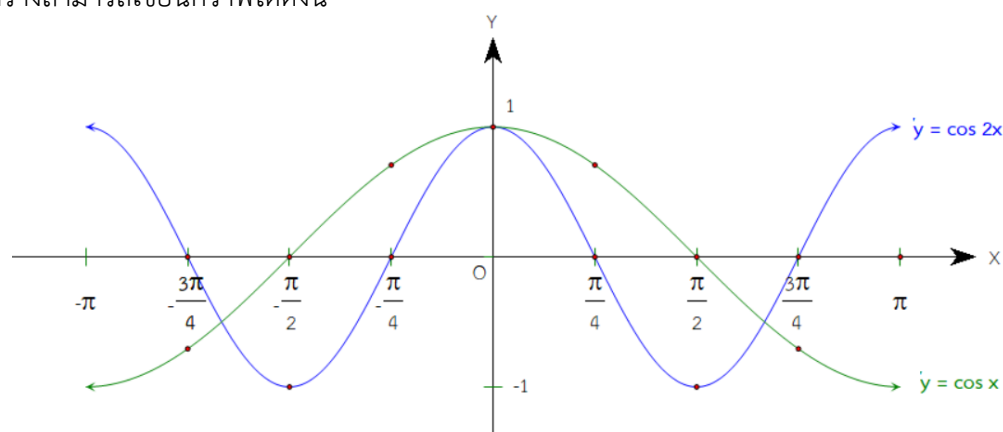
และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = 2\cos x$ คือ $\frac{2-(-2)}{2} = 2$ □

ตัวอย่างที่ 5 จงเขียนกราฟของ $y = \cos x$ และ $y = \cos 2x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \cos 2x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และ y จาก $y = \cos x$ และ $y = \cos 2x$ ได้ดังตาราง

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\cos 2x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \cos 2x$ ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ

$$\dots, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots$$

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ $y = \cos 2x$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ $y = \cos 2x$ คือ $[-1, 1]$

คาบของฟังก์ชันไซน์ $y = \cos 2x$ คือ π

และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \cos 2x$ คือ $\frac{1 - (-1)}{2} = 1$

□

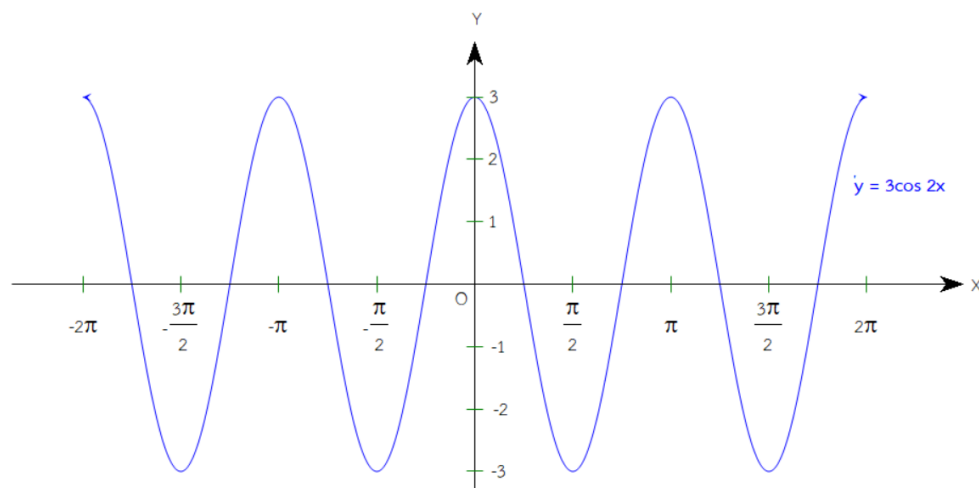
ในกรณีทั่วไป จะได้ว่า

ฟังก์ชัน	โดเมน	คาบ	แอมพลิจูด	เรนจ์
$y = \sin(nx), n > 0$	\mathbb{R}	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1, 1]$
$y = \cos(nx), n > 0$	\mathbb{R}	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1, 1]$
$y = a \sin(nx), n > 0$	\mathbb{R}	$\frac{2\pi}{n}$	$ a $	$[- a , a]$
$y = a \cos(nx), n > 0$	\mathbb{R}	$\frac{2\pi}{n}$	$ a $	$[- a , a]$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาคาบ แอมพลิจูด และเรนจ์ของฟังก์ชัน $y = 3\cos 2x$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จาก $y = 3\cos 2x$ จะได้ คาบ คือ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ แอมพลิจูด คือ 3 และ เรนจ์คือ $[-3, 3]$

เขียนกราฟของ $y = 3\cos 2x$ ได้ดังนี้



ก่อนเขียนกราฟของฟังก์ชันอื่น ๆ ให้พิจารณาโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ \mathbb{R}

โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ \mathbb{R}

โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ $\left\{x \mid x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

โดเมนของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ $\left\{x \mid x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

โดเมนของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ $\{x \mid x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

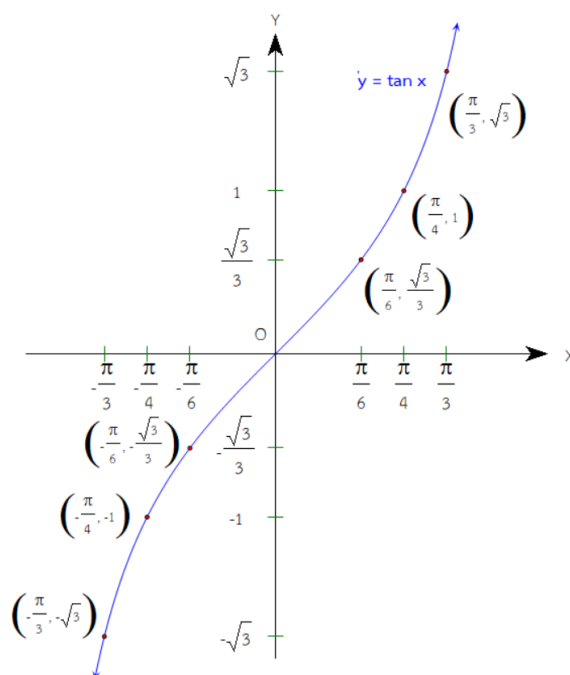
และ โดเมนของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ $\{x \mid x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

การเขียนกราฟของ $y = \tan x$ เขียนได้ ดังนี้

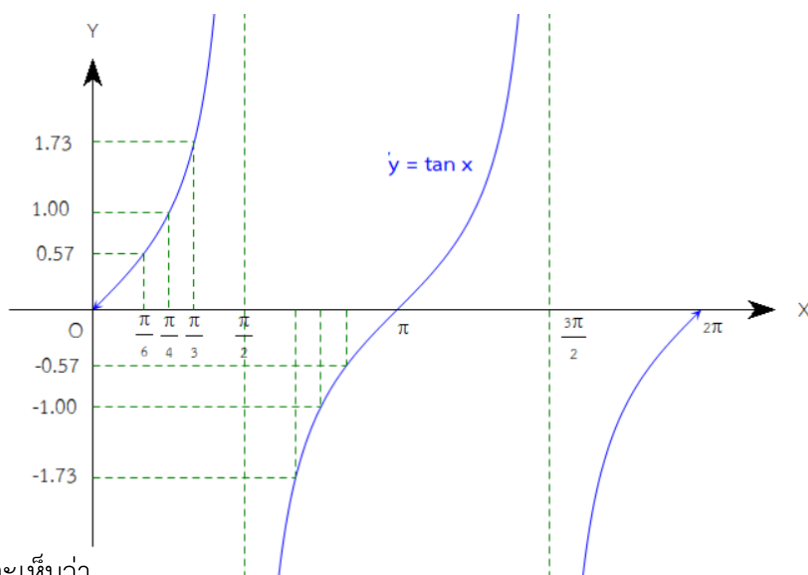
กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ได้ดังตาราง

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

จะได้ กราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ เป็นดังนี้



พิจารณารูปของ $y = \tan x$ เมื่อ $0 < x < 2\pi$



จากรูป จะเห็นว่า

เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0 และเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงบวก และเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{\pi}{2}$ แต่ $\tan x$ ไม่นิยามที่ $x = \frac{\pi}{2}$ เมื่อ x มีค่าลดลงจาก π

และเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงลบ และลดลงเรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหา

เส้นตรง $x = \frac{\pi}{2}$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจาก π และเข้าใกล้ $\frac{3\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริง

บวก และเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{3\pi}{2}$ แต่ $\tan x$ ไม่นิยามที่

$x = \frac{3\pi}{2}$

เมื่อ x มีค่าลดลงจาก 2π และเข้าใกล้ $\frac{3\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงลบ และลดลงเพิ่มขึ้น

