



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระการเรียนรู้ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ภาคเรียนที่ 1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เวลา 2 ชั่วโมง

#### 1. ผลการเรียนรู้

เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

#### 2. สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

#### 3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

สำหรับจำนวนจริง  $\theta$  ใด ๆ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

#### 4. จุดประสงค์การเรียนรู้

##### 4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงใด ๆ ได้

##### 4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้

4.2.2 ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอ การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้

### 4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

- 4.3.1 ชื่อสัตย์สุจริต
- 4.3.2 มีวินัย
- 4.3.3 ใฝ่เรียนรู้
- 4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

### 4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญ of นักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

- 4.4.1 ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้
- 4.4.2 ใช้การคิดในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้
- 4.4.3 ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้ได้
- 4.4.4 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้
- 4.4.5 ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้

## 5. เนื้อหา/สาระ

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังที่กล่าวมาแล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent function) เขียนแทนด้วย  $\tan$  (อ่านว่า แทน)

ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant function) เขียนแทนด้วย  $\sec$  (อ่านว่า เซก)

ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant function) เขียนแทนด้วย  $\operatorname{cosec}$  หรือ  $\operatorname{csc}$  (อ่านว่า โคเซก)

ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent function) เขียนแทนด้วย  $\cot$  (อ่านว่า คอต)

นิยามค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านี้ โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนี้

สำหรับจำนวนจริง  $\theta$  ใด ๆ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

จากนิยามจะได้ว่า

1. โดเมนของฟังก์ชัน  $\tan$  และ  $\sec$  คือ  $\mathbb{R} - \left\{ x \mid x = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$
2. โดเมนของฟังก์ชัน  $\cot$  และ  $\operatorname{cosec}$  คือ  $\mathbb{R} - \{ x \mid x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$
3. เรนจ์ของฟังก์ชัน  $\tan$  และ  $\cot$  คือ  $\mathbb{R}$
4. เรนจ์ของฟังก์ชัน  $\sec$  และ  $\operatorname{cosec}$  คือ  $\mathbb{R} - \{ x \mid -1 < x < 1 \}$

นอกจากนี้สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$\begin{aligned} \cot \theta &= \frac{1}{\tan \theta} && \text{เมื่อ } \tan \theta \neq 0 \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta && \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0 \\ 1 + \cot^2 \theta &= \operatorname{cosec}^2 \theta && \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0 \end{aligned}$$

ความสัมพันธ์เหล่านี้อาจพิสูจน์ได้ดังนี้

- 1) จงแสดงว่า  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$  เมื่อ  $\tan \theta \neq 0$

$$\begin{aligned} \cot \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{1}{\tan \theta} && \text{เมื่อ } \tan \theta \neq 0 \end{aligned}$$

□

- 2) จงแสดงว่า  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$  เมื่อ  $\cos \theta \neq 0$

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \theta &= 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} && ; \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ &= \sec^2 \theta && \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0 \end{aligned}$$

□

3) จงแสดงว่า  $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$  เมื่อ  $\sin \theta \neq 0$

$$\begin{aligned}
 1 + \cot^2 \theta &= 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
 &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad ; \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\
 &= \operatorname{cosec}^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ข้างต้นสามารถหาได้จากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\frac{\pi}{6}$

**วิธีทำ** เนื่องจาก  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  และ  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้  $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \square$

$$\cot \frac{\pi}{6} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \quad \square$$

$$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \square$$

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times 2 = 2 \quad \square$$

ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง  $\theta$  บางจำนวน เมื่อ  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\operatorname{cosec} \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
0	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ  $\cot \frac{\pi}{2}$  และ  $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ  $\cot \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$  □

$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$  □

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ  $\cot(-\pi)$  และ  $\operatorname{cosec}(-\pi)$

$\cot(-\pi) = \frac{\cos(-\pi)}{\sin(-\pi)} = \frac{-1}{0}$  ไม่นิยาม □

เนื่องจาก  $\cot \theta$  ไม่นิยาม เมื่อ  $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{cosec}(-\pi) = \frac{1}{\sin(-\pi)} = \frac{1}{0}$  ไม่นิยาม □

เนื่องจาก  $\operatorname{cosec} \theta$  ไม่นิยาม เมื่อ  $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า  $\tan \frac{5\pi}{6}$  และ  $\sec\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

วิธีทำ  $\tan \frac{5\pi}{6} = \frac{\sin \frac{5\pi}{6}}{\cos \frac{5\pi}{6}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sec\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่า  $\frac{\sin \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4}}{9 \tan \frac{\pi}{6} \cot \frac{5\pi}{6}}$

วิธีทำ หาค่า  $\sin \frac{5\pi}{3} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \frac{17\pi}{4} = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{5\pi}{6} = \frac{\cos \frac{5\pi}{6}}{\sin \frac{5\pi}{6}} = \frac{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{-\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{แทนค่า จะได้} \quad \frac{\sin \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4}}{9 \tan \frac{\pi}{6} \cot \frac{5\pi}{6}} &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{9 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) (-\sqrt{3})} \\
 &= \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}}{-9} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{18} - \frac{\sqrt{2}}{18} \quad \square
 \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 6** กำหนดให้  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  จงหา  $\cot \theta + \sec \theta$

**วิธีทำ** เนื่องจาก  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

จะได้  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

จาก  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  จะได้  $\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

เนื่องจาก  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\theta$  หน่วย

เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะอยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้  $\cos \theta = \frac{4}{5}$

ดังนั้น  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  และ  $\cos \theta = \frac{4}{5}$

$$\begin{aligned}
 \text{หาค่า} \quad \cot \theta + \sec \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \\
 &= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} + \frac{1}{\frac{4}{5}} \\
 &= \frac{4}{3} + \frac{5}{4} \\
 &= \frac{16}{12} + \frac{15}{12} \\
 &= \frac{31}{12} \quad \square
 \end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 7** จงแสดงว่า  $\tan(n\pi + \theta) = \tan \theta$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

**วิธีทำ** กรณีที่ 1 เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคู่

เขียน  $n = 2k$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } \tan(n\pi + \theta) &= \tan(2k\pi + \theta) \\
 &= \frac{\sin(2k\pi + \theta)}{\cos(2k\pi + \theta)} \\
 &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta
 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2

เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคี่เขียน  $n = 2k + 1$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } \tan(n\pi + \theta) &= \tan((2k + 1)\pi + \theta) \\
 &= \tan(2k\pi + \pi + \theta) \\
 &= \frac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} \\
 &= \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta \quad \square
 \end{aligned}$$

## 6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
<b>ด้านความรู้</b> 1) หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงใด ๆ ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อ 1	- แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อ 1 - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน ความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อ 1 ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
<b>ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์</b> 1) ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อ 2 - ข้อ 4	- แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อ 2 - ข้อ 4 - แบบบันทึกประเมิน ทักษะและ กระบวนการทาง คณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การ แก้ปัญหาในการค่า ของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติของ จำนวนจริงใด ๆ ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป



จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อ 5	- แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อ 5 - แบบบันทึกประเมินทักษะและ กระบวนการทาง คณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
<b>ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> 1) ซื่อสัตย์สุจริต	ตรวจการทำ แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ”	- แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ” - แบบบันทึกประเมินผลด้าน คุณลักษณะที่พึง ประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ใน ระดับดีขึ้นไป
2) มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึก การแต่งกาย - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน คุณลักษณะที่พึง ประสงค์	นักเรียนมีวินัย อยู่ใน ระดับดีขึ้นไป
3) ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึก การเข้าเรียน - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน คุณลักษณะที่พึง ประสงค์	นักเรียนใฝ่เรียนรู้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	- การส่งแบบฝึกหัด ที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ”	- แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันไซน์ ตรีโกณมิติอื่น ๆ” - แบบบันทึก ประเมินผลด้าน	นักเรียนมุ่งมั่นใน การทำงานอยู่ในระดับ ดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
		คุณลักษณะที่พึงประสงค์	
<b>ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน</b> 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันไซน์ตรีโกณมิติอื่น ๆ”	- ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์ตรีโกณมิติอื่น ๆ” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การคิดในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันไซน์ตรีโกณมิติอื่น ๆ”	- ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์ตรีโกณมิติอื่น ๆ” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การคิดในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้ได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันไซน์ตรีโกณมิติอื่น ๆ”	- ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์ตรีโกณมิติอื่น ๆ” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึกการทำงานกลุ่ม - แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
5) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้	ตรวจการใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ”	- สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้เทคโนโลยีเพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

## 7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

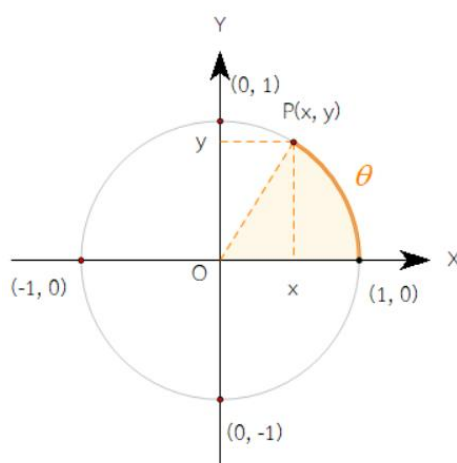
### ชั่วโมงที่ 1

#### ขั้นเตรียม

7.1 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน

7.2 ครูทบทวนเรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” โดยการสนทนากลมตอบกับนักเรียนและใช้ สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ประกอบ

7.3 ครูยกตัวอย่างวงกลมหนึ่งหน่วย ดังรูป



แล้วถามคำถาม จากรูป “นักเรียนมีความคิดว่่านอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ และยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ อย่างไร”

**แนวคำตอบ**

- ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent function)
- ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant function)
- ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant function)
- ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent function)

### ขั้นตอนและอธิบายทฤษฎี

7.4 ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” โดยการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ภายในกลุ่ม พิจารณาจำนวนกลุ่มนักเรียนในชั้นเรียน ครูเลือกให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างในใบความรู้ ดังนี้(กรณีจำนวนกลุ่มไม่เท่าจำนวนตัวอย่างครูสุ่มนักเรียนศึกษาตามความเหมาะสม)

- กลุ่มที่ 1 ตัวอย่างที่ 1
- กลุ่มที่ 2 ตัวอย่างที่ 2
- กลุ่มที่ 3 ตัวอย่างที่ 3
- กลุ่มที่ 4 ตัวอย่างที่ 4
- กลุ่มที่ 5 ตัวอย่างที่ 5
- กลุ่มที่ 6 ตัวอย่างที่ 6
- กลุ่มที่ 7 ตัวอย่างที่ 7

7.5 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มอธิบายตัวอย่างจากใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ที่ได้รับมอบหมายในข้อ 7.4 ครูคอยแนะนำเพิ่มเติม

7.6 ครูอธิบายการหาค่าและแก้ปัญหาโจทย์ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” (หน้า 1 - 9) โดยการสุ่มนักเรียนในชั้นเรียนตอบคำถามหรือสนทนากลุ่มต่อนักเรียนระหว่างการอธิบาย นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม

### ชั่วโมงที่ 2

#### ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.7 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ในชั่วโมงที่ 1 ครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

7.8 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” โดยครูสนทนากลุ่มต่อนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม หน้าชั้นเรียน

### ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.9 จากการทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” และศึกษาใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” นักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ได้อย่างไร

7.10 ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” โดยการสนทนาและใช้คำถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน พร้อมเขียนสูตรสรุปการหาฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

### ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.11 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” เป็นการบ้าน

7.12 ครูมอบหมายให้นักเรียนทบทวนบทเรียนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” เพื่อเป็นการทบทวนและศึกษาความรู้เพิ่มเติมด้วยตัวเอง

## 8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- ใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” - ใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” - แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ”	สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ”	-	-

## 9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

### 9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
<b>ด้านความรู้</b> 1) หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงใด ๆ ได้				
<b>ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์</b> 1) ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้				

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอ การค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้				
<b>ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์</b>				
1) ซื่อสัตย์สุจริต				
2) มีวินัย				
3) ใฝ่เรียนรู้				
4) มุ่งมั่นในการทำงาน				
<b>ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน</b>				
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่าของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้				
2) ใช้การคิดในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวน จริงใด ๆ ได้				
3) ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ จำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้ได้				
4) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				
5) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ได้				

## 9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

## 9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

## 10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

### 10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

### 10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

### 10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

### 10.4 ความคิดเห็นของผู้บริหารโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา



## ใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ”

### จุดประสงค์การเรียนรู้

หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงใด ๆ ได้

### ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังที่กล่าวมาแล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent function) เขียนแทนด้วย  $\tan$  (อ่านว่า แทน)

ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant function) เขียนแทนด้วย  $\sec$  (อ่านว่า เซก)

ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant function) เขียนแทนด้วย  $\operatorname{cosec}$  หรือ  $\operatorname{csc}$  (อ่านว่า โคเซก)

ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent function) เขียนแทนด้วย  $\cot$  (อ่านว่า คอต)

นิยามค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านี้ โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนี้

สำหรับจำนวนจริง  $\theta$  ใด ๆ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

จากนิยามจะได้ว่า

5. โดเมนของฟังก์ชัน  $\tan$  และ  $\sec$  คือ  $\mathbb{R} - \left\{ x \mid x = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$
6. โดเมนของฟังก์ชัน  $\cot$  และ  $\operatorname{cosec}$  คือ  $\mathbb{R} - \{ x \mid x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$
7. เรนจ์ของฟังก์ชัน  $\tan$  และ  $\cot$  คือ  $\mathbb{R}$
8. เรนจ์ของฟังก์ชัน  $\sec$  และ  $\operatorname{cosec}$  คือ  $\mathbb{R} - \{ x \mid -1 < x < 1 \}$



นอกจากนี้สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \quad \text{เมื่อ } \tan \theta \neq 0$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

ความสัมพันธ์เหล่านี้อาจพิสูจน์ได้ดังนี้

4) จงแสดงว่า  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$  เมื่อ  $\tan \theta \neq 0$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{1}{\tan \theta} \quad \text{เมื่อ } \tan \theta \neq 0 \quad \square$$

5) จงแสดงว่า  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$  เมื่อ  $\cos \theta \neq 0$

