



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201

ภาคเรียนที่ 1

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

สาระการเรียนรู้ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

เวลา 2 ชั่วโมง

1. ผลการเรียนรู้

เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

เขียนฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$f(\theta) = x$$

$$g(\theta) = y$$

ฟังก์ชัน g และ f ดังกล่าวนี้น่า ฟังก์ชันไซน์(sine function)

และ ฟังก์ชันโคไซน์(cosine function) ตามลำดับ

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 บอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้

4.1.2 หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้

4.2.2 ใช้การให้เหตุผลในการบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.2 มีวินัย

4.3.3 ใฝ่เรียนรู้

4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

4.4.1 ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้

4.4.2 ใช้การคิดในการวาดรูปแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยได้

4.4.3 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้

4.4.5 ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้

5. เนื้อหา/สาระ

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

วงกลมหนึ่งหน่วย

การกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทำได้โดยใช้วงกลมรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเรียกวงกลมดังกล่าวว่า วงกลมหนึ่งหน่วย

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

วงกลมในระนาบ XY ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)

มีรัศมียาว 1 หน่วย

ตัดแกน X ที่จุด (1, 0) และจุด (-1, 0)

ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 1)$ และจุด $(0, -1)$

ความยาวเส้นรอบวงเท่ากับ 2π

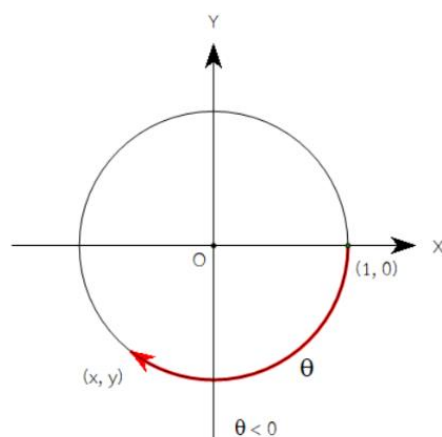
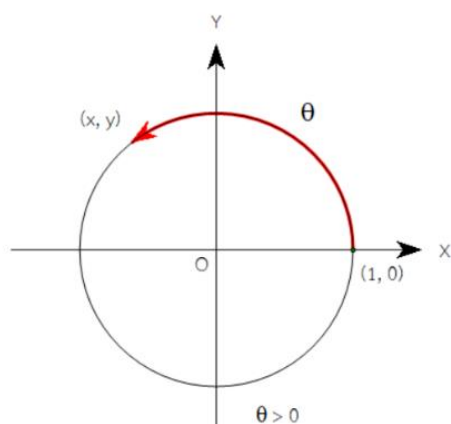
ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ จากจุด $(1, 0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางการวัดดังนี้

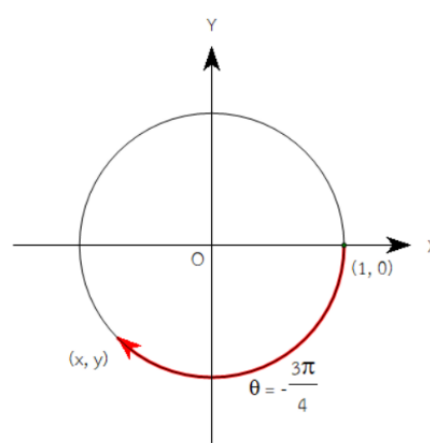
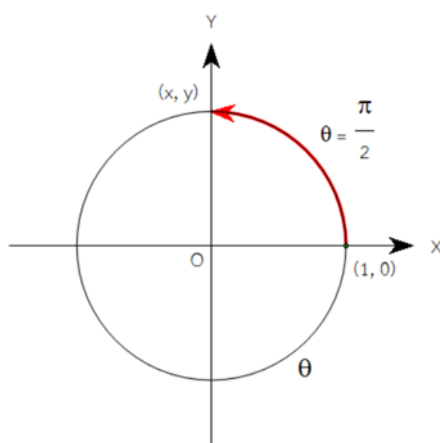
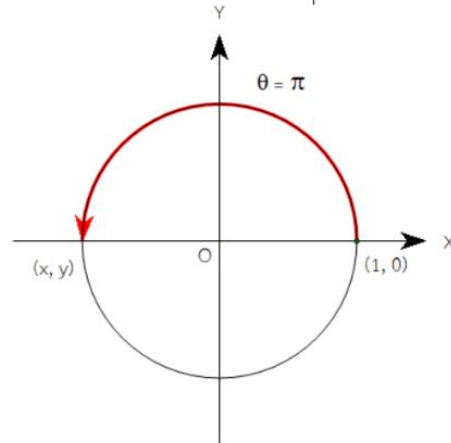
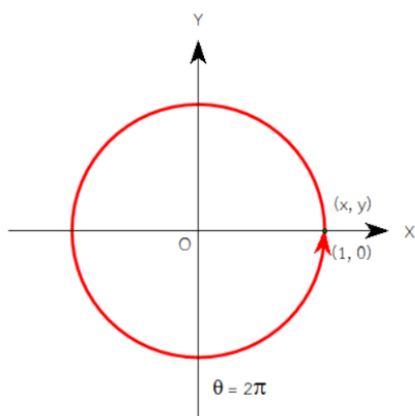
เมื่อ $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา

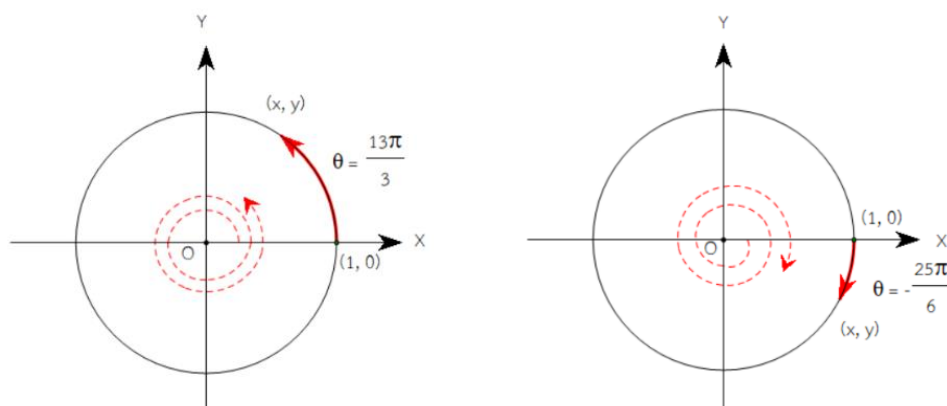
เมื่อ $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศตามเข็มนาฬิกา

เมื่อ $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด $(1, 0)$



รูปต่อไปนี้แสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ กัน





จะเห็นว่า เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ จะสามารถหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางการวัดที่กำหนดได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่า วัดส่วนโค้งเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

ดังนั้น จึงสามารถเขียนฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$f(\theta) = x$$

$$g(\theta) = y$$

เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางการวัดที่กำหนดข้างต้น

เรียกฟังก์ชัน g และ f ดังกล่าวนี้อีกว่า ฟังก์ชันไซน์(sine function) และ ฟังก์ชันโคไซน์(cosine function) ตามลำดับ และจะเขียนแทน g ด้วย \sin และเขียนแทน f ด้วย \cos ดังนี้

$$y = \sin \theta \text{ (อ่านว่า วาย เท่ากับ ไซน์ทีตา)}$$

$$x = \cos \theta \text{ (อ่านว่า เอกซ์ เท่ากับ คอสิทีตา)}$$

วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

จะเห็นว่า $-1 \leq y \leq 1$ และ $-1 \leq x \leq 1$ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