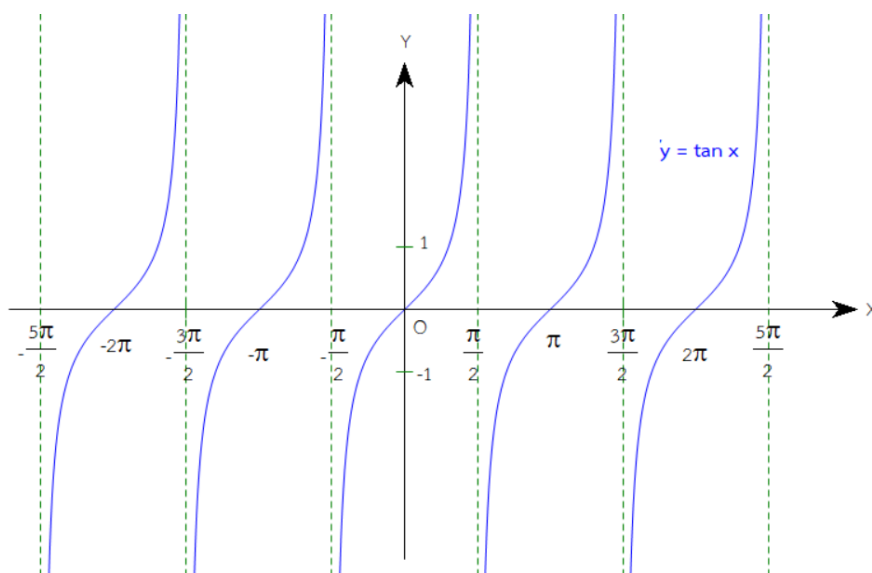
เรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น ในการเขียนกราฟดังกล่าว ถ้าลากเส้นประ $x = \frac{\pi}{2}$ และ $x = \frac{3\pi}{2}$ ก่อน จะช่วยให้เขียนกราฟได้ง่ายขึ้น แต่เส้นประดังกล่าวนี้มิได้เป็นส่วนหนึ่งของกราฟ

เนื่องจาก $\tan(n\pi + \theta) = \tan \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์จึงมี

ลักษณะซ้ำกันเป็นช่วง ๆ ดังนั้นฟังก์ชันแทนเจนต์จึงเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ

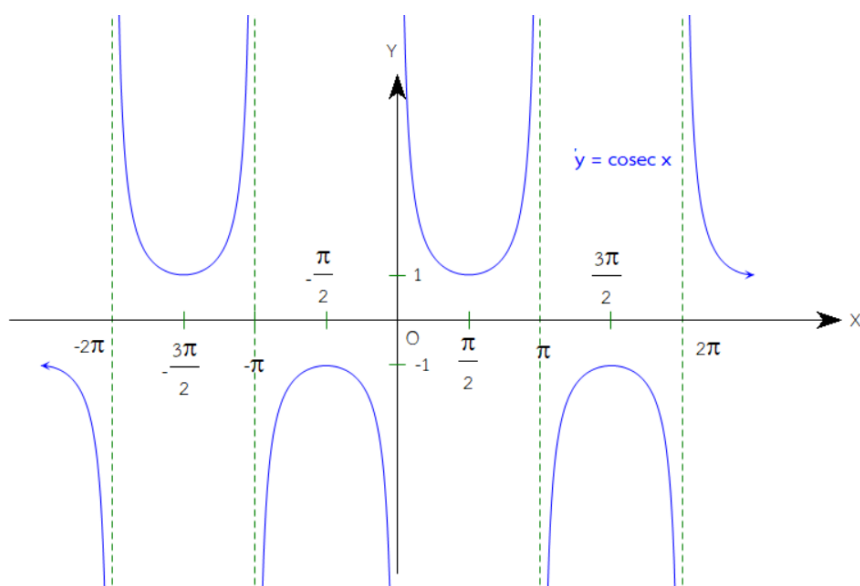
จะได้กราฟของ $y = \tan x$ เป็นดังนี้



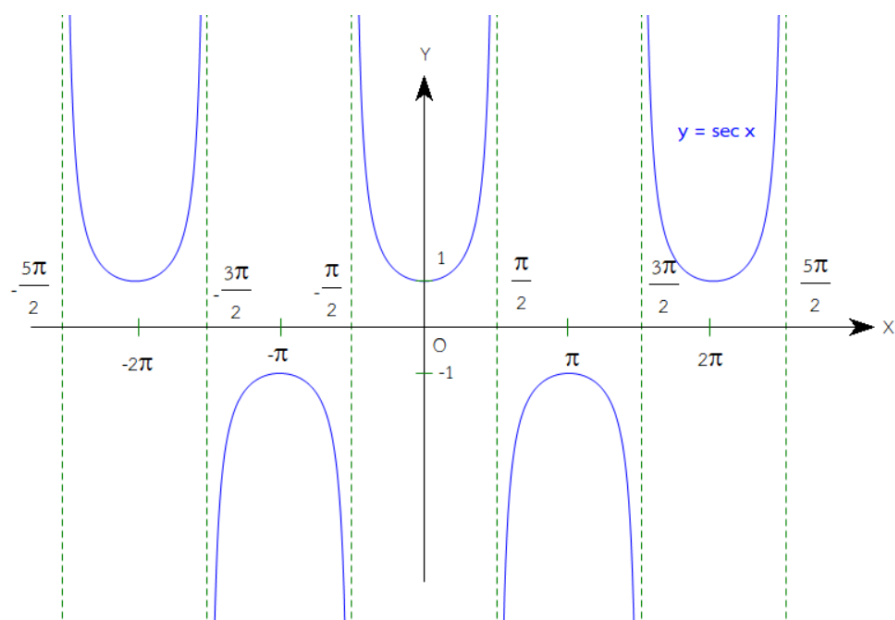
จากรูปจะเห็นว่า ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ π

เนื่องจากค่าของ ฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ที่ x เป็นส่วนกลับของ ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ที่ x ตามลำดับ จึงสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ได้ดังนี้

กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$ เป็นดังนี้

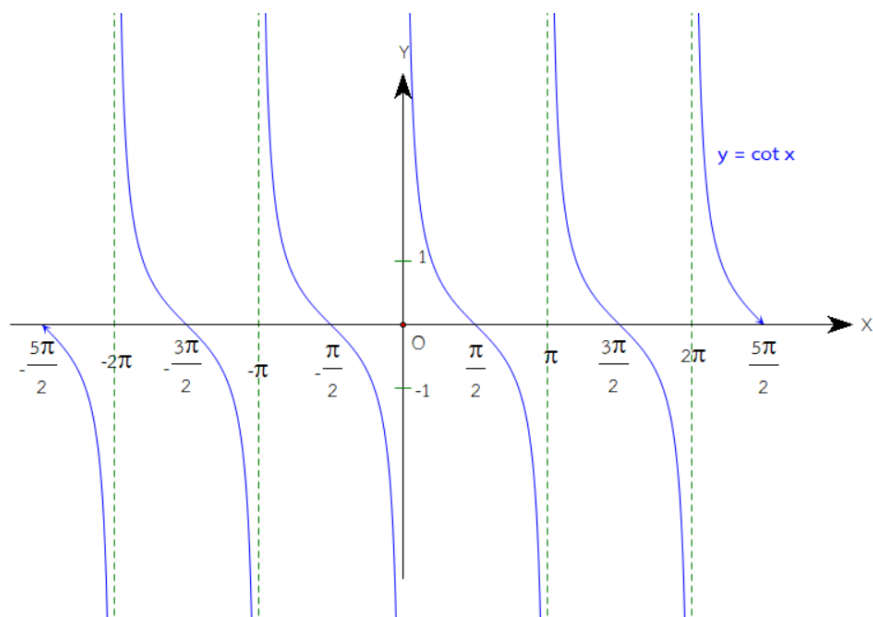


จะเห็นว่า ฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ 2π
 กราฟของ $y = \sec x$ เป็นดังนี้



จะเห็นว่า ฟังก์ชันเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ 2π

กราฟของ $y = \cot x$ เป็นดังนี้



จะเห็นว่า ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ π



ใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

- 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการทำใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. รับใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”
2. ให้นักเรียนจับฉลากหมายเลข กลุ่มที่ได้หมายเลข 1 ทำโจทย์ข้อ 1 กลุ่มที่ได้หมายเลข 2 ทำโจทย์ข้อ 2 ตามลำดับ ใช้เวลา 20 นาที
3. ให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้จากกลุ่มอื่น ๆ โดยส่งตัวแทนจดบันทึกวิธีทำข้อที่เหลือของกลุ่มอื่น ลงในใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”
4. นักเรียนแต่ละกลุ่มออกนำเสนอวิธีทำโจทย์ของกลุ่ม
5. นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ แสดงความคิดเห็นและตอบคำถามเพิ่มเติม

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที

ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....