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad ; \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$= \sec^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0 \quad \square$$

6) จงแสดงว่า  $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$  เมื่อ  $\sin \theta \neq 0$

$$1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad ; \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$= \operatorname{cosec}^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0 \quad \square$$

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ข้างต้นสามารถหาได้จากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\frac{\pi}{6}$

**วิธีทำ** เนื่องจาก  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  และ  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้  $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$   $\square$

$\cot \frac{\pi}{6} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$   $\square$

$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$   $\square$

$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times 2 = 2$   $\square$

ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง  $\theta$  บางจำนวน เมื่อ  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\operatorname{cosec} \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
0	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ  $\cot \frac{\pi}{2}$  และ  $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ  $\cot \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$  □

$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$  □

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ  $\cot(-\pi)$  และ  $\operatorname{cosec}(-\pi)$

$\cot(-\pi) = \frac{\cos(-\pi)}{\sin(-\pi)} = \frac{-1}{0}$  ไม่นิยาม □

เนื่องจาก  $\cot \theta$  ไม่นิยาม เมื่อ  $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{cosec}(-\pi) = \frac{1}{\sin(-\pi)} = \frac{1}{0}$  ไม่นิยาม □

เนื่องจาก  $\operatorname{cosec} \theta$  ไม่นิยาม เมื่อ  $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า  $\tan \frac{5\pi}{6}$  และ  $\sec\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

วิธีทำ  $\tan \frac{5\pi}{6} = \frac{\sin \frac{5\pi}{6}}{\cos \frac{5\pi}{6}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sec\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\cos \frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}$   
 $= \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$  □

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่า  $\frac{\sin \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4}}{9 \tan \frac{\pi}{6} \cot \frac{5\pi}{6}}$

วิธีทำ หาค่า  $\sin \frac{5\pi}{3} = \sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \frac{17\pi}{4} = \cos \left( 4\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{5\pi}{6} = \frac{\cos \frac{5\pi}{6}}{\sin \frac{5\pi}{6}} = \frac{\cos \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right)}$$

$$= \frac{-\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

แทนค่า จะได้  $\frac{\sin \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4}}{9 \tan \frac{\pi}{6} \cot \frac{5\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{9 \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) (-\sqrt{3})}$

$$= \frac{\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}}{-9}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18} - \frac{\sqrt{2}}{18}$$

□

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  จงหา  $\cot \theta + \sec \theta$

วิธีทำ เนื่องจาก  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

จะได้  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

จาก  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  จะได้  $\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

เนื่องจาก  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\theta$  หน่วย

เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะอยู่ในจตุภาคที่ 1 จะได้  $\cos \theta = \frac{4}{5}$

ดังนั้น  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  และ  $\cos \theta = \frac{4}{5}$

หาค่า  $\cot \theta + \sec \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}$

$$= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} + \frac{1}{\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{5}{4}$$

$$= \frac{16}{12} + \frac{15}{12}$$

$$= \frac{31}{12}$$

□

ตัวอย่างที่ 7 จงแสดงว่า  $\tan(n\pi + \theta) = \tan \theta$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

วิธีทำ กรณีที่ 1 เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคู่

เขียน  $n = 2k$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น  $\tan(n\pi + \theta) = \tan(2k\pi + \theta)$

$$= \frac{\sin(2k\pi + \theta)}{\cos(2k\pi + \theta)}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

กรณีที่ 2 เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคี่

เขียน  $n = 2k + 1$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น  $\tan(n\pi + \theta) = \tan((2k + 1)\pi + \theta)$

$$\begin{aligned} &= \tan(2k\pi + \pi + \theta) \\ &= \frac{\sin(\pi + \theta)}{\cos(\pi + \theta)} \\ &= \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta \quad \square \end{aligned}$$



## ใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ”

### จุดประสงค์การเรียนรู้

#### ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

- 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้
- 2) ใช้การคิดในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้
- 3) ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้ได้

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. นักเรียนมีเวลาทำกิจกรรมวงล้อฟังก์ชันตรีโกณมิติ 20 นาที
2. ให้นักเรียนดูแผ่นคำตอบและคำถามที่ติดไว้ในห้องใกล้กับนักเรียนมากที่สุด
3. ครูชี้แจงแผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถามแต่ละใบจะประกอบด้วยคำตอบของคำถามก่อนหน้าพร้อมสัญลักษณ์และคำถามถัดไป
4. ให้นักเรียนดูคำถามแล้วหาคำตอบที่ตรงกับคำถามจากแผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถามอื่น เมื่อพบแล้วให้เขียนสัญลักษณ์ที่ปรากฏอยู่ในหน้าคำตอบนั้นลงในวงกลมวงใดของวงล้อสัญลักษณ์ก็ได้
5. ให้นักเรียนดูคำถามและหาคำตอบจากแผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถามอื่นต่อไป เมื่อพบคำตอบแล้วให้เขียนสัญลักษณ์ที่ปรากฏอยู่ในคำตอบนั้น ลงในวงกลมซึ่งถัดไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา และดำเนินการในทำนองเดียวกัน จนได้สัญลักษณ์ครบทุกวง

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

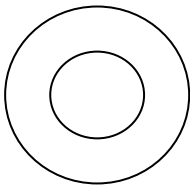
1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....  
 บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ
2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....  
 บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ
3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....  
 บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ
4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....  
 บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที


ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....



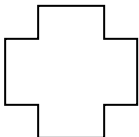
แผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถาม

	<p>คำตอบ</p> $-\frac{5}{2}$
<p>คำถาม</p> <p>1. จงหาค่า <math>\sin \frac{13\pi}{6} + \cos \frac{13\pi}{3}</math></p>	

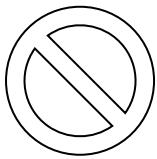
แผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถาม

	<p>คำตอบ</p> $1$
<p>คำถาม</p> <p>2. จงหาค่าของ <math>3\sin \frac{25\pi}{6} - 3\tan \frac{13\pi}{4} + 2\cos \frac{19\pi}{3}</math></p>	

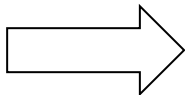
แผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถาม

	<p>คำตอบ</p> $-\frac{1}{2}$
<p>คำถาม</p> <p>3. จงหาค่าของ <math>\tan \frac{11\pi}{6} \sec \frac{11\pi}{6} + \sec \frac{4\pi}{3} \operatorname{cosec} \frac{4\pi}{3}</math></p>	


แผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถาม

	<p>คำตอบ</p> $\frac{-2+4\sqrt{3}}{3}$
<p>คำถาม</p> <p>4. จงหาค่าของ <math>\sec \frac{7\pi}{6} \sin \frac{7\pi}{4} \operatorname{cosec} \left( -\frac{15\pi}{4} \right) \tan \left( -\frac{31\pi}{6} \right)</math></p>	


แผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถาม

	<p>คำตอบ</p> $-\frac{2}{3}$
<p>คำถาม</p> <p>5. จงหาค่าของ <math>\tan \left( -\frac{15\pi}{4} \right) \sin \left( -\frac{31\pi}{6} \right) \cot \left( \frac{19\pi}{4} \right) \operatorname{cosec} \frac{57\pi}{2}</math></p>	