นั่นคือ เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง ตั้งแต่ -1 ถึง 1 และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง

จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sin \theta$ และ $x = \cos \theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังนี้

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1 \text{ เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

หรือ

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

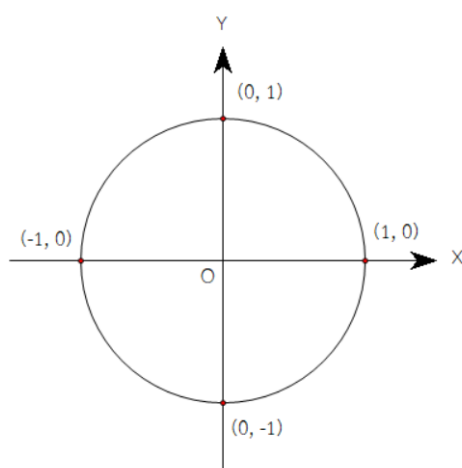
หมายเหตุ $\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$

$\cos \theta^2$ หมายถึง \cos ของจำนวนจริง θ^2

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

ในหัวข้อนี้จะค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ สำหรับ θ บางค่าที่สามารถหาพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ได้ด้วยวิธีง่าย ๆ

ถ้า $\theta = 0$ จะได้ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือ $(1, 0)$ ดังรูป ดังนั้น $\sin 0 = 0$ และ $\cos 0 = 1$



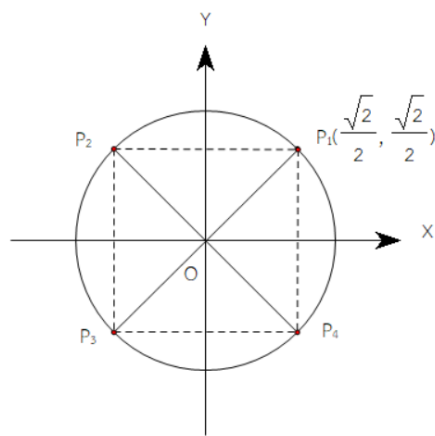
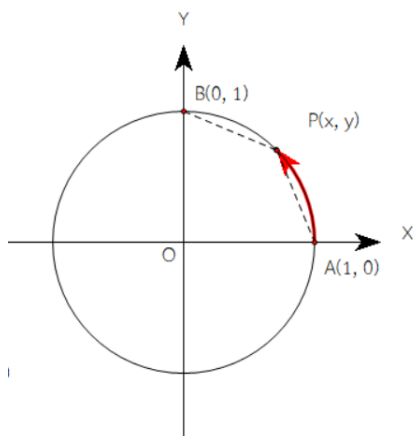
เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย และจุด $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ และ $(0, -1)$ เป็นจุดที่แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน โดยแต่ละส่วนยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{2} &= 1, & \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -1 \\ \sin \pi &= 0, & \sin(-\pi) &= 0 \\ \sin \frac{3\pi}{2} &= -1, & \sin \left(-\frac{3\pi}{2}\right) &= 1 \\ \cos \frac{\pi}{2} &= 0, & \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ \cos \pi &= -1, & \cos(-\pi) &= -1 \\ \cos \frac{3\pi}{2} &= 0, & \cos \left(-\frac{3\pi}{2}\right) &= 0\end{aligned}$$

จะเห็นว่า ค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม หาได้จาก พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\left|\frac{n\pi}{2}\right|$ หน่วย โดยวัดในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ ซึ่งจุดปลายนั้นจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้คือ $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ และ $(0, -1)$

ต่อไปนี้จะพิจารณาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB และยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PB ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ PB = PA

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

จะได้ x = y

แต่ $x^2 + y^2 = 1$ (P(x, y) อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย)

ดังนั้น $2x^2 = 1$

จะได้ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

เนื่องจาก P(x, y) เป็นจุดในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

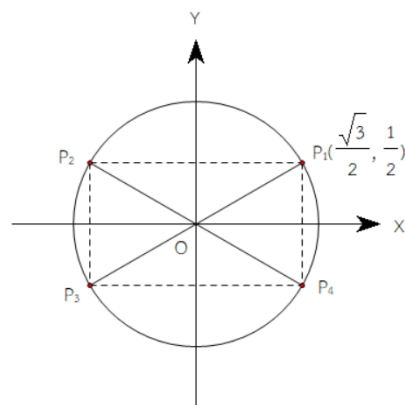
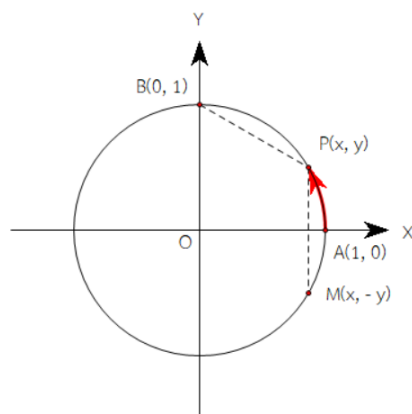
$$\text{จะได้ } x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

คือจุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$ และ $\cos \frac{\pi}{6}$



ให้ P(x, y) เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง PB ยาว $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P โดยที่มีแกน X เป็นแกนสะท้อน

จะได้ ส่วนโค้ง AM ยาวเท่ากับส่วนโค้ง AP และยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย และ

จุด M มีพิกัดเป็น $(x, -y)$

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PB

นั่นคือ

$$\begin{aligned} \text{PM} &= \text{PB} \\ \sqrt{(y - (-y))^2} &= \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ 4y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ 4y^2 + 2y - 2 &= 0 && \text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1 \\ 2y^2 + y - 1 &= 0 \\ (2y - 1)(y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ $y = \frac{1}{2}$ หรือ $y = -1$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

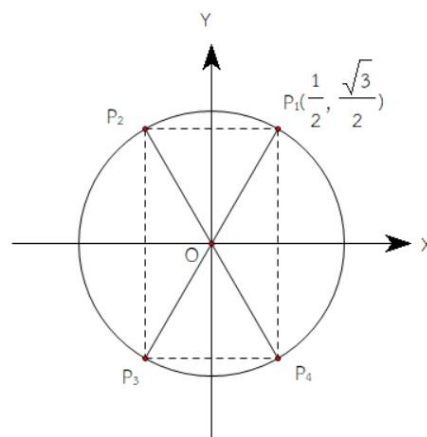
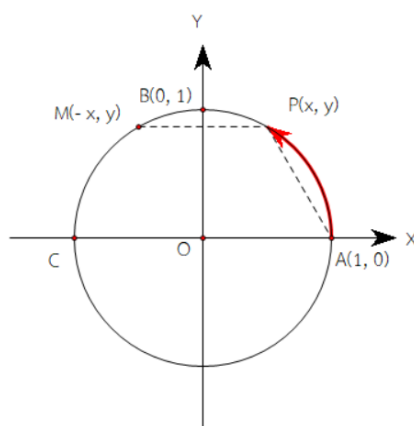
จะได้ $y = \frac{1}{2}$ เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P โดยที่มีแกน Y เป็นแกนสะท้อน

จะได้ จุด M มีพิกัดเป็น $(-x, y)$ และ ส่วนโค้ง CM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย และ