ข้อที่ 1	โจทย์ จงร่างกราฟของ $\frac{1}{2}\sin 2x$ พร้อมทั้งบอกคาบและแอมพลิจูด
วิธีทำ	

ข้อที่ 2	โจทย์ จงร่างกราฟของ $\frac{1}{2}\cos 2x$ พร้อมทั้งบอกคาบและแอมพลิจูด
วิธีทำ	

ข้อที่ 3	โจทย์ จงร่างกราฟของ $\frac{1}{2}\sin(-2x)$ พร้อมทั้งบอกคาบและแอมพลิจูด
วิธีทำ	

ข้อที่ 4	โจทย์ จงร่างกราฟของ $-\frac{1}{2}\sin(-2x)$ พร้อมทั้งบอกคาบและแอมพลิจูด
วิธีทำ	

ข้อที่ 5	โจทย์ จงร่างกราฟของ $2\sin 2x + 1$ พร้อมทั้งบอกคาบและแอมพลิจูด
วิธีทำ	

ข้อที่ 6	โจทย์ จงร่างกราฟของ $2\cos 2x + 1$ พร้อมทั้งบอกคาบและแอมพลิจูด
วิธีทำ	

ข้อที่ 7	โจทย์ จงร่างกราฟของ $2\cos 2x - 1$ พร้อมทั้งบอกคาบและแอมพลิจูด
วิธีทำ	

ข้อที่ 8	โจทย์ จงร่างกราฟของ $2\sin 2x - 1$ พร้อมทั้งบอกคาบและแอมพลิจูด
วิธีทำ	

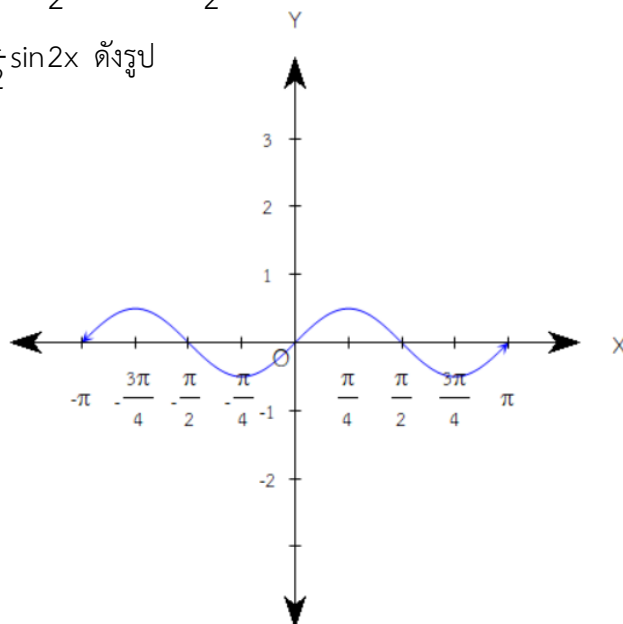
เฉลยใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

ข้อที่ 1

คาบของฟังก์ชัน $\frac{1}{2}\sin 2x$ คือ π

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน $\frac{1}{2}\sin 2x$ คือ $\frac{1}{2}$

ร่างกราฟฟังก์ชัน $\frac{1}{2}\sin 2x$ ดังรูป

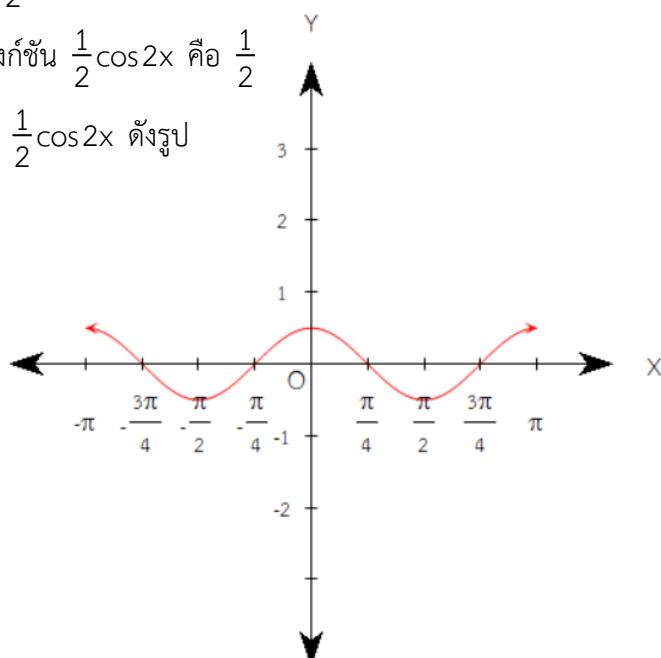


ข้อที่ 2

คาบของฟังก์ชัน $\frac{1}{2}\cos 2x$ คือ π

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน $\frac{1}{2}\cos 2x$ คือ $\frac{1}{2}$

ร่างกราฟฟังก์ชัน $\frac{1}{2}\cos 2x$ ดังรูป

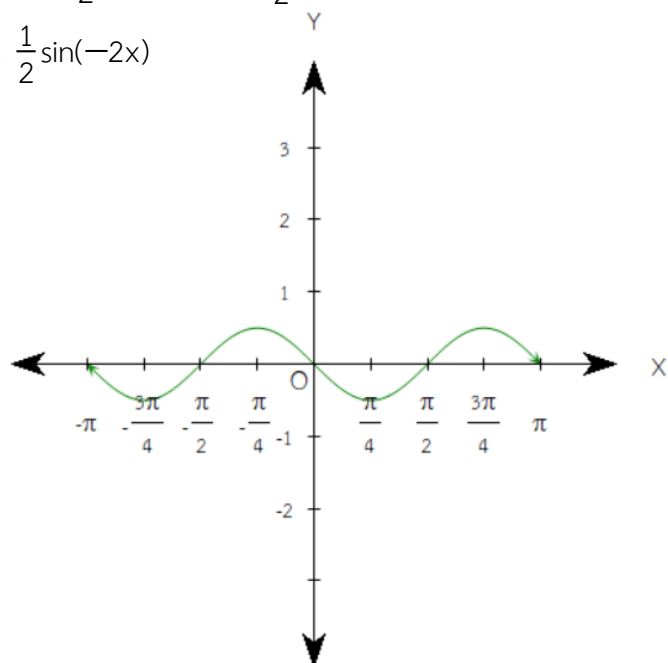


ข้อที่ 3

คาบของฟังก์ชัน $\frac{1}{2}\sin(-2x)$ คือ π

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน $\frac{1}{2}\sin(-2x)$ คือ $\frac{1}{2}$

ร่างกราฟฟังก์ชัน $\frac{1}{2}\sin(-2x)$

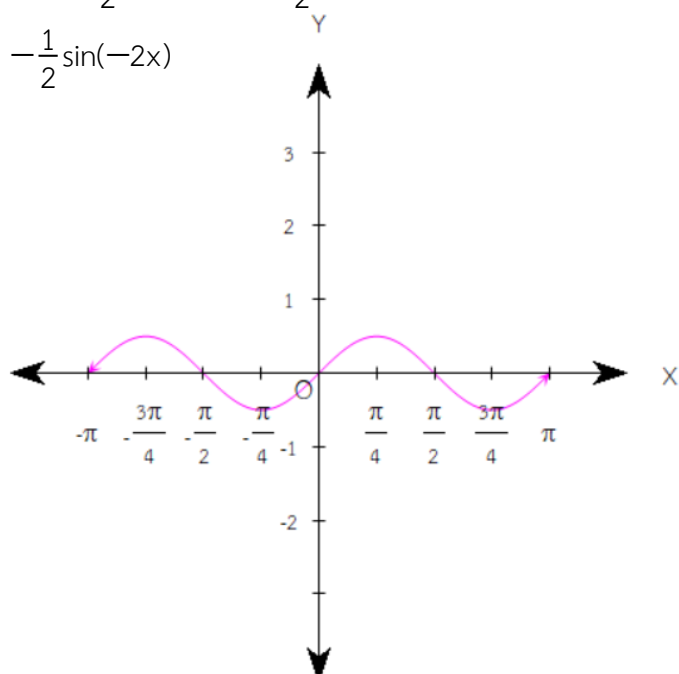


ข้อที่ 4

คาบของฟังก์ชัน $-\frac{1}{2}\sin(-2x)$ คือ π

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน $-\frac{1}{2}\sin(-2x)$ คือ $\frac{1}{2}$