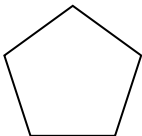
แผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถาม

	<p>คำตอบ</p> $-\frac{1}{2}$
<p>คำถาม</p> <p>6. จงหาค่าของ <math>\sin \frac{9\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4}</math></p>	

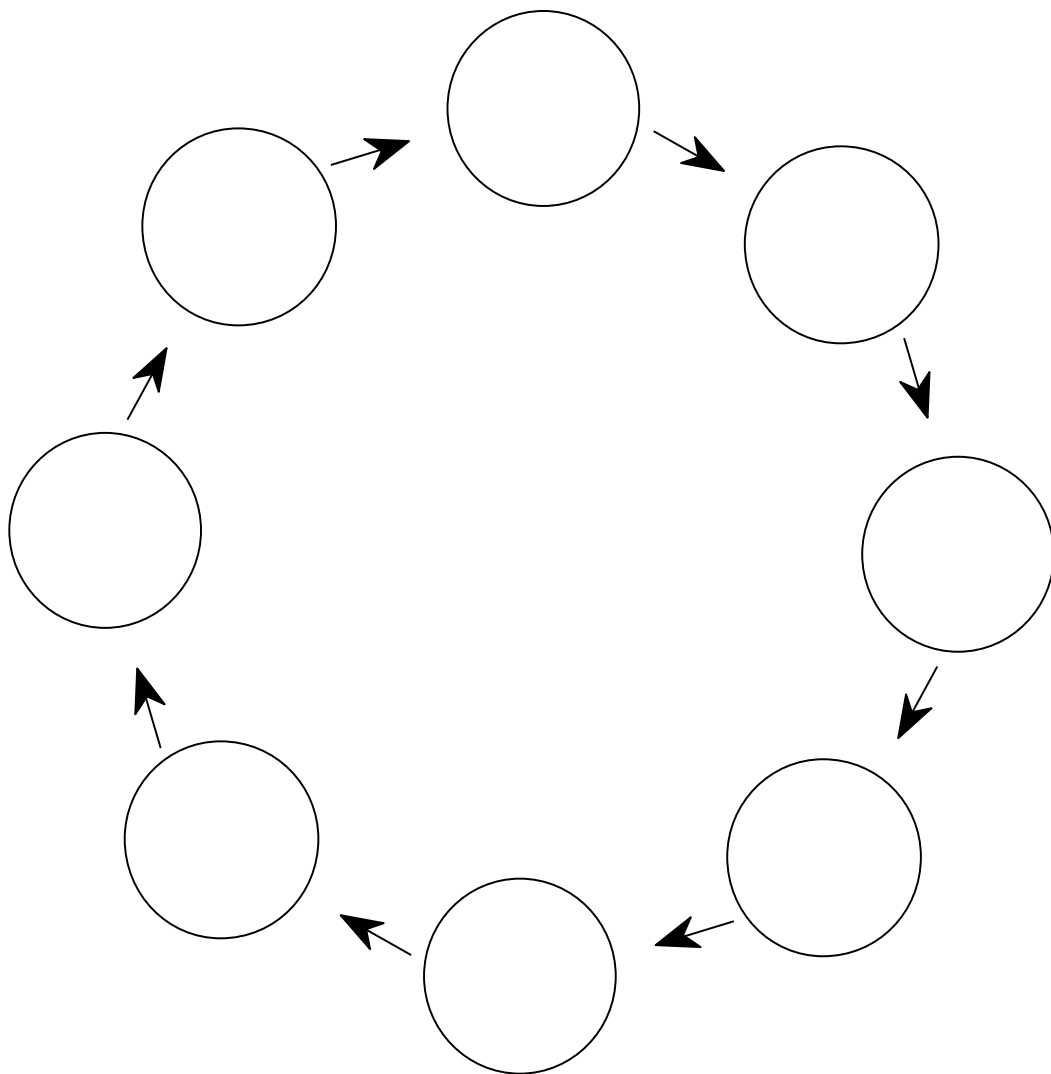
แผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถาม

	<p>คำตอบ</p> <p>0</p>
<p>คำถาม</p> <p>7. จงหาค่าของ <math>\frac{4 \sin \frac{7\pi}{3} \sec \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{3\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan \frac{7\pi}{4} - 1}</math></p>	