เนื่องจากส่วนโค้งของครึ่งวงกลม ยาว π หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PA

$$\begin{aligned}
 \text{นั่นคือ} \quad PM &= PA \\
 \sqrt{(x - (-x))^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\
 4x^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 \\
 4x^2 + 2x - 2 &= 0 \quad \text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1 \\
 2x^2 + x - 1 &= 0 \\
 (2x-1)(x+1) &= 0
 \end{aligned}$$

จะได้ $x = \frac{1}{2}$ หรือ $x = -1$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

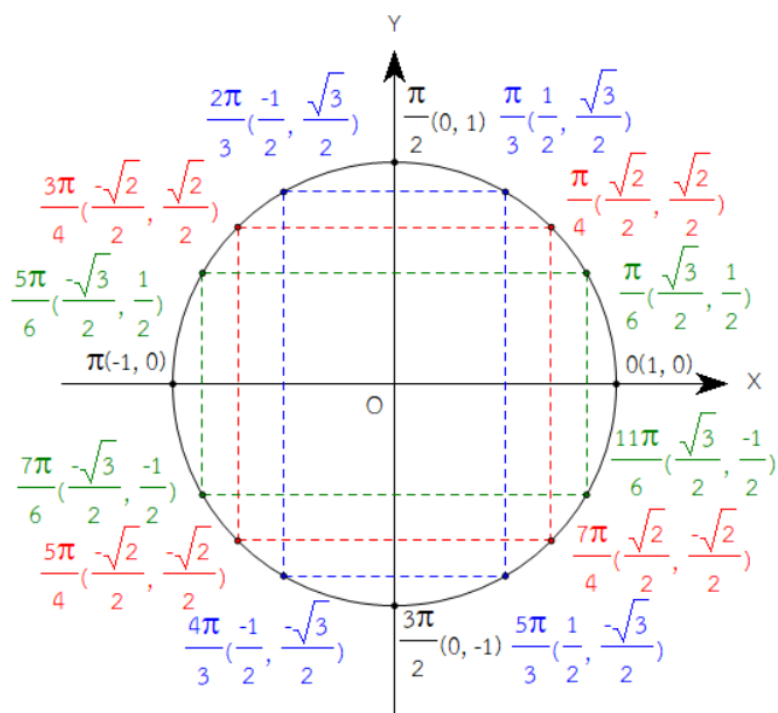
จะได้ $x = \frac{1}{2}$ เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

คือ จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

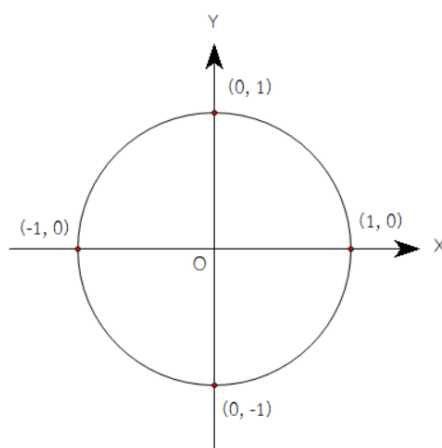
ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนสรุปค่าของของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงบางจำนวน แต่ละจุดภาคเป็นดังนี้



ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

- 1) 4π 2) 0 3) $-3\frac{\pi}{2}$ 4) $-7\frac{\pi}{2}$ 5) $\frac{15\pi}{2}$

วิธีทำ



- 1) $\sin 4\pi = 0$, $\cos 4\pi = 1$ ☐
- 2) $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ ☐
- 3) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ ☐

$$4) \sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 1, \cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 0 \quad \square$$

$$5) \sin\left(\frac{15\pi}{2}\right) = -1, \cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) = 0 \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ

$$1) \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \quad 2) \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4}$$

$$3) \cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{6}$$

วิธีทำ

$$1) \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \square$$

$$2) \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \square$$

$$3) \cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า $\left(\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6}\right) + \left(\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

วิธีทำ จาก $\left(\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6}\right) + \left(\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$$\text{หาค่า } \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ และ } \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

แทนค่า จะได้

$$\left(\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6}\right) + \left(\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-\sqrt{2}-1}{2}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{2}$$

$$\text{ดังนั้นค่าของ } \left(\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6} \right) + \left(\sin \left(\frac{-3\pi}{4} \right) + \cos \left(\frac{-2\pi}{3} \right) \right)$$

$$\text{เท่ากับ } \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{2}$$

□

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) บอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 1	- แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 1 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 1 ได้ระดับดีขึ้นไป
2) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 2 และ ข้อ 3	- แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 2 และ ข้อ 3 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 2 และ ข้อ 3 ได้ระดับดีขึ้นไป
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 3	- แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 3 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
2) ใช้การให้เหตุผลในการบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 1	- แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 1 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การให้เหตุผลในการบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต	ตรวจการทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”	- แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีวินัย อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึกการเข้าเรียน - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนใฝ่เรียนรู้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	การส่งแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”	- แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”	นักเรียนมุ่งมั่นในการทำงานอยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
		- แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 2	- ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การคิดในการวาดรูปแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 1	- ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การคิดในการวาดรูปแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึกการทำงานกลุ่ม - แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้	ตรวจการใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”	- สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้เทคโนโลยีเพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน

7.2 ครูพูดเกริ่นนำเกี่ยวกับ “วงกลมหนึ่งหน่วย” โดยการสนทนากลุ่มกับนักเรียนและใช้ สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” (หน้า 1) ประกอบ

ขั้นสอนและอธิบายทฤษฎี

7.3 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”

7.4 สุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มอธิบายฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนจากตัวอย่างแต่ละตัวอย่างในใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”

7.5 ครูอธิบายความหมาย “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” และตัวอย่างในใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” (หน้า 2 – 7) โดยการสุ่มนักเรียนในชั้นเรียนและสนทนากลุ่มกับนักเรียน นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 2

7.6 ครูอธิบายความหมาย “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” และตัวอย่างในใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” (หน้า 8 – 10) โดยการสุ่มนักเรียนในชั้นเรียนและสนทนากลุ่มกับนักเรียน นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม

ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.7 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ในชั่วโมงที่ 1 ครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

7.8 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” โดยครูสนทนากลุ่มกับนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม

7.9 ครูเฉลยใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” เพิ่มเติม ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” (หน้า 11)

ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.10 จากการทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” และศึกษาใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” นักเรียนสามารถบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริงให้ได้และหาค่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้อย่างไร

7.11 ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน อาจใช้การสุ่มนักเรียนบางคนเพื่อสรุป

ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.12 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” เป็นการบ้าน

7.13 ครูมอบหมายให้นักเรียนทบทวนบทเรียนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” เพื่อเป็นการทบทวนและศึกษาความรู้เพิ่มเติมด้วยตัวเอง

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
<ul style="list-style-type: none"> - ใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” - ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” - แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” 	สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้ 1) บอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้				
2) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์นำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้				
2) ใช้การให้เหตุผลในการบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้				
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต				
2) มีวินัย				
3) ใฝ่เรียนรู้				
4) มุ่งมั่นในการทำงาน				
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้				
2) ใช้การคิดในการวาดรูปแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยได้				
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....
.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....
.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา



ใบความรู้ “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1) บอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้
- 2) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

วงกลมหนึ่งหน่วย

การกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทำได้โดยใช้วงกลมรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเรียกวงกลมดังกล่าวว่า วงกลมหนึ่งหน่วย

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

วงกลมในระนาบ XY ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)