ร่างกราฟฟังก์ชัน $-\frac{1}{2}\sin(-2x)$

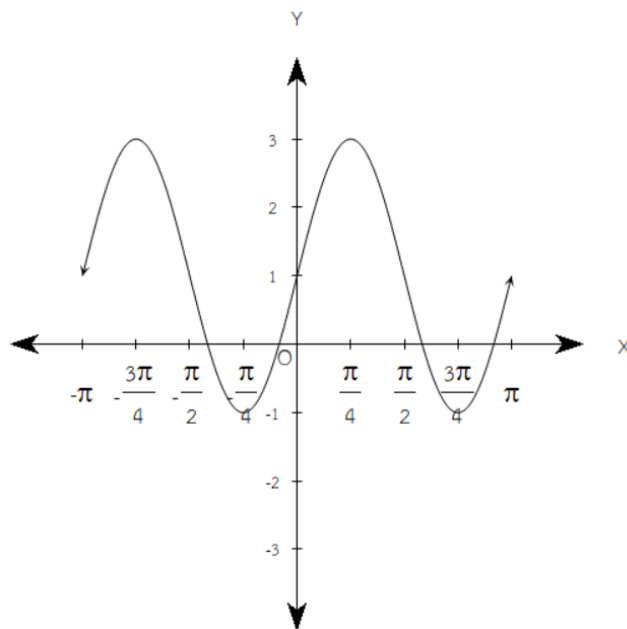


ข้อที่ 5

คาบของฟังก์ชัน $2\sin 2x + 1$ คือ π

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน $2\sin 2x + 1$ คือ 2

ร่างกราฟฟังก์ชัน $2\sin 2x + 1$

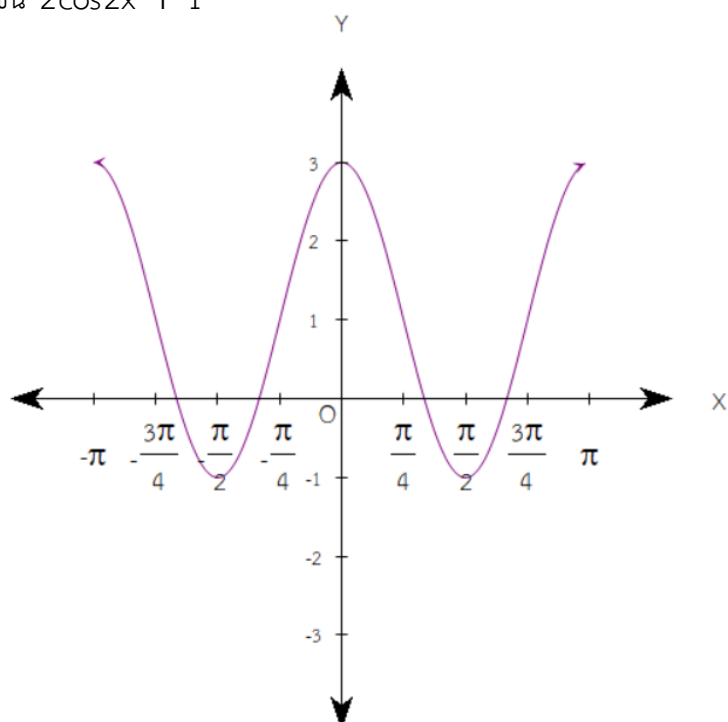


ข้อที่ 6

คาบของฟังก์ชัน $2\cos 2x + 1$ คือ π

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน $2\cos 2x + 1$ คือ 2

ร่างกราฟฟังก์ชัน $2\cos 2x + 1$

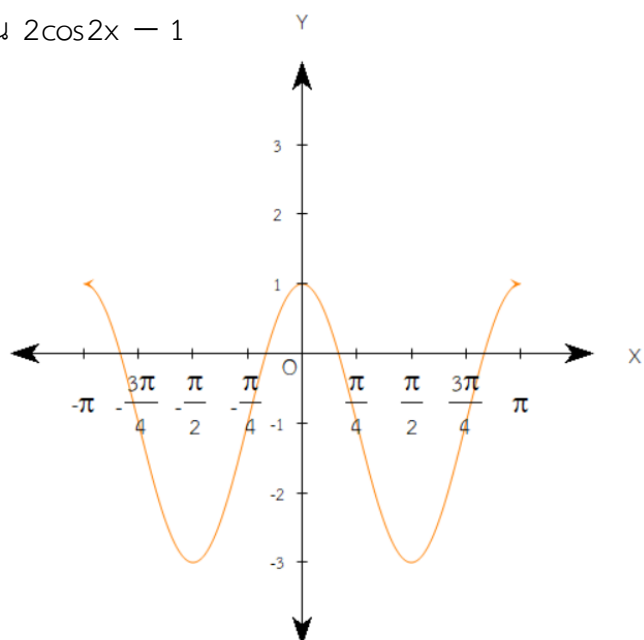


ข้อที่ 7

คาบของฟังก์ชัน $2\cos 2x - 1$ คือ π

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน $2\cos 2x - 1$ คือ 2

ร่างกราฟฟังก์ชัน $2\cos 2x - 1$

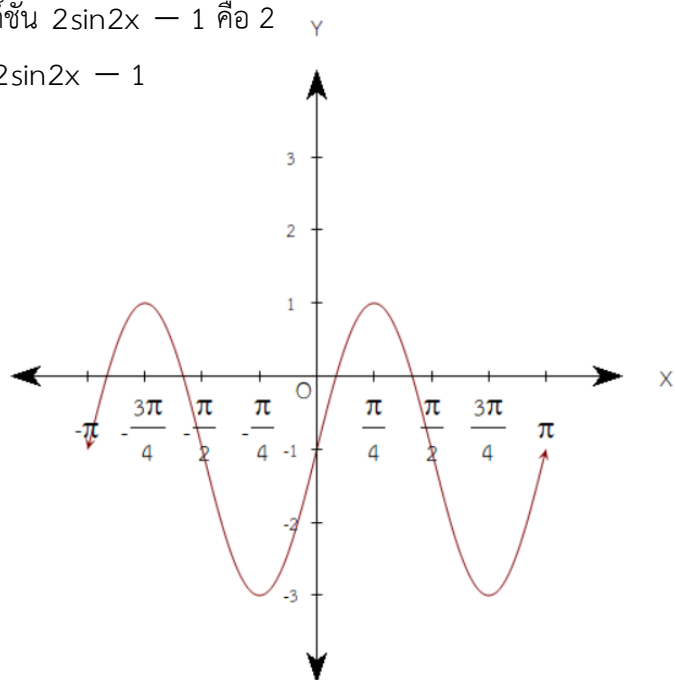


ข้อที่ 8

คาบของฟังก์ชัน $2\sin 2x - 1$ คือ π

แอมพลิจูดของฟังก์ชัน $2\sin 2x - 1$ คือ 2

ร่างกราฟฟังก์ชัน $2\sin 2x - 1$





แบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- 1) เขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
- 2) หาคาบ แอมพิจูด เรนจ์จากกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

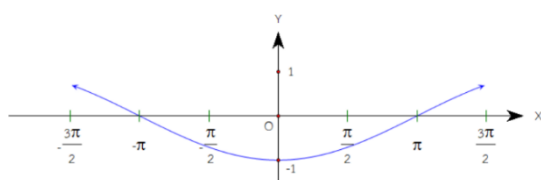
- 1) ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
- 2) ใช้การให้เหตุผลในการจับคู่กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

1. จงหาคาบ แอมพิจูด และเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

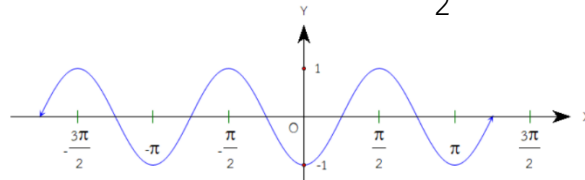
- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $y = \frac{1}{2} \cos x$ | 2) $y = 4 \sin x$ | 3) $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ |
| 4) $y = -3 \cos 3x$ | 5) $y = -2 \cos \frac{x}{2}$ | 6) $y = 4 \cos 2x$ |

2. จงจับคู่ฟังก์ชันกับกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

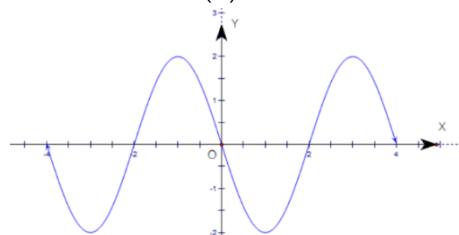
- | | | |
|--|----------------------------------|--|
| 1) $y = -3 \cos 2x$ | 2) $y = -3 \sin 2x$ | 3) $y = -\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$ |
| 4) $y = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$ | 5) $y = -2 \sin \frac{\pi}{2} x$ | 6) $y = 2 \cos \frac{\pi}{2} x$ |
| 7) $y = -\cos 2x$ | 8) $y = -\sin 2x$ | 9) $y = -\cos \frac{x}{2}$ |



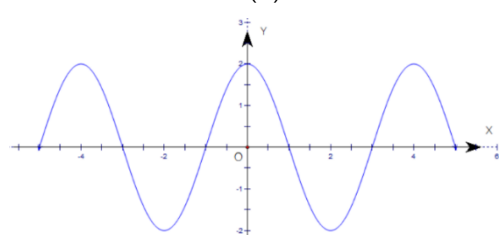
(A)



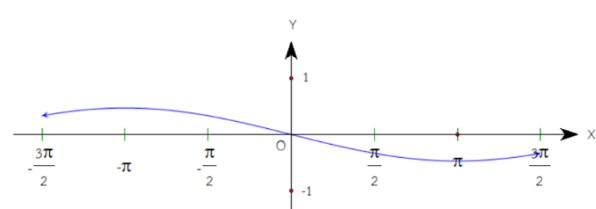
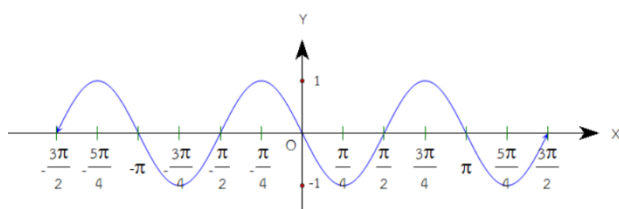
(B)



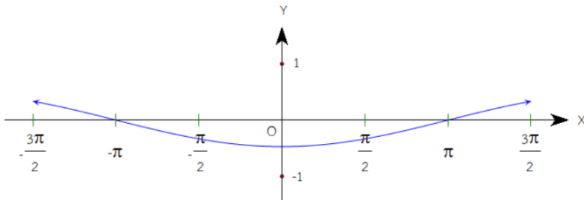
(C)