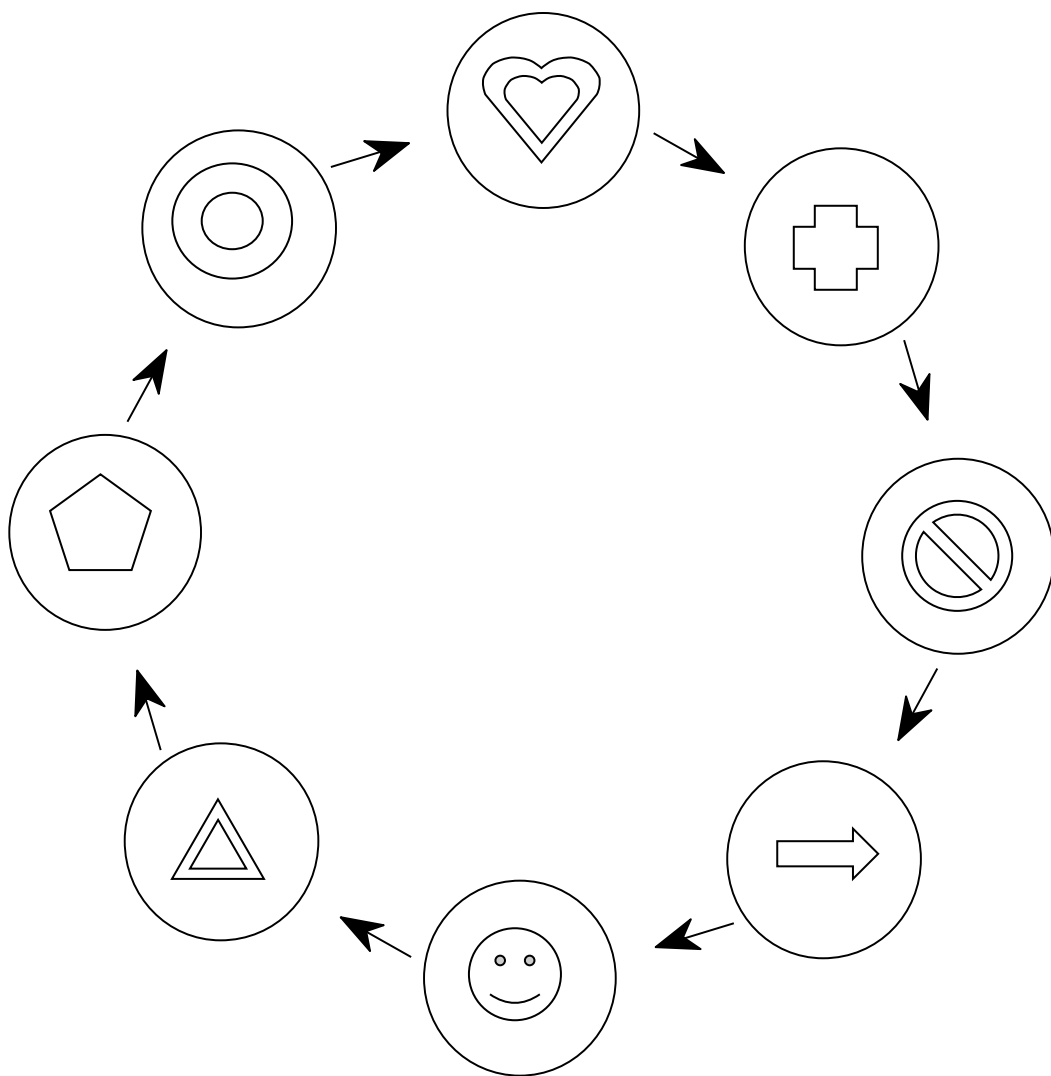
แผ่นสัญลักษณ์ คำตอบและคำถาม

	<p>คำตอบ</p> <p><math>\frac{3}{2}</math></p>
<p>คำถาม</p> <p>8. จงหาค่าของ <math>\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \tan\frac{\pi}{3} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cot\frac{5\pi}{6} \sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right)</math></p>	

“วงล้อฟังก์ชันตรีโกณมิติ”



เฉลยใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ”



$$\begin{aligned}
 1. \quad \sin \frac{13\pi}{6} &= \sin \left( 2\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\
 \cos \frac{13\pi}{3} &= \cos \left( 4\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\
 \text{ดังนั้น} \quad \sin \frac{13\pi}{6} + \cos \frac{13\pi}{3} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \sin \frac{25\pi}{6} &= \sin \left( 4\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\
 \tan \frac{13\pi}{4} &= \frac{\sin \frac{13\pi}{4}}{\cos \frac{13\pi}{4}} = \frac{\sin \left( 2\pi + \frac{5\pi}{4} \right)}{\cos \left( 2\pi + \frac{5\pi}{4} \right)} = \frac{\sin \frac{5\pi}{4}}{\cos \frac{5\pi}{4}} \\
 &= \frac{\sin \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{-\sin \frac{\pi}{4}}{-\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \\
 \cos \frac{19\pi}{3} &= \cos \left( 6\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\
 \text{ดังนั้น} \quad 3\sin \frac{25\pi}{6} - 3\tan \frac{13\pi}{4} + 2\cos \frac{19\pi}{3} &= 3\left(\frac{1}{2}\right) - 3(1) + 2\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{3}{2} - 3 + 1 \\
 &= \frac{3-6+2}{2} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \tan \frac{11\pi}{6} &= \frac{\sin \frac{11\pi}{6}}{\cos \frac{11\pi}{6}} = \frac{\sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{-\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\
 \sec \frac{11\pi}{6} &= \frac{1}{\cos \frac{11\pi}{6}} = \frac{1}{\cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\
 \sec \frac{4\pi}{3} &= \frac{1}{\cos \frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{\cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right)} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \\
 \operatorname{cosec} \frac{4\pi}{3} &= \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{\sin \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right)} = \frac{1}{-\sin \frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \tan \frac{11\pi}{6} \sec \frac{11\pi}{6} + \sec \frac{4\pi}{3} \operatorname{cosec} \frac{4\pi}{3} &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + (-2) \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{-2+4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$4. \quad \sec \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{7\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}\left(-\frac{15\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)} = \frac{1}{-\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)} = \frac{1}{-\sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan\left(-\frac{31\pi}{6}\right) &= \frac{\sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{31\pi}{6}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{31\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)} = \frac{-\sin\left(4\pi + \frac{7\pi}{6}\right)}{\cos\left(4\pi + \frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{-\sin \frac{7\pi}{6}}{\cos \frac{7\pi}{6}} \\ &= \frac{-\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{-\left(-\sin \frac{\pi}{6}\right)}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sec \frac{7\pi}{6} \sin \frac{7\pi}{4} \operatorname{cosec}\left(-\frac{15\pi}{4}\right) \tan\left(-\frac{31\pi}{6}\right) &= \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (\sqrt{2}) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right) &= \frac{\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)} = \frac{-\sin \frac{15\pi}{4}}{\cos \frac{15\pi}{4}} = \frac{-\sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right) &= -\sin \frac{31\pi}{6} = -\sin\left(4\pi + \frac{7\pi}{6}\right) = -\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot\left(\frac{19\pi}{4}\right) &= \frac{\cos\left(\frac{19\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right)} = \frac{\cos\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right)}{\sin\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1\end{aligned}$$

$$\operatorname{cosec}\frac{57\pi}{2} = \frac{1}{\sin\frac{57\pi}{2}} = \frac{1}{\sin\left(28\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$$

ดังนั้น  $\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{31\pi}{6}\right)\cot\left(\frac{19\pi}{4}\right)\operatorname{cosec}\frac{57\pi}{2} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)(-1)(1) = -\frac{1}{2}$

6.  $\sin\frac{9\pi}{4} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$   
 ดังนั้น  $\sin\frac{9\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

7.  $\sin\frac{7\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\sec\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{\cos\frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{-\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$   
 $\tan\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{-\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$   
 $\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$   
 $\tan\frac{7\pi}{4} = \frac{\sin\frac{7\pi}{4}}{\cos\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$   
 ดังนั้น 
$$\frac{4\sin\frac{7\pi}{3}\sec\frac{7\pi}{6} + \tan\frac{3\pi}{4}\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2}}{\tan\frac{7\pi}{4} - 1} = \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + (-1)(-1)}{(-1) - 1}$$



$$= \frac{-4+1}{-2} = \frac{3}{2}$$

8.  $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \tan\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cot\frac{5\pi}{6}\sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cot\frac{5\pi}{6} = \frac{\cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\frac{5\pi}{6}} = \frac{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\cos\frac{7\pi}{6}} = \frac{1}{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{-\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

ดังนั้น  $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \tan\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cot\frac{5\pi}{6}\sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) + (\sqrt{3})(0) - (-\sqrt{3})\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + 0 - 2$$

$$= \frac{-1-4}{2}$$

$$= -\frac{5}{2}$$



### แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- 1) หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงใด ๆ ได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- 1) ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้
- 2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอ การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้

1. จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงต่อไปนี้(กรณีที่ไม่นิยาม จงให้เหตุผล)

- |                       |                     |                       |
|-----------------------|---------------------|-----------------------|
| 1) $\pi$              | 2) $\frac{\pi}{3}$  | 3) 0                  |
| 4) $\frac{5\pi}{6}$   | 5) $\frac{5\pi}{4}$ | 6) $-\frac{\pi}{4}$   |
| 7) $-\frac{11\pi}{6}$ | 8) $\frac{4\pi}{3}$ | 9) $-\frac{11\pi}{2}$ |
| 10) $\frac{7\pi}{3}$  | 11) $-2\pi$         | 12) $\frac{25\pi}{2}$ |

2. กำหนดให้  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $\tan \theta = \frac{1}{3}$  จงหา  $\sin^2 \theta - \cot^2 \theta$

3. กำหนดให้  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $\cos \theta = \frac{5}{13}$  จงหา  $1 + 5 \tan \theta$

4. กำหนดให้  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $\sec \theta = \frac{17}{8}$  จงหา  $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$

5. จงหาค่าของ

- 1)  $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{7\pi}{4}$
- 2)  $\sin^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{11\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{2\pi}{3}$
- 3)  $\sin \frac{2\pi}{3} \tan \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cot \frac{5\pi}{3}$
- 4)  $\frac{4 \sin \frac{7\pi}{3} \sec \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{3\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan \frac{7\pi}{4} + 2}$

$$5) \frac{\sin \frac{3\pi}{2} + \tan \pi \cos \frac{\pi}{2} - \cot \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{7\pi}{6}}{\operatorname{cosec}^2 \frac{3\pi}{4} - \cot^2 \frac{3\pi}{4}}$$

6. จงแสดงว่า  $\operatorname{cosec}(2n\pi + \theta) = \operatorname{cosec} \theta$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

7. จงแสดงว่า  $\cot(n\pi + \theta) = \cot \theta$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ”

1.