มีรัศมียาว 1 หน่วย

ตัดแกน X ที่จุด (1, 0) และจุด (-1, 0)

ตัดแกน Y ที่จุด (0, 1) และจุด (0, -1)

ความยาวเส้นรอบวงเท่ากับ 2π

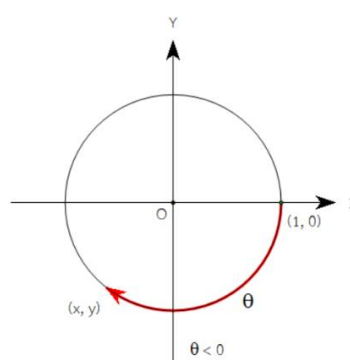
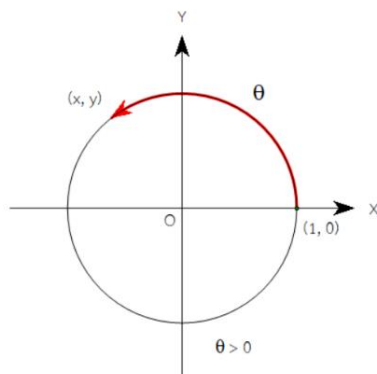
ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ จากจุด (1,0) วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางการวัดดังนี้

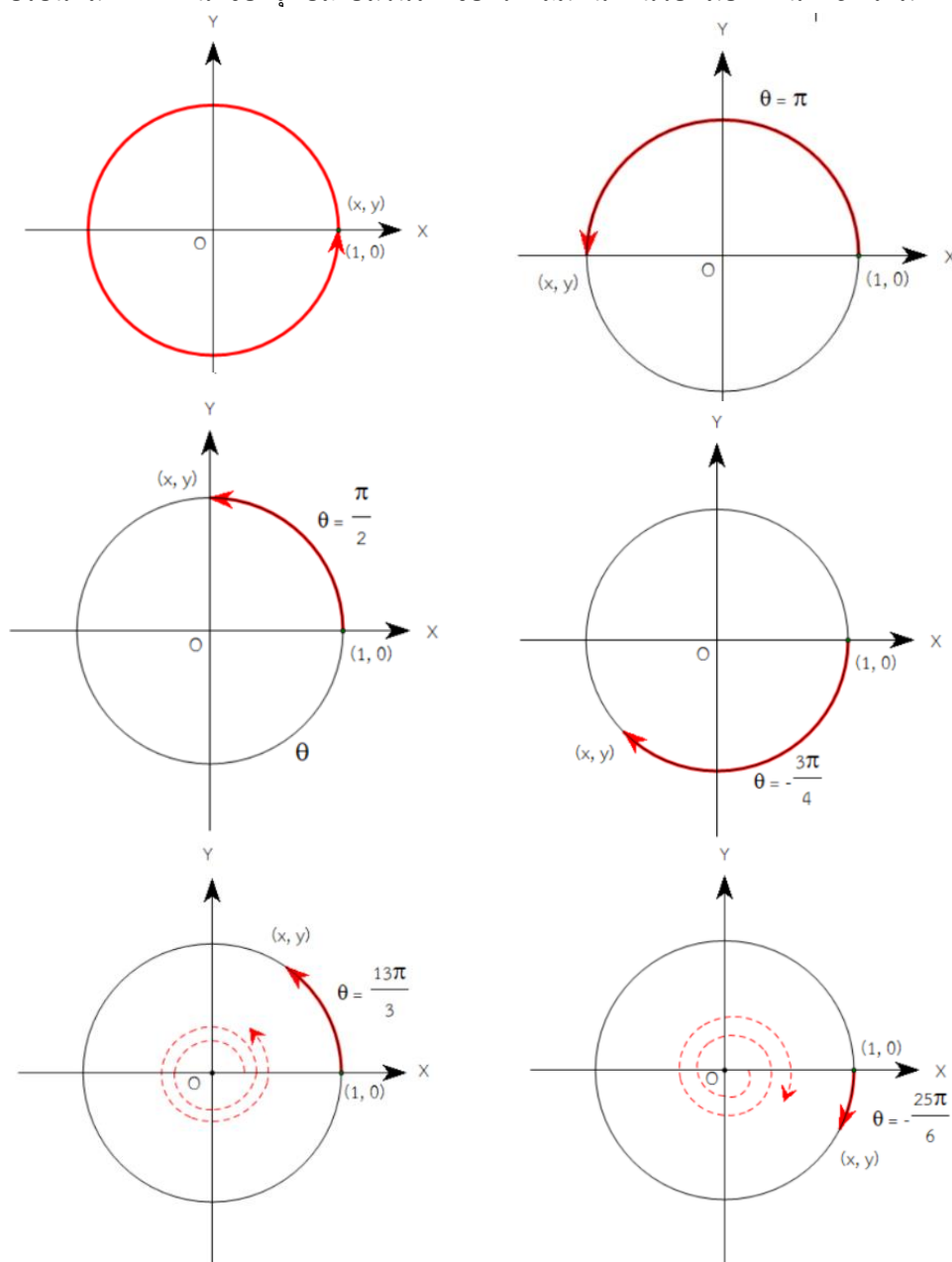
เมื่อ $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด (1, 0) ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เมื่อ $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด (1, 0) ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา

เมื่อ $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด (1, 0)



รูปต่อไปนี้แสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ กัน



จะเห็นว่า เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ จะสามารถหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางการวัดที่กำหนดได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่า วัดส่วนโค้งเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

ดังนั้น จึงสามารถเขียนฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$f(\theta) = x$$

$$g(\theta) = y$$

เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางตามที่กำหนดข้างต้น

เรียกฟังก์ชัน g และ f ดังกล่าวนี้อีกว่า ฟังก์ชันไซน์(sine function) และ ฟังก์ชันโคไซน์(cosine function) ตามลำดับ และจะเขียนแทน g ด้วย \sin และเขียนแทน f ด้วย \cos ดังนี้

$$y = \sin \theta \text{ (อ่านว่า วาย เท่ากับ ไซน์ที่ตา)}$$

$$x = \cos \theta \text{ (อ่านว่า เอกซ์ เท่ากับ คอสที่ตา)}$$

วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

จะเห็นว่า $-1 \leq y \leq 1$ และ $-1 \leq x \leq 1$ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

นั่นคือ เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง ตั้งแต่ -1 ถึง 1 และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง

จากสมการ $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sin \theta$ และ $x = \cos \theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ดังนี้

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1 \text{ เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

หรือ

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

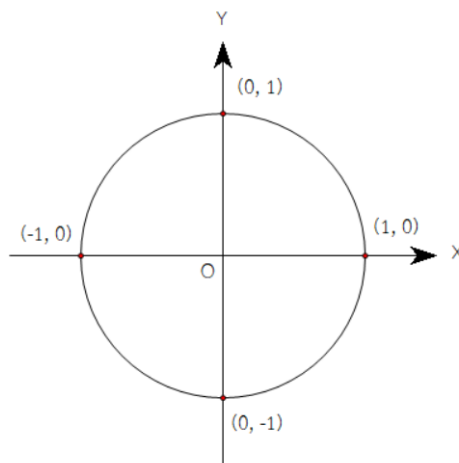
หมายเหตุ $\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)(\cos \theta)$