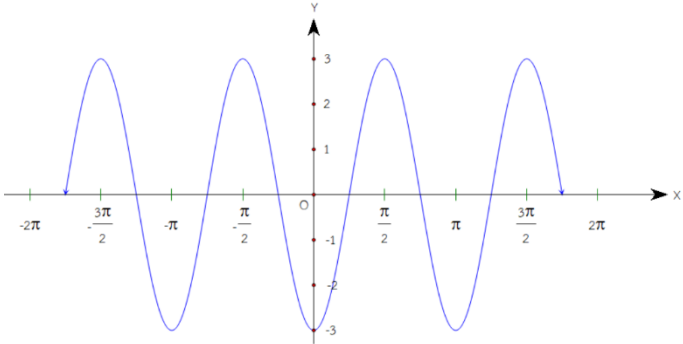
(D)



(E)

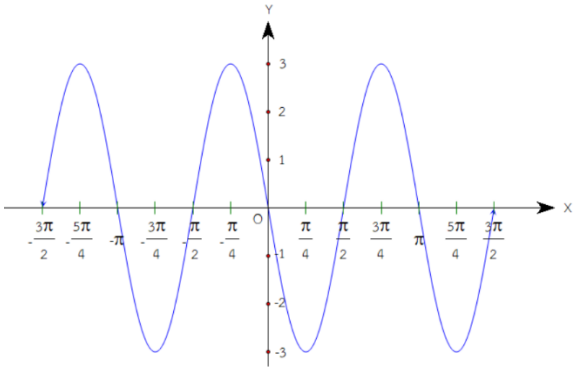


(F)



(G)

(H)



(I)

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

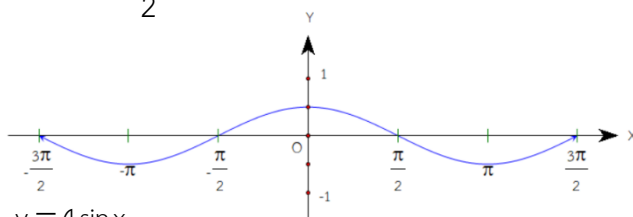
1. 1) จาก $y = \frac{1}{2} \cos x$

จะได้คาบ คือ 2π

แอมพลิจูด คือ $\frac{1}{2}$

และเรนจ์ คือ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

เขียนกราฟ $y = \frac{1}{2} \cos x$ ได้ดังนี้



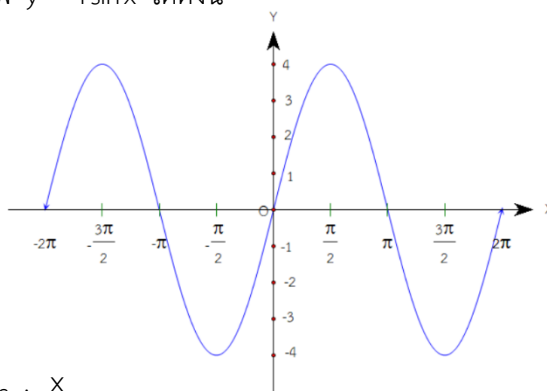
2) จาก $y = 4 \sin x$

จะได้คาบ คือ 2π

แอมพลิจูด คือ 4

และเรนจ์ คือ $[-4, 4]$

เขียนกราฟ $y = 4 \sin x$ ได้ดังนี้



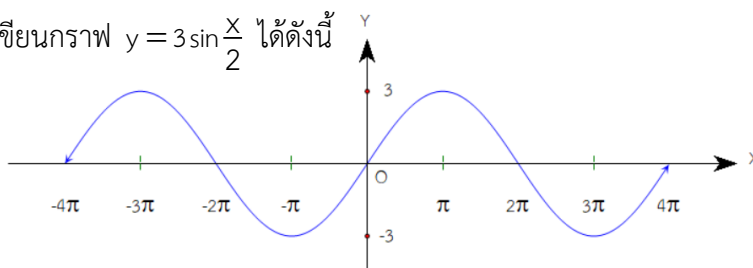
3) จาก $y = 3 \sin \frac{x}{2}$

จะได้คาบ คือ 4π

แอมพลิจูด คือ 3

และเรนจ์ คือ $[-3, 3]$

เขียนกราฟ $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ ได้ดังนี้



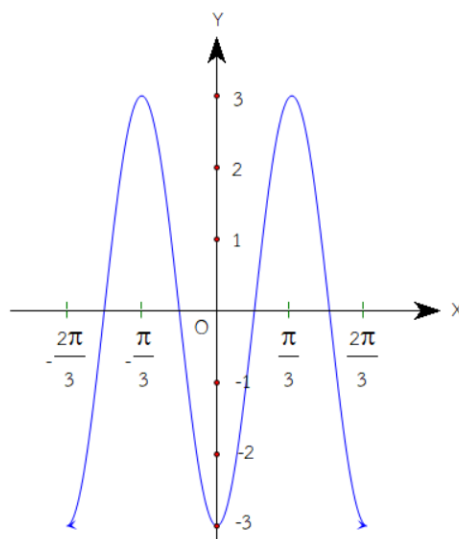
4) จาก $y = -3\cos 3x$

จะได้คาบ คือ $\frac{2\pi}{3}$

แอมพลิจูด คือ 3

และเรนจ์ คือ $[-3, 3]$

เขียนกราฟ $y = -3\cos 3x$ ได้ดังนี้



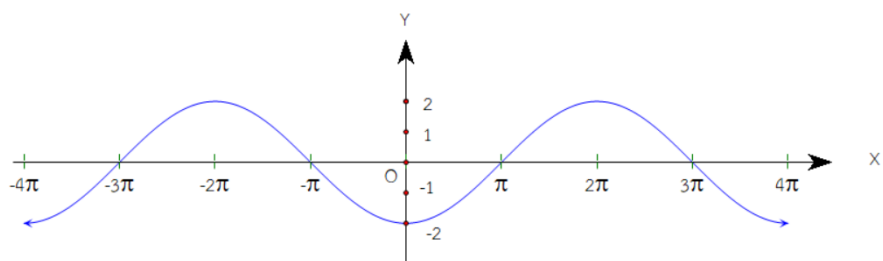
5) จาก $y = -2\cos \frac{x}{2}$

จะได้คาบ คือ 4π

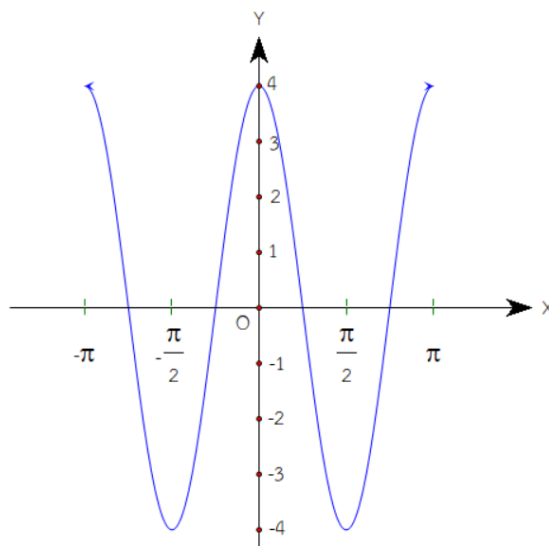
แอมพลิจูด คือ 2

และเรนจ์ คือ $[-2, 2]$

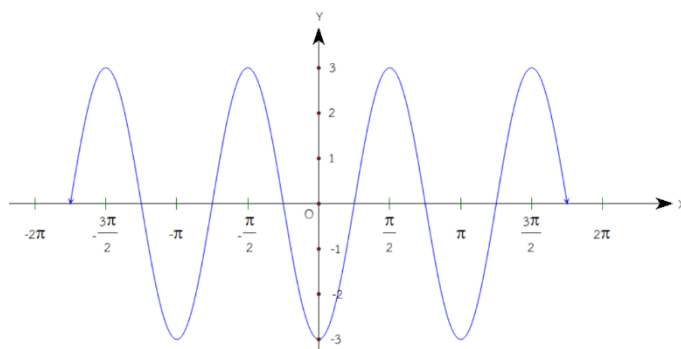
เขียนกราฟ $y = -2\cos \frac{x}{2}$ ได้ดังนี้



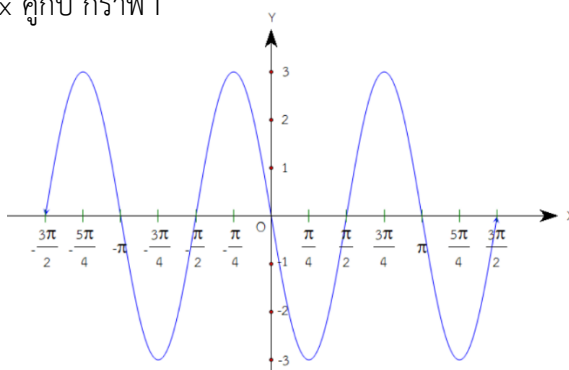
- 6) จาก $y = 4\cos 2x$
 จะได้คาบ คือ π
 แอมพลิจูด คือ 4
 และเรนจ์ คือ $[-4, 4]$
 เขียนกราฟ $y = 4\cos 2x$ ได้ดังนี้