ข้อ	$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\operatorname{cosec} \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
1	$\pi$	0	-1	0	ไม่นิยาม	-1	ไม่นิยาม
2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
3	0	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
4	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
5	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
6	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
7	$-\frac{11\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
8	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
9	$-\frac{11\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0
10	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
11	$-2\pi$	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
12	$\frac{25\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0

เหตุผลกรณีไม่นิยาม      เนื่องจาก  $\operatorname{cosec} \theta$  และ  $\cot \theta$  ไม่นิยาม เมื่อ  $\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

เนื่องจาก  $\tan \theta$  และ  $\sec \theta$  ไม่นิยาม เมื่อ  $\theta = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

2.      เนื่องจาก       $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

และ       $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$

จะได้       $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + 3^2 = 10$

เนื่องจาก  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\theta$  หน่วย

เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะอยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้  $\operatorname{cosec} \theta = \sqrt{10}$

ดังนั้น  $\sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta} = \frac{1}{\sqrt{10}}$  และ  $\cot \theta = 3$

$$\begin{aligned} \text{หาค่า} \quad \sin^2 \theta - \cot^2 \theta &= \left( \frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2 - 3^2 \\ &= \frac{1}{10} - 9 \\ &= \frac{1-90}{10} \\ &= -\frac{89}{10} \end{aligned}$$

□

3. เนื่องจาก  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

จะได้  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

จาก  $\cos \theta = \frac{5}{13}$  จะได้  $\sin^2 \theta = 1 - \left( \frac{5}{13} \right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

เนื่องจาก  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\theta$  หน่วย

เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะอยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้  $\sin \theta = \frac{12}{13}$

ดังนั้น  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$

หาค่า  $1 + 5 \tan \theta = 1 + 5 \left( \frac{12}{5} \right)$

$$= 1 + 12$$

$$= 13$$

□

4. เนื่องจาก  $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$

จะได้  $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$

จาก  $\sec \theta = \frac{17}{8}$  จะได้  $\tan^2 \theta = \left( \frac{17}{8} \right)^2 - 1 = \frac{289}{64} - 1 = \frac{225}{64}$

เนื่องจาก  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  จะได้จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว  $\theta$  หน่วย

เมื่อวัดทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะอยู่ในจุดภาคที่ 1 จะได้  $\tan \theta = \frac{15}{8}$

ดังนั้น  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\frac{15}{8}} = \frac{8}{15}$  และ

$$\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \left(\frac{8}{15}\right)^2 = 1 + \frac{64}{225} = \frac{289}{225}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{17}{15}$$

หาค่า

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta &= \frac{17}{15} + \frac{8}{15} \\ &= \frac{25}{15} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

□

5. 1) หาค่า  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  และ

$$\sin \frac{7\pi}{4} = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

แทนค่า จะได้  $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{7\pi}{4}$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \\ &= \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

□

2) หาค่า  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

แทนค่า จะได้  $\sin^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{11\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{2\pi}{3}$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$= -\frac{4}{4} = -1$$

□

$$3) \quad \text{หาค่า} \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{7\pi}{6} = \frac{\sin \left( \frac{7\pi}{6} \right)}{\cos \left( \frac{7\pi}{6} \right)} = \frac{\sin \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{-\sin \frac{\pi}{6}}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot \frac{5\pi}{3} = \frac{\cos \left( \frac{5\pi}{3} \right)}{\sin \left( \frac{5\pi}{3} \right)} = \frac{\sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{3} \right)}{\cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{3} \right)} = \frac{-\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า จะได้} \quad & \sin \frac{2\pi}{3} \tan \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cot \frac{5\pi}{3} \\ &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{aligned}$$

□

$$4) \quad \text{หาค่า} \quad \sin \frac{7\pi}{3} = \sin \left( 2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{\cos \left( \frac{7\pi}{6} \right)} = \frac{1}{\cos \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = \frac{\sin \left( \frac{3\pi}{4} \right)}{\cos \left( \frac{3\pi}{4} \right)} = \frac{\sin \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{-\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

$$\operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{\sin \left( \frac{3\pi}{2} \right)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\tan \frac{7\pi}{4} = \frac{\sin \left( \frac{7\pi}{4} \right)}{\cos \left( \frac{7\pi}{4} \right)} = \frac{\sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{-\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

แทนค่า จะได้

$$\frac{4 \sin \frac{7\pi}{3} \sec \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{3\pi}{4} \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}}{\tan \frac{7\pi}{4} + 2}$$

$$= \frac{4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) + (-1)(-1)}{(-1) + 2}$$

$$= \frac{4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) + (-1)(-1)}{(-1) + 2} = \frac{-4 + 1}{1} = -3 \quad \square$$

5) หาค่า  $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ ,  $\tan \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0$ ,  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$$\cot \frac{5\pi}{6} = \frac{\cos \frac{5\pi}{6}}{\sin \frac{5\pi}{6}} = \frac{\cos \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right)}{\sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{-\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cosec} \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sin \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\cot \frac{3\pi}{4} = \frac{\cos \frac{3\pi}{4}}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{\cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{-\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

แทนค่า จะได้

$$\frac{\sin \frac{3\pi}{2} + \tan \pi \cos \frac{\pi}{2} - \cot \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{7\pi}{6}}{\operatorname{cosec} \frac{3\pi}{4} - \cot \frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{-1 + (0)(0) - (-\sqrt{3}) - \left(-\frac{1}{2}\right)}{(\sqrt{2})^2 - (-1)^2}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3} + \frac{1}{2}}{2 - 1}$$

$$= \frac{-2 + 2\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{2} \quad \square$$



6. ให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \operatorname{cosec}(2n\pi + \theta) &= \frac{1}{\sin(2n\pi + \theta)} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \operatorname{cosec} \theta\end{aligned}$$

□

7. กรณีที่ 1 เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคู่

เขียน  $n = 2k$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \cot(n\pi + \theta) &= \cot(2k\pi + \theta) \\ &= \frac{\cos(2k\pi + \theta)}{\sin(2k\pi + \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta\end{aligned}$$


กรณีที่ 2 เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนคี่

เขียน  $n = 2k + 1$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \cot(n\pi + \theta) &= \cot((2k + 1)\pi + \theta) \\ &= \cot(2k\pi + \pi + \theta) \\ &= \frac{\cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi + \theta)} \\ &= \frac{-\cos \theta}{-\sin \theta} = \cot \theta\end{aligned}$$