$\cos \theta^2$ หมายถึง \cos ของจำนวนจริง θ^2

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

ในหัวข้อนี้จะค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ สำหรับ θ บางค่าที่สามารถหาพิกัดของจุดปลาย ส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ได้ด้วยวิธีง่าย ๆ

ถ้า $\theta = 0$ จะได้ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือ $(1, 0)$ ดังรูป ดังนั้น $\sin 0 = 0$ และ $\cos 0 = 1$



เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย และจุด $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ และ $(0, -1)$ เป็นจุดที่แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน โดยแต่ละส่วนยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ทำให้ได้ว่า

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -1$$

$$\sin \pi = 0, \quad \sin (-\pi) = 0$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1, \quad \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

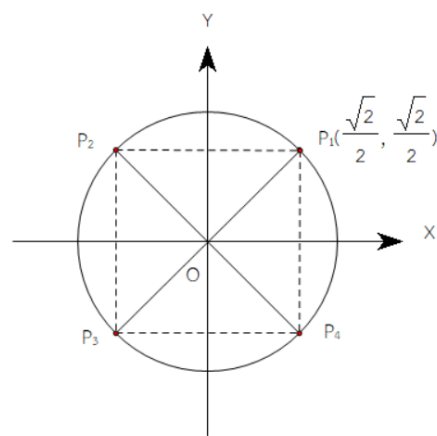
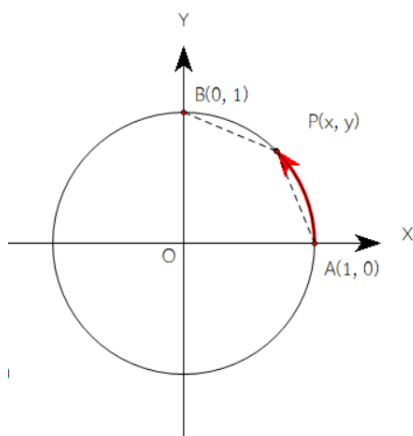
$$\cos \pi = -1, \quad \cos (-\pi) = -1$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0, \quad \cos \left(-\frac{3\pi}{2} \right) = 0$$

จะเห็นว่า ค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม หาได้จาก พิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\left| \frac{n\pi}{2} \right|$ หน่วย โดยวัดในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ ซึ่งจุดปลายนั้นจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้คือ $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ และ $(0, -1)$

ต่อไปนี้จะพิจารณาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB และยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PB ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ

PB

$= PA$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

จะได้

x

$=$

y

แต่

$$x^2 + y^2$$

$=$

1 ($P(x, y)$ อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย)

ดังนั้น

$$2x^2$$

$=$

1

จะได้

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

หรือ

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

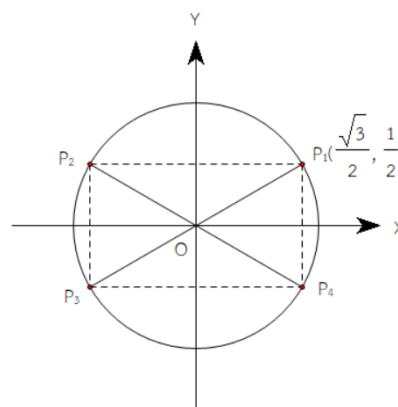
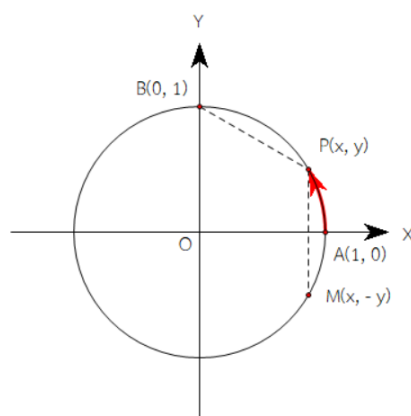
$$\text{จะได้ } x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

$$\text{คือจุด } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{นั่นคือ } \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$ และ $\cos \frac{\pi}{6}$



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง PB ยาว $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P โดยที่มีแกน X เป็นแกนสะท้อน

จะได้ ส่วนโค้ง AM ยาวเท่ากับส่วนโค้ง AP และยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย และ

จุด M มีพิกัดเป็น $(x, -y)$

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PB

นั่นคือ

$$\begin{aligned} PM &= PB \\ \sqrt{(y - (-y))^2} &= \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ 4y^2 &= x^2 + y^2 - 2y + 1 \end{aligned}$$

$$4y^2 + 2y - 2 = 0 \quad \text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(2y - 1)(y + 1) = 0$$

จะได้ $y = \frac{1}{2}$ หรือ $y = -1$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

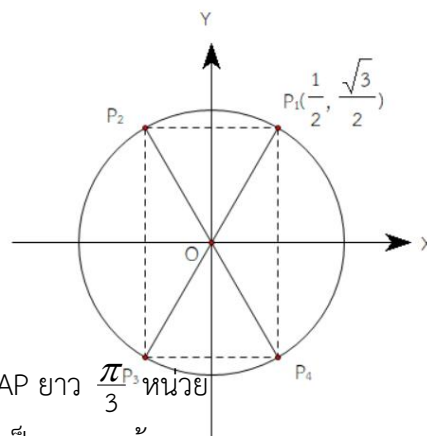
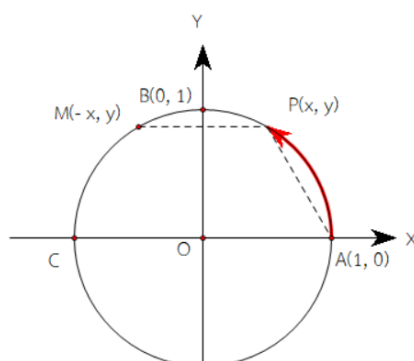
จะได้ $y = \frac{1}{2}$ เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$



ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P โดยที่มีแกน Y เป็นแกนสะท้อน

จะได้ จุด M มีพิกัดเป็น $(-x, y)$ และ ส่วนโค้ง CM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย และ

เนื่องจากส่วนโค้งของครึ่งวงกลม ยาว π หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ $PM = PA$

$$\sqrt{(x - (-x))^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$4x^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0 \quad \text{เนื่องจาก } x^2 + y^2 = 1$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$(2x-1)(x+1) = 0$$

จะได้ $x = \frac{1}{2}$ หรือ $x = -1$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจุดภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

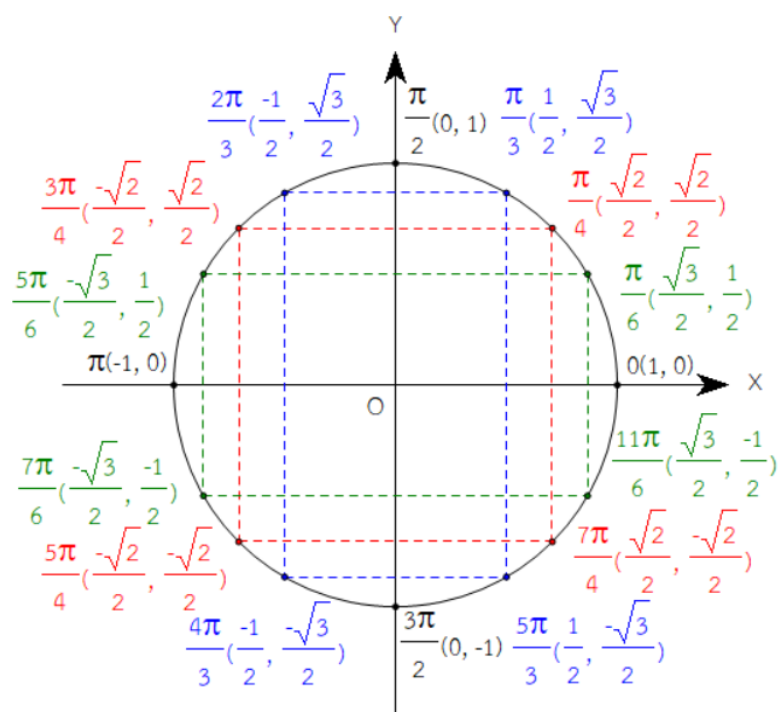
จะได้ $x = \frac{1}{2}$ เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