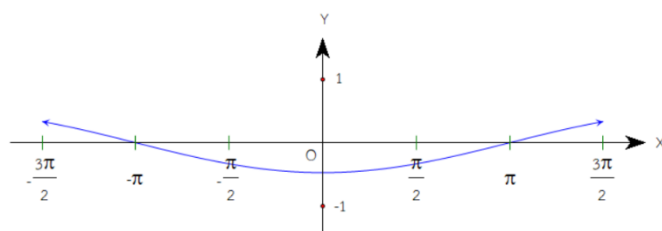
2. 1) $y = -3\cos 2x$ คู่กับ กราฟ H



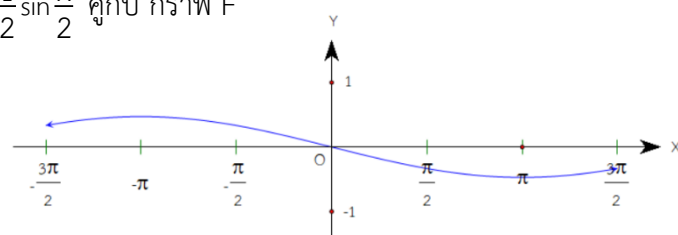
- 2) $y = -3\sin 2x$ คู่กับ กราฟ I



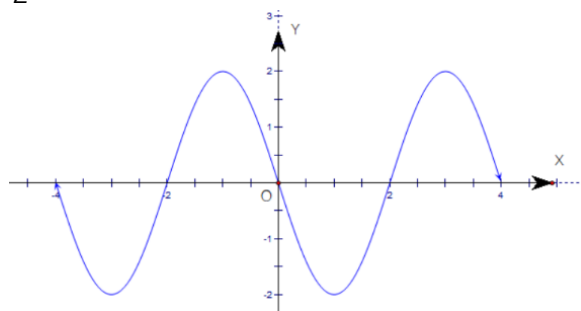
3) $y = -\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$ คู่กับ กราฟ G



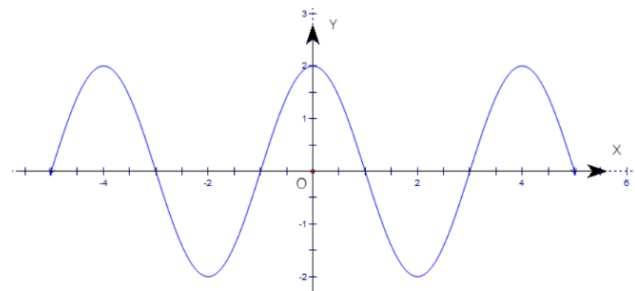
4) $y = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$ คู่กับ กราฟ F



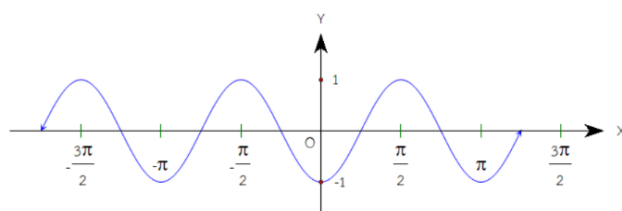
5) $y = -2 \sin \frac{\pi}{2} x$ คู่กับ กราฟ C



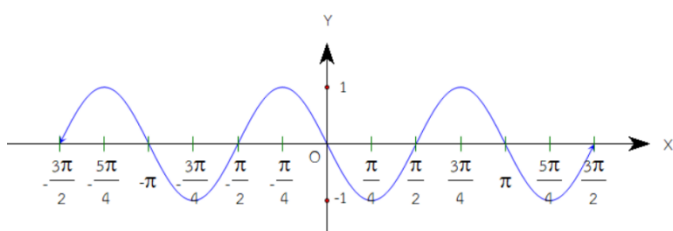
6) $y = 2 \cos \frac{\pi}{2} x$ คู่กับ กราฟ D



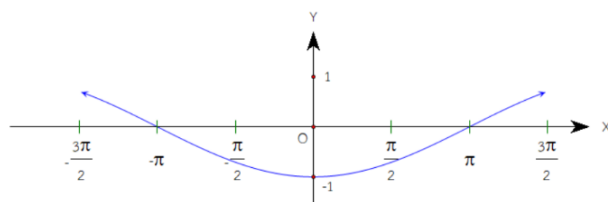
7) $y = -\cos 2x$ คู่กับ กราฟ B



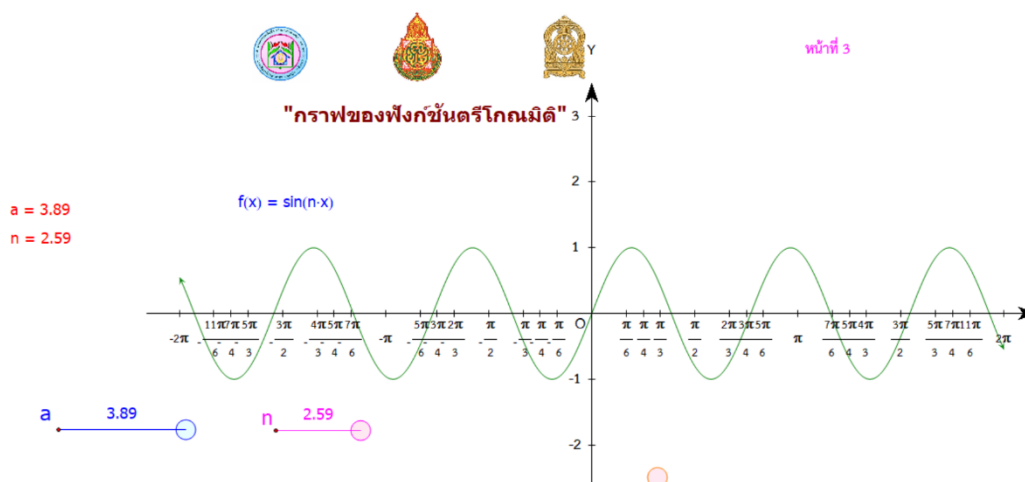
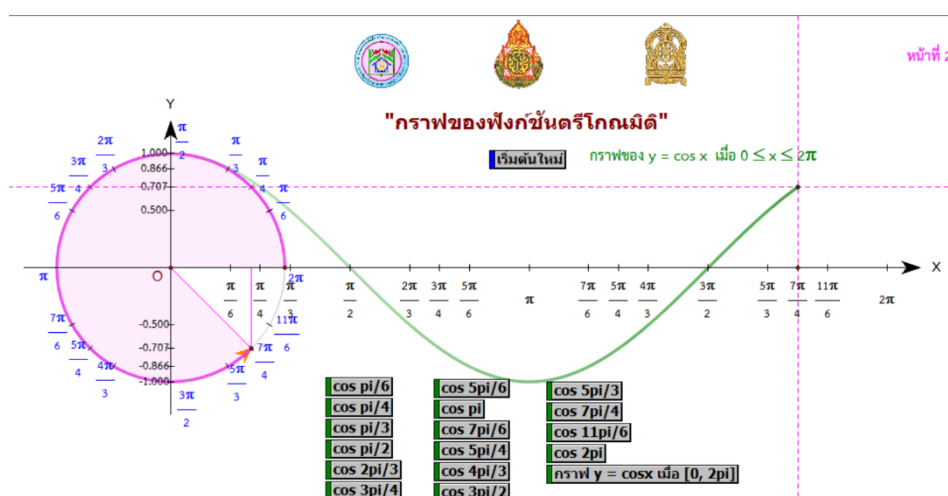
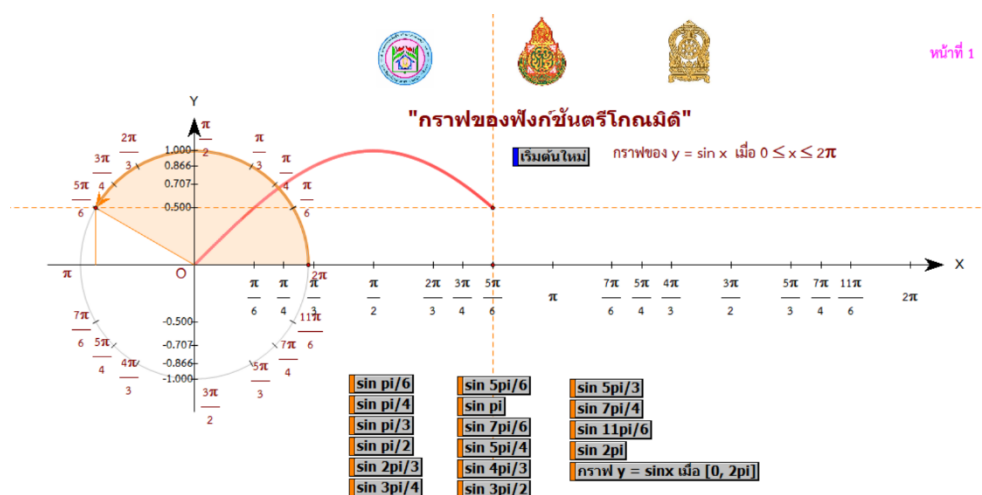
8) $y = -\sin 2x$ คู่กับ กราฟ E