□

# สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” หน้า 1 – 3



หน้าที่ 1

## "ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"

**นิยาม** เริ่มต้นใหม่

สำหรับจำนวนจริง  $\theta$  ใด ๆ

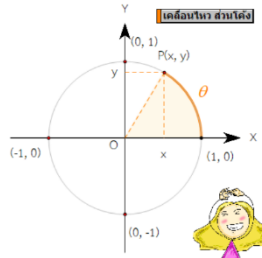
**นิยาม 1**  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  เมื่อ  $\cos \theta \neq 0$

**นิยาม 2**  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$  เมื่อ  $\cos \theta \neq 0$

**นิยาม 3**  $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$  เมื่อ  $\sin \theta \neq 0$

**นิยาม 4**  $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$  เมื่อ  $\sin \theta \neq 0$

**เคลื่อนเมาส์ ส่วนโค้ง**



**โดเมนของฟังก์ชัน tan และ sec**

$$\mathbb{R} - \left\{ x \mid x = \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**โดเมนของฟังก์ชัน cot และ cosec**

$$\mathbb{R} - \{ x \mid x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$$

**เรนจ์ของฟังก์ชัน tan และ cot**

$$\mathbb{R}$$

**เรนจ์ของฟังก์ชัน sec และ cosec**

$$\mathbb{R} - \{ x \mid -1 < x < 1 \}$$

**ก่อนหน้า** จัดทำโดย นายอรรถสิทธิ์ สิงขรเชลล์ ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนอัสสัมชัญวิทยา กรุงเทพมหานคร อ.ปทุมธานี จ.ปทุมธานี 12210 โทร 0833207928 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัชฉฉฉฉฉฉฉ ฉฉ 14 **หน้าต่อไป**



หน้าที่ 2

## "ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"

**เริ่มต้นใหม่**

**ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

**(1)**  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$  เมื่อ  $\tan \theta \neq 0$

**(2)**  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$  เมื่อ  $\cos \theta \neq 0$

**(3)**  $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$  เมื่อ  $\sin \theta \neq 0$

**แสดง (1)**

**แสดง 1** จงแสดงว่า  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$  เมื่อ  $\tan \theta \neq 0$

**แสดง 2**

**แสดง 3**

**แสดง 4**

**แสดง 5**

**แสดง (2)**

**แสดง 1** จงแสดงว่า  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$  เมื่อ  $\cos \theta \neq 0$


**แสดง 2**

**แสดง 3**

**แสดง 4**

**แสดง 5**

**ก่อนหน้า** จัดทำโดย นายอรรถสิทธิ์ สิงขรเชลล์ ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนอัสสัมชัญวิทยา กรุงเทพมหานคร อ.ปทุมธานี จ.ปทุมธานี 12210 โทร 0833207928 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัชฉฉฉฉฉฉฉ ฉฉ 14 **หน้าต่อไป**



หน้าที่ 3

## "ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"

**เริ่มต้นใหม่**

**แสดง (3)**

**แสดง 1** จงแสดงว่า  $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$  เมื่อ  $\sin \theta \neq 0$

**แสดง 2**

**แสดง 3**

**แสดง 4**

**แสดง 5**

**แสดง (3)**

**แสดง 1** จงแสดงว่า  $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$  เมื่อ  $\sin \theta \neq 0$

**แสดง 2**

**แสดง 3**

**แสดง 4**

**แสดง 5**

**แสดง (3)**

**แสดง 1** จงแสดงว่า  $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$  เมื่อ  $\sin \theta \neq 0$

**แสดง 2**

**แสดง 3**

**แสดง 4**

**แสดง 5**

**ก่อนหน้า** จัดทำโดย นายอรรถสิทธิ์ สิงขรเชลล์ ตำแหน่ง ครูชำนาญการพิเศษ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนอัสสัมชัญวิทยา กรุงเทพมหานคร อ.ปทุมธานี จ.ปทุมธานี 12210 โทร 0833207928 สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัชฉฉฉฉฉฉฉ ฉฉ 14 **หน้าต่อไป**

# สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” หน้า 4 – 6

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"

**เริ่มต้นใหม่**

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\frac{\pi}{6}$

**วิธีทำ**

**อธิบาย 1** เนื่องจาก  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  และ  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**อธิบาย 2**  $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**อธิบาย 3**  $\cot \frac{\pi}{6} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

**อธิบาย 4**  $\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

**อธิบาย 5**  $\csc \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

**สรุป** ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\frac{\pi}{6}$  คือ

- ส่วนโค้ง  $\frac{\pi}{6}$
- ส่วนโค้ง  $\frac{\pi}{4}$
- ส่วนโค้ง  $\frac{\pi}{6}$
- ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\frac{\pi}{6}$

**ก่อนหน้า** **ถัดไป**

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"

**เริ่มต้นใหม่**

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ  $\cot \frac{\pi}{2}$  และ  $\csc \frac{\pi}{2}$

**วิธีทำ**

**อธิบาย 2-1**  $\cot \frac{\pi}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$

**อธิบาย 2-2**  $\csc \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$

**สรุป** ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\frac{\pi}{2}$  คือ

- ส่วนโค้ง  $\frac{\pi}{2}$

**ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ  $\cot(-\pi)$  และ  $\csc(-\pi)$**

**วิธีทำ**

**อธิบาย 3-1**  $\cot(-\pi) = \frac{\cos(-\pi)}{\sin(-\pi)} = \frac{-1}{0}$  ไม่เป็น

**อธิบาย 3-2**  $\csc(-\pi) = \frac{1}{\sin(-\pi)} = \frac{1}{0}$  ไม่เป็น

**สรุป** ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $-\pi$  คือ

- ส่วนโค้ง  $-\pi$

**ก่อนหน้า** **ถัดไป**

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"

**เริ่มต้นใหม่**

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่า  $\tan \frac{5\pi}{6}$  และ  $\sec(-\frac{5\pi}{6})$

**วิธีทำ**

**อธิบาย 1**  $\tan \frac{5\pi}{6} = \frac{\sin \frac{5\pi}{6}}{\cos \frac{5\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$




**อธิบาย 2**  $\sec(-\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{\cos(-\frac{5\pi}{6})} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

**สรุป** ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\frac{5\pi}{6}$  คือ

- ส่วนโค้ง  $\frac{5\pi}{6}$
- ส่วนโค้ง  $\frac{5\pi}{6}$
- ส่วนโค้ง  $\frac{5\pi}{6}$
- ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของ  $\frac{5\pi}{6}$

**ก่อนหน้า** **ถัดไป**

# สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” หน้า 7 – 9

หน้าที่ 7

**"ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"**

**เริ่มต้นใหม่**  $\frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4}$

**ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่า**

**วิธีทำ**

**ขั้นตอนที่ 1**  $\frac{5\pi}{3} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**ขั้นตอนที่ 2**  $\frac{17\pi}{4} = \cos(4\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**ขั้นตอนที่ 3**  $\frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