คือ จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

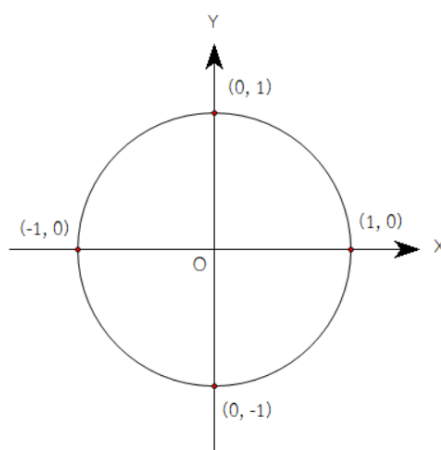
ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนสรุปค่าของของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงบางจำนวน แต่ละจุดภาคเป็นดังนี้



ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

- 2) 4π 2) 0 3) $-3\frac{\pi}{2}$ 4) $-7\frac{\pi}{2}$ 5) $\frac{15\pi}{2}$

วิธีทำ



- 1) $\sin 4\pi = 0$, $\cos 4\pi = 1$ ☐
- 2) $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ ☐
- 3) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ ☐
- 4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 0$ ☐
- 5) $\sin\left(\frac{15\pi}{2}\right) = -1$, $\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) = 0$ ☐

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ

- 2) $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6}$ 2) $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4}$
- 3) $\cos \frac{\pi}{3} - 2\sin \frac{\pi}{6}$

วิธีทำ

- 1) $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ☐
- 2) $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$ ☐
- 3) $\cos \frac{\pi}{3} - 2\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$ ☐

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า $\left(\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6}\right) + \left(\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$

วิธีทำ จาก $\left(\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6}\right) + \left(\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$

$$\text{หาค่า } \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ และ } \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

แทนค่า จะได้

$$\begin{aligned} & \left(\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6}\right) + \left(\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-\sqrt{2}-1}{2}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้นค่าของ $\left(\sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{6}\right) + \left(\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$

เท่ากับ $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{2}$

□



ใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

- 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้
- 2) ใช้การคิดในการวาดรูปแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยได้

คำชี้แจง

ให้นักเรียนร่วมกันระดมความคิด แก้ปัญหา แลกเปลี่ยนเรียนรู้กับสมาชิกในกลุ่มในการทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” แล้วนำเสนอคำตอบที่ถูกต้องชัดเจนที่สุด

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท ☐ หัวหน้ากลุ่ม ☐ รองหัวหน้ากลุ่ม ☐ สมาชิก ☐ เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที

ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....

1. กำหนดจำนวนจริง θ ดังต่อไปนี้ให้นักเรียน วาดรูปแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

1) $\frac{\pi}{3}$

2) $\frac{\pi}{6}$

3) $\frac{3\pi}{4}$

4) 2π

5) $-\pi$

6) $-\frac{4\pi}{3}$

7) $\frac{11\pi}{3}$

8) $-\frac{23\pi}{6}$

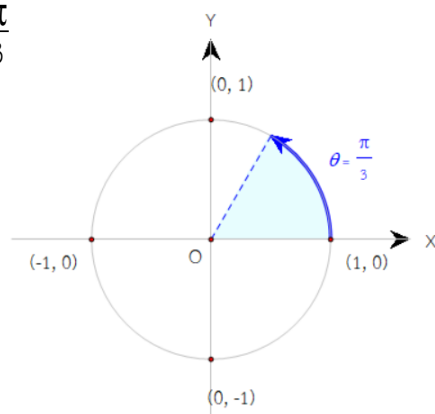
2. จากจำนวนจริง θ ในข้อ 1 ให้นักเรียนหาค่า $\sin\theta$ และ $\cos\theta$

ข้อ	จำนวนจริง θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
1)	$\frac{\pi}{3}$		
2)	$\frac{\pi}{6}$		
3)	$\frac{3\pi}{4}$		
4)	2π		
5)	$-\pi$		
6)	$-\frac{4\pi}{3}$		
7)	$\frac{11\pi}{3}$		
8)	$-\frac{23\pi}{6}$		

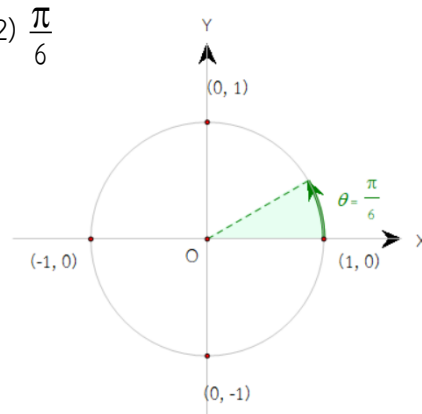
เฉลยใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”

1. กำหนดจำนวนจริง θ ดังต่อไปนี้ให้นักเรียน วาดรูปแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย

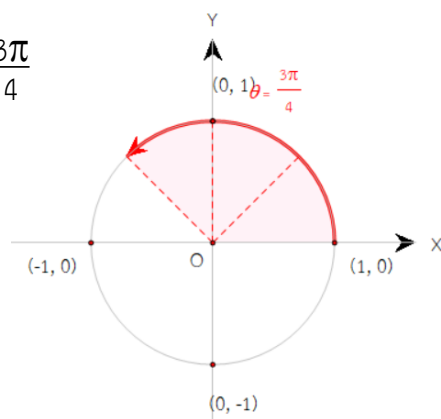
1) $\frac{\pi}{3}$



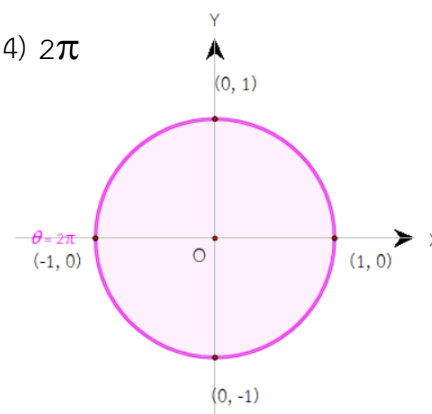
2) $\frac{\pi}{6}$



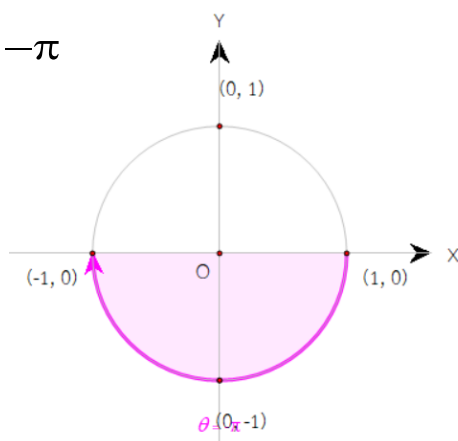
3) $\frac{3\pi}{4}$



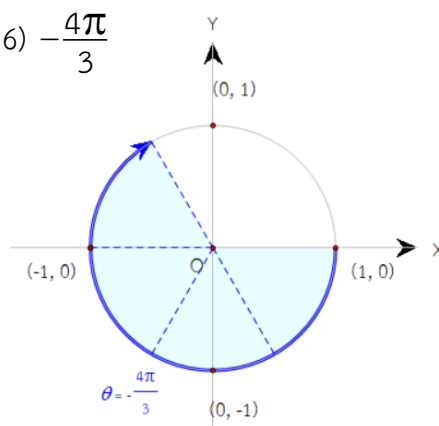
4) 2π



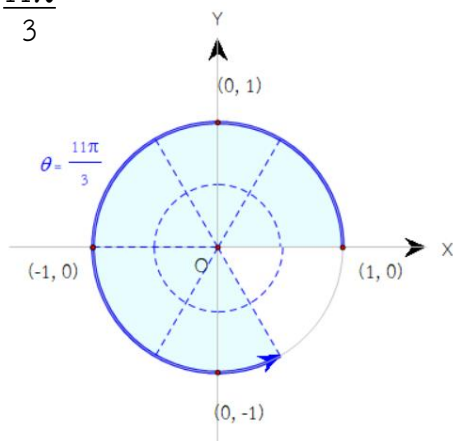
5) $-\pi$



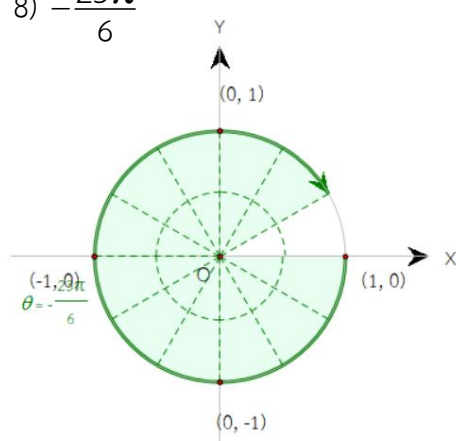
6) $-\frac{4\pi}{3}$



7) $\frac{11\pi}{3}$



8) $-\frac{23\pi}{6}$



2.

ข้อ	จำนวนจริง θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$
1)	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
2)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
3)	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4)	2π	0	1
5)	$-\pi$	0	-1
6)	$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
7)	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
8)	$-\frac{23\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”

จุดประสงค์การเรียนรู้

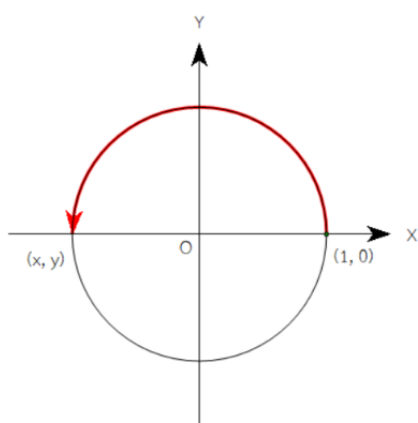
ด้านความรู้

- 1) บอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้
- 2) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้

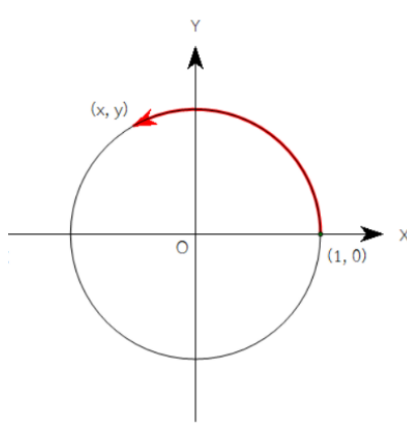
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- 1) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้
- 2) ใช้การให้เหตุผลในการบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้

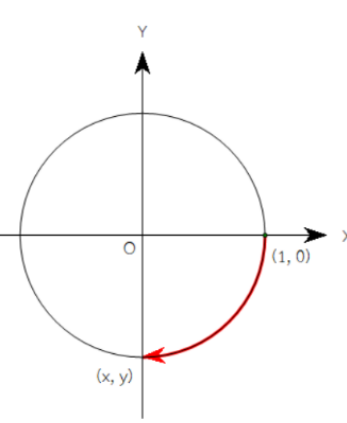
1. จงจับคู่รูปตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยกับจำนวนจริง θ ต่าง ๆ กัน ให้ถูกต้องมากที่สุดกำหนดรูปดังต่อไปนี้



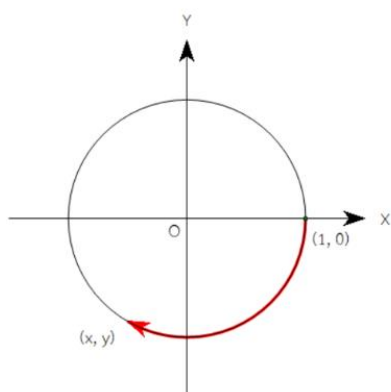
รูป A



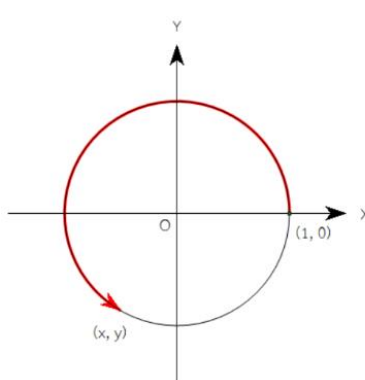
รูป B



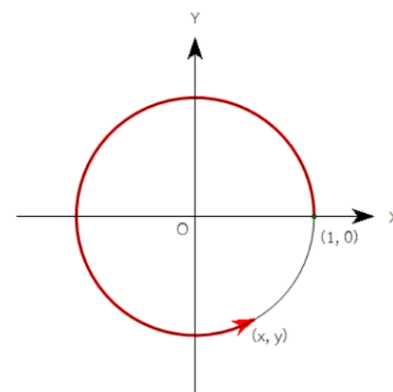
รูป C



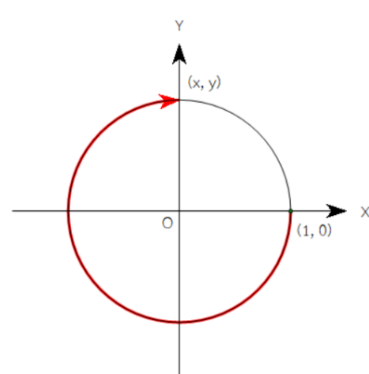
รูป D



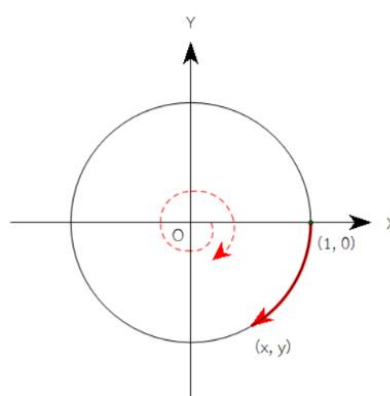
รูป E



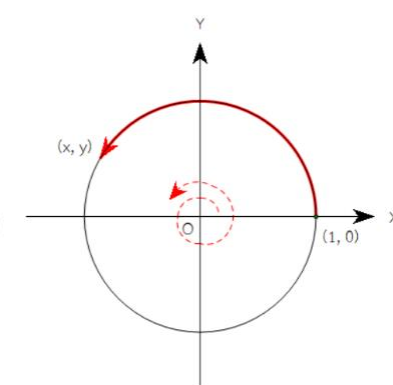
รูป F



รูป G



รูป H



รูป I

1) $\frac{-3\pi}{2}$ คู่กับรูป.....