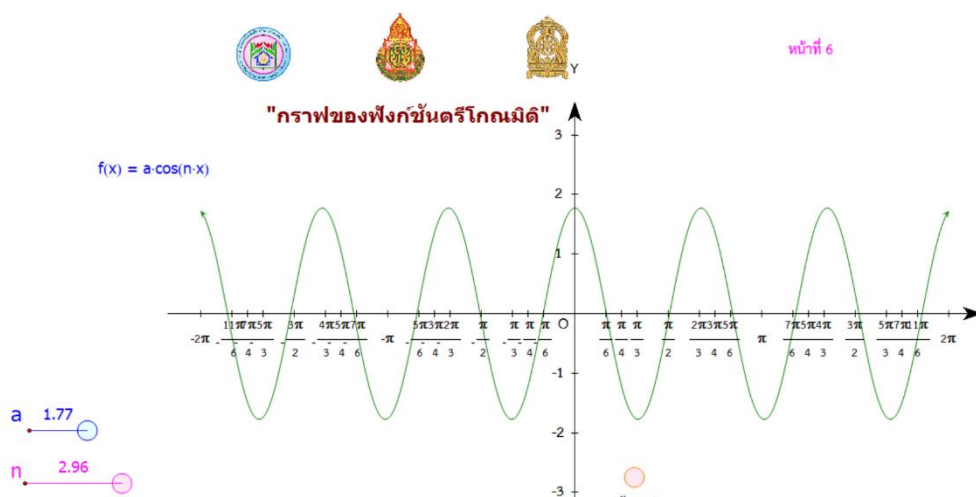
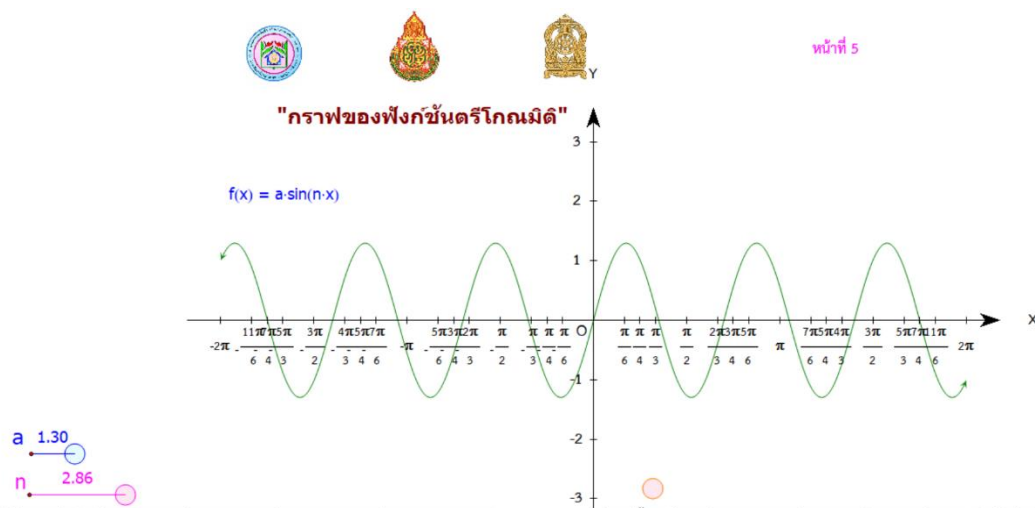
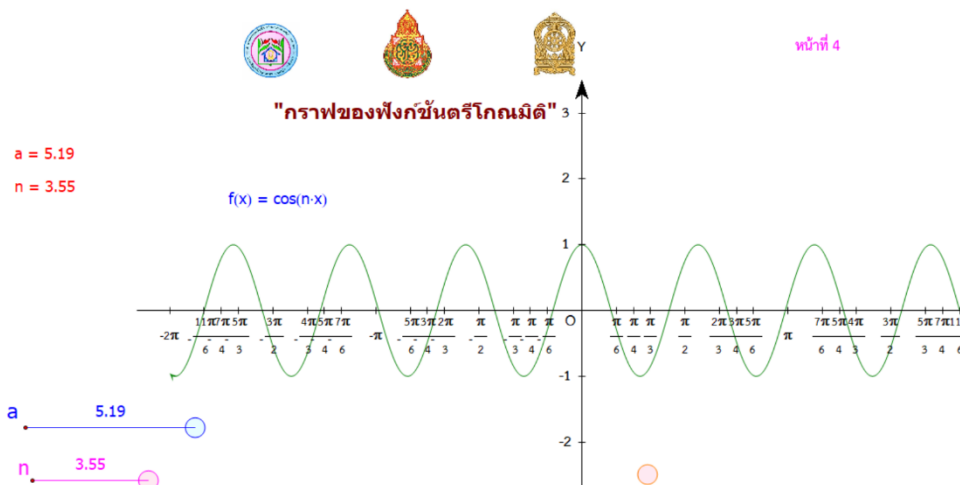
9) $y = -\cos \frac{x}{2}$ คู่กับ กราฟ A



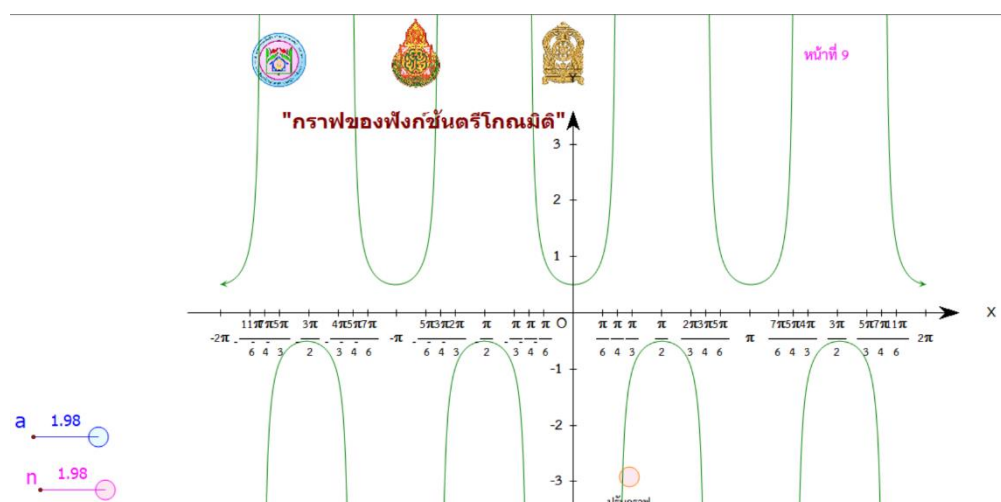
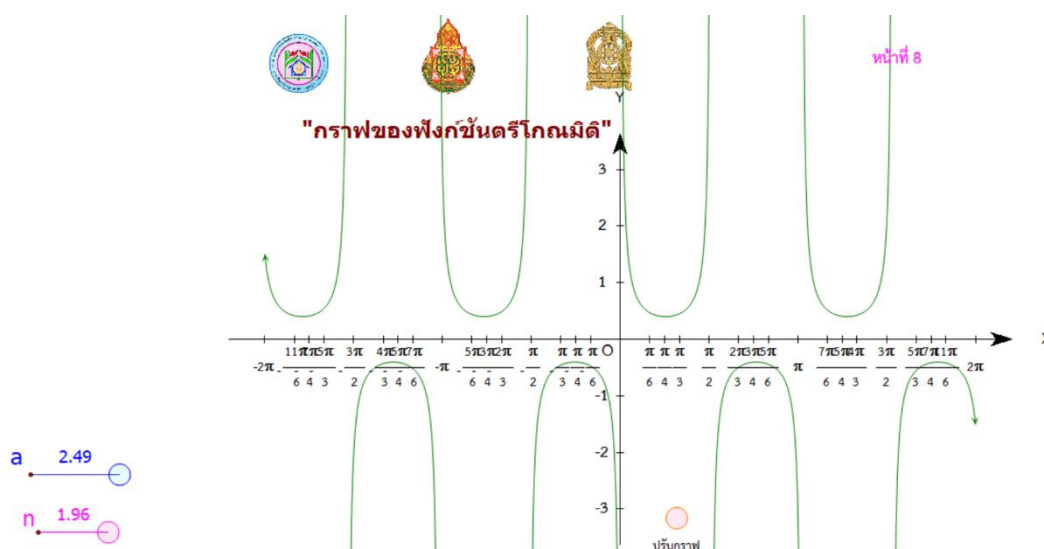
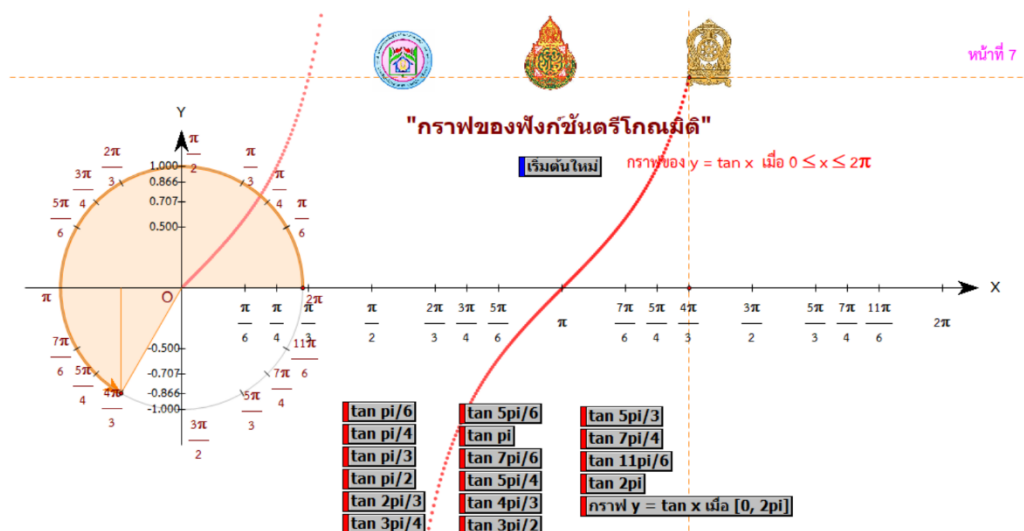
สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” หน้า 1 – 3