**ขั้นตอนที่ 4**  $\frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

**ขั้นตอนที่ 5**  $\frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

**ขั้นตอนที่ 6**  $\frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

**ขั้นตอนที่ 7**  $\frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

**ขั้นตอนที่ 8**  $\frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

**ขั้นตอนที่ 9**  $\frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

**ขั้นตอนที่ 10**  $\frac{5\pi}{3} + \cos \frac{17\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

**ก่อนหน้า** **หน้าต่อไป**

คลิกที่นี่เพื่อดูตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสร้างฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ





หน้าที่ 8

**"ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"**

**เริ่มต้นใหม่**  $\frac{3}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  และ  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  จงหาค่า  $\cot \theta + \sec \theta$

**ตัวอย่างที่ 6**

**วิธีทำ**

**ขั้นตอนที่ 1** เนื่องจาก  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

**ขั้นตอนที่ 2** จะได้  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

**ขั้นตอนที่ 3** จาก  $\sin \theta = \frac{3}{5}$

**ขั้นตอนที่ 4** จะได้  $\cos^2 \theta = 1 - (\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

**ขั้นตอนที่ 5** เนื่องจาก  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  จะได้  $\cos \theta = \frac{4}{5}$

**ขั้นตอนที่ 6** เมื่อวัดทิศทางมุมเพิ่มขึ้นจาก  $\theta$  จะอยู่ในจุดสุดท้ายที่ 1 จะได้  $\cos \theta = \frac{4}{5}$

**ขั้นตอนที่ 7** ดังนั้น  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  และ  $\cos \theta = \frac{4}{5}$


**ขั้นตอนที่ 8**  $\cot \theta + \sec \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} + \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{16}{12} + \frac{15}{12} = \frac{31}{12}$

**ขั้นตอนที่ 9**  $\cot \theta + \sec \theta = \frac{31}{12}$

**ขั้นตอนที่ 10**  $\cot \theta + \sec \theta = \frac{31}{12}$

**ก่อนหน้า** **หน้าต่อไป**

คลิกที่นี่เพื่อดูตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสร้างฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ


หน้าที่ 9

**"ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ"**

**ตัวอย่างที่ 7** จงแสดงว่า  $\tan(k\pi + \theta) = \tan \theta$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

**เริ่มต้นใหม่** **กรณีที่ 1**

**ขั้นตอนที่ 1-1** กรณีที่ 1 เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนคู่

**ขั้นตอนที่ 1-2** เขียน  $k = 2k$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

**ขั้นตอนที่ 1-3** ดังนั้น  $\tan(k\pi + \theta) = \tan(2k\pi + \theta)$

**ขั้นตอนที่ 1-4**  $\tan(2k\pi + \theta) = \tan \theta$

**ขั้นตอนที่ 1-5**  $\tan(k\pi + \theta) = \tan \theta$

**กรณีที่ 2**

**ขั้นตอนที่ 2-1** กรณีที่ 2 เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนคี่

**ขั้นตอนที่ 2-2** เขียน  $k = 2k + 1$  เมื่อ  $k$  เป็นจำนวนเต็ม

**ขั้นตอนที่ 2-3** ดังนั้น  $\tan(k\pi + \theta) = \tan((2k + 1)\pi + \theta)$

**ขั้นตอนที่ 2-4**  $\tan((2k + 1)\pi + \theta) = \tan(2k\pi + \pi + \theta)$

**ขั้นตอนที่ 2-5**  $\tan(2k\pi + \pi + \theta) = \tan(2k\pi + \theta + \pi)$

**ขั้นตอนที่ 2-6**  $\tan(2k\pi + \theta + \pi) = \tan(2k\pi + \theta)$

**ขั้นตอนที่ 2-7**  $\tan(k\pi + \theta) = \tan \theta$

**ก่อนหน้า** **หน้าต่อไป**

คลิกที่นี่เพื่อดูตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสร้างฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

### เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
<b>ด้านความรู้</b> 1) หาค่าของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติทุกฟังก์ชัน ของจำนวนจริงใด ๆ ได้	สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ข้อที่ 1 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 11 - 12 ข้อ	สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ข้อที่ 1 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 8 - 10 ข้อ	สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ข้อที่ 1 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 4 - 7 ข้อ	สามารถทำ แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ข้อที่ 1 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ต่ำกว่า 3 ข้อหรือมีร่องรอย ของความ พยายามในการทำ แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” แต่ไม่ ถูกต้องสมบูรณ์

\*\*\* ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

### การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
4	5
3	4
2	3
1	2
0	1



### เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้การแก้ปัญหาในการค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้	สามารถแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อที่ 2 - ข้อที่ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ทั้ง 3 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อที่ 2 - ข้อที่ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ทั้ง 2 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อที่ 2 - ข้อที่ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ทั้ง 1 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้	สามารถแสดงวิธีทำโจทย์แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อที่ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำโจทย์แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อที่ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำโจทย์แบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อที่ 5 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ข้อที่ 5 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

\*\*\* ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

### การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0





**เกณฑ์การประเมินผลด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์**

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วน ใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” โดยคัดลอกจากผู้อื่น
2) มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อย โดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อย บางส่วนแก้ไขเมื่อ ได้รับการตักเตือน	แต่งกายไม่ เรียบร้อยหรือไม่ แก้ไขเมื่อได้รับการ ตักเตือน
3) ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรง เวลา	การเข้าเรียนสายไม่ เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสาย เกิน 5 นาทีแต่ไม่ เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสาย เกิน 15 นาที
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ครบทุกข้อ และถูกต้องสมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ครบทุกข้อ และถูกต้องเป็น ส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ครบทุกข้อ และถูกต้องเป็น บางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ไม่ครบทุก ข้อหรือครบทุกข้อ แต่ไม่ถูกต้องหรือไม่ ทำแบบฝึกหัดที่ 4 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ”

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลงผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0



**เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน**

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้	แสดงวิธีทำและนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ” ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	แสดงวิธีทำและนำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	แสดงวิธีทำและนำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการแสดงวิธีทำและนำเสนอการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การคิดในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ ได้	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
3) ใช้การแก้ปัญหาในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงใด ๆ จากโจทย์ที่กำหนดให้ได้	สามารถแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
4) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	ไม่มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน ไม่แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มหรือช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
4. ใช้เทคโนโลยี เพื่อ ทบทวนเนื้อหาจากสื่อ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ”	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ทบทวน และสรุปเนื้อหาทุก ครั้ง	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ทบทวน และสรุปเนื้อหาเป็น ส่วนใหญ่	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ทบทวนและ สรุปเนื้อหาเป็น บางครั้ง	ไม่ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติ อื่น ๆ” ทบทวน และสรุปเนื้อหา

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

#### การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0





### บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้  
คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน  
พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ :  
บริษัท ธนัทธการพิมพ์ จำกัด.
- พิชิต ฤทธิจรูญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : แฮสออฟ  
เคอร์มิสท์.
- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็น  
สำคัญ**. พระนครศรีอยุธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัย  
เทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.
- ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฏานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-  
NET คณิตศาสตร์ ม.6**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์**.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม  
คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตาม  
หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ:  
โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม  
คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**. พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์  
มหาวิทยาลัย.
- สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 5. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.
- อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรง  
พิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.