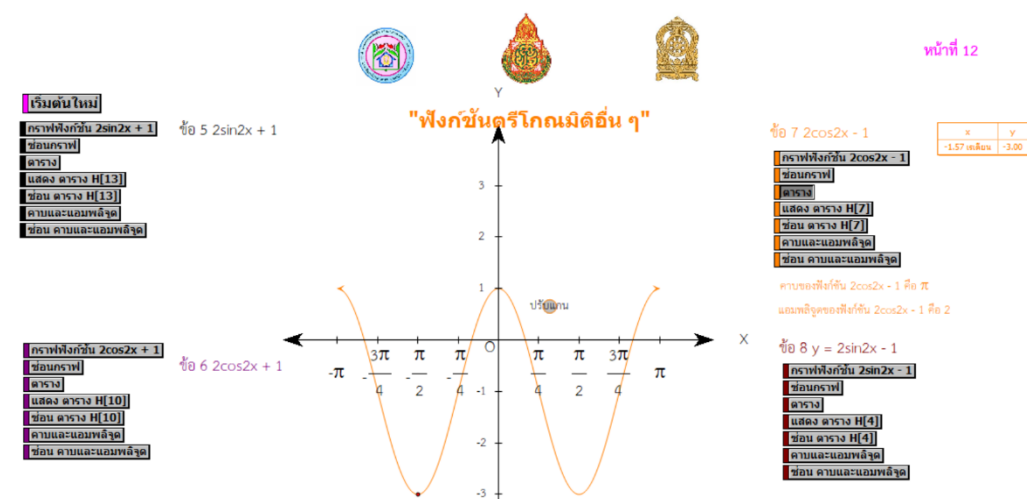
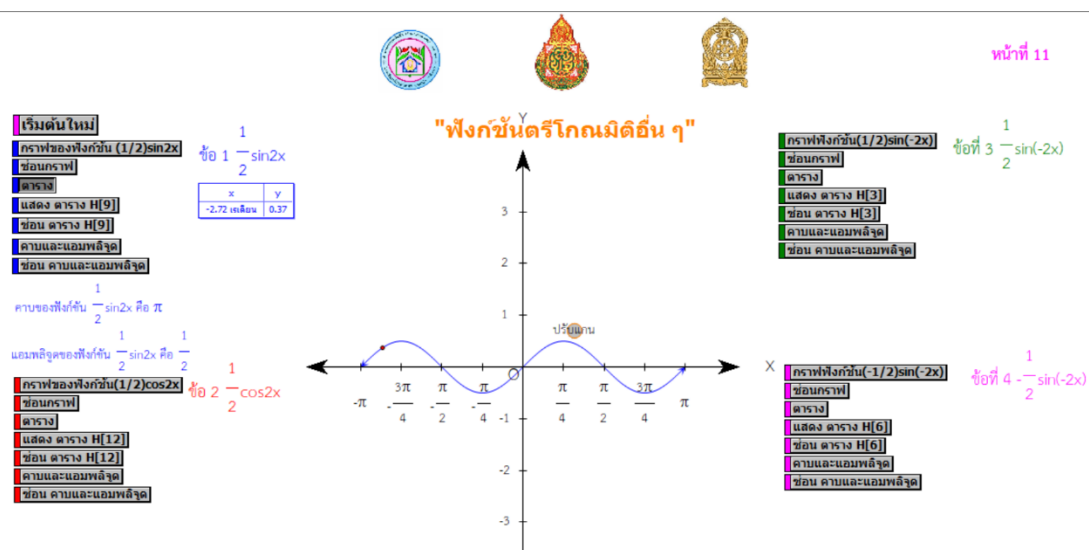
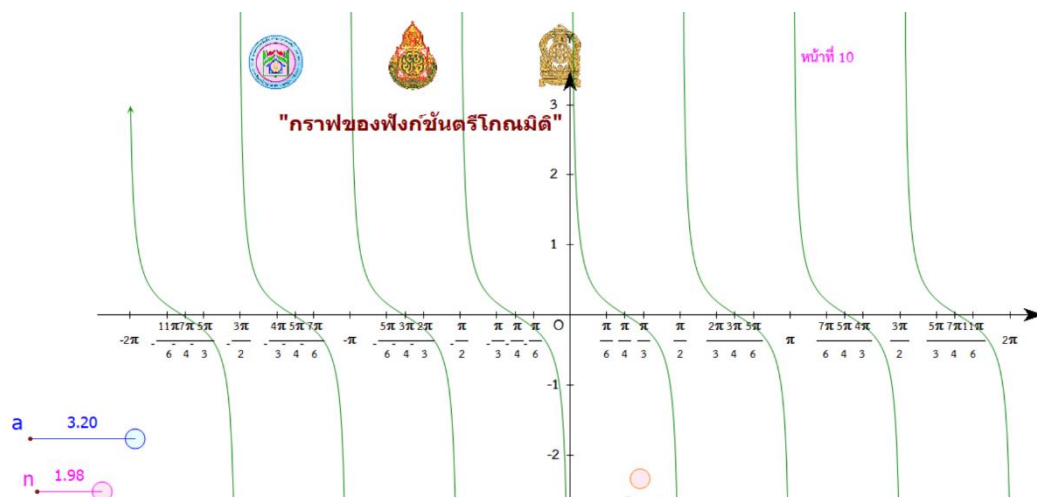
สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” หน้า 4 – 6



สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” หน้า 7 – 9



สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” หน้า 10 – 12



เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) เขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 6 (การเขียนกราฟ) “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 6 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 6 (การเขียนกราฟ) “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 4 - 5 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 6 (การเขียนกราฟ) “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 6 (การเขียนกราฟ) “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 แต่ไม่ถูกต้อง สมบูรณ์
2) หาคาบ แอมพิจูด เรนจ์จากกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 6 (การหาคาบ แอมพิจูด) “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 6 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 6 (การหาคาบ แอมพิจูด) “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 4 - 5 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 6 (การหาคาบ แอมพิจูด) “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 6 (การหาคาบ แอมพิจูด) “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 แต่ไม่ถูกต้อง สมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้	สามารถนำเสนอกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 ข้อ	สามารถนำเสนอกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 5 ข้อ	สามารถนำเสนอกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการนำเสนอกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ข้อ 1 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การให้เหตุผลในการจับคู่กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติกับฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้	สามารถใช้เหตุผลจับคู่กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 6 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 2 ได้ อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 9 ข้อ	สามารถใช้เหตุผลจับคู่กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 6 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 2 ได้ อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถใช้เหตุผลจับคู่กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 6 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 2 ได้ อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการใช้เหตุผลจับคู่กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 6 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 2 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1. ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้	ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นบางส่วนและปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้เป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่และปฏิบัติตามข้อตกลงที่กำหนดให้ร่วมกัน เป็นบางครั้งและต้องอาศัยการแนะนำหรือตักเตือน	ไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”
2. มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อย โดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อย บางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน	แต่งกายไม่เรียบร้อยหรือไม่แก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน
3. ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรงเวลา	การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที
4. มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ครบทุกข้อและถูกต้อง เป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ครบทุกข้อและถูกต้อง เป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ไม่ครบทุกข้อหรือครบทุกข้อแต่ไม่ถูกต้องหรือไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 6 “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ”

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1. ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการทำใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามแสดงวิธีทำในใบงาน “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2. ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	ไม่มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน ไม่แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มหรือช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม
3. ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ได้	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหาทุกครั้ง	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นส่วนใหญ่	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นบางครั้ง	ไม่ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ” ทบทวนและสรุปเนื้อหา

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลงผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน
พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ :
บริษัท ธนัชการพิมพ์ จำกัด.
- พิชิต ฤทธิจรูญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : แฮสออฟ
เคอร์มิสท์.
- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็น
สำคัญ**. พระนครศรีอยุธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัย
เทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.
- ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฏานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-
NET คณิตศาสตร์ ม.6**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์**.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตาม
หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ:
โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**. พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย.
- สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 5. กทม. : ประสานการพิมพ์.
- อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรง
พิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.