2) $\frac{5\pi}{3}$ คู่กับรูป.....

3) $-\frac{\pi}{2}$ คู่กับรูป.....

4) π คู่กับรูป.....

5) $\frac{17\pi}{6}$ คู่กับรูป.....

6) $\frac{2\pi}{3}$ คู่กับรูป.....

7) $\frac{4\pi}{3}$ คู่กับรูป.....

8) $-\frac{2\pi}{3}$ คู่กับรูป.....

9) $-\frac{7\pi}{3}$ คู่กับรูป.....

2. จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

1) $\sin \frac{\pi}{2}$

2) $\cos \pi$

3) $\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$

4) $\sin(13\pi)$

5) $\cos \frac{2\pi}{3}$

6) $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

7) $\cos \frac{3\pi}{4}$

8) $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

9) $\sin \frac{5\pi}{6}$

3. จงหาค่า

1) $\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}$

2) $\cos^2 \frac{3\pi}{4} + \sin^2 \frac{3\pi}{4}$

3) $2 \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3}$

4) $\cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}$

5) $\frac{\cos^2 \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2 \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{1 - \sin(-\pi)}$

6) $\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4} - \cos \left(-\frac{5\pi}{3}\right) \sin \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”

1.

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $-\frac{3\pi}{2}$ คู่กับรูป G | 2) $\frac{5\pi}{3}$ คู่กับรูป F | 3) $-\frac{\pi}{2}$ คู่กับรูป C |
| 4) π คู่กับรูป A | 5) $\frac{17\pi}{6}$ คู่กับรูป I | 6) $\frac{2\pi}{3}$ คู่กับรูป B |
| 7) $\frac{4\pi}{3}$ คู่กับรูป E | 8) $-\frac{2\pi}{3}$ คู่กับรูป D | 9) $-\frac{7\pi}{3}$ คู่กับรูป H |

2.

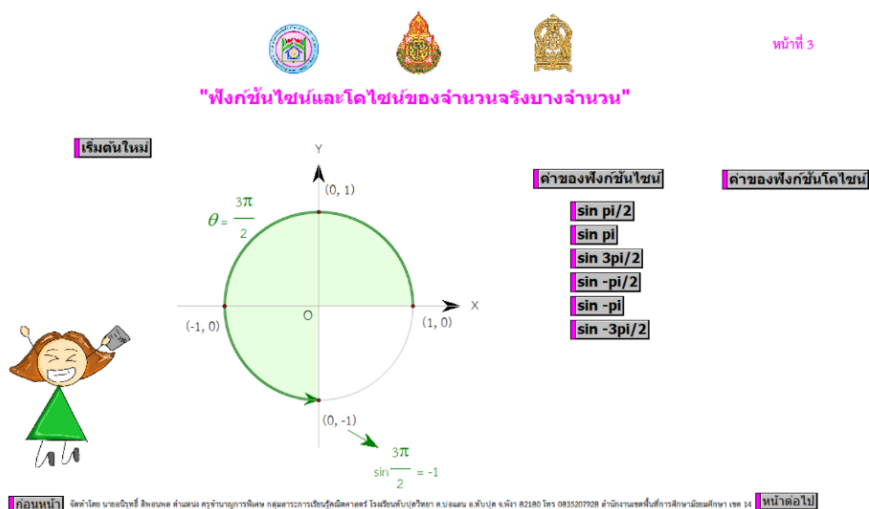
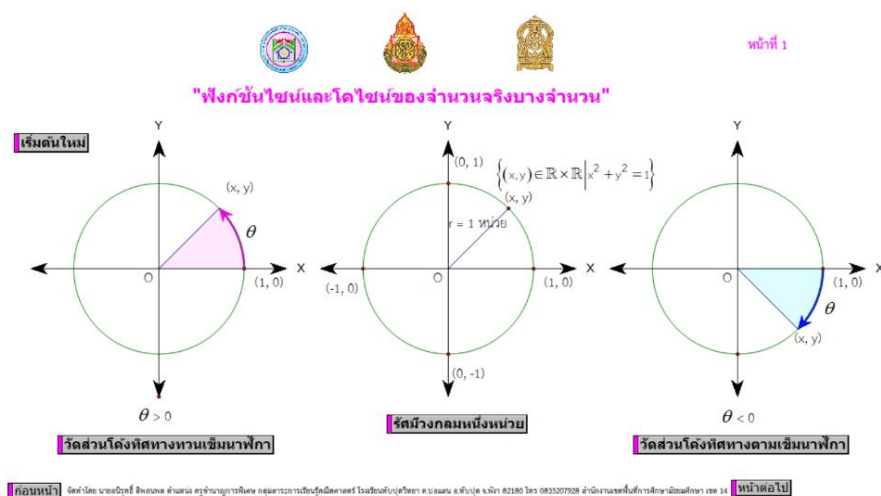
- 1) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
- 2) $\cos \pi = -1$
- 3) $\cos \left(-\frac{7\pi}{2} \right) = 0$
- 4) $\sin (13\pi) = 0$
- 5) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
- 6) $\sin \left(\frac{-4\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 7) $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 8) $\cos \left(\frac{-7\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 9) $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

3.


- 1) $\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
- 2) $\cos^2 \frac{3\pi}{4} + \sin^2 \frac{3\pi}{4} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$
- 3) $2\cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 4) $\cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$
- 5) $\frac{\cos^2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \sin^2 \left(-\frac{\pi}{2} \right)}{1 - \sin(-\pi)} = \frac{(-1)^2 + 0^2}{1 - (0)} = \frac{1+0}{1} = 1$
- 6) $\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4} - \cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) \sin \left(-\frac{7\pi}{6} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ &= \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน" หน้า 1 - 3



สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” หน้า 4 - 6



หน้าที่ 4


"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน"

เริ่มต้นใหม่

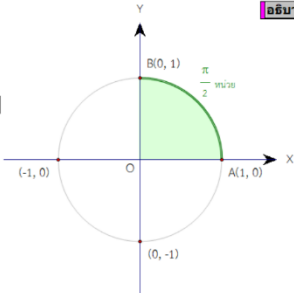
ค่าของ $\sin \frac{\pi}{4}$ และ $\cos \frac{\pi}{4}$

แสดง

- 1) จุด P(x,y)
- 2) ส่วนโค้ง AB
- 3) ส่วนโค้ง AP
- 4) คอร์ด PB กับ คอร์ด PA



เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย



อธิบาย

นั่นคือ $PB = PA$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

จะได้ $x = y$

เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$ $P(x, y)$ อยู่บนวงกลมยูนิตหน่วย

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

จะได้ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$


เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในซอกภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

คือจุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ก่อนหน้า ลิขสิทธิ์ © นายนฤภัทร อึ้งไพศาล สำนักพิมพ์ ครูจำวันการศึกษาคณิตศาสตร์ กรุงเทพมหานคร ๒๕๖๒ หน้า ๔ **หน้าต่อไป**



หน้าที่ 5

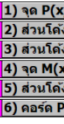
"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน"

เริ่มต้นใหม่

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{6}$ และ $\cos \frac{\pi}{6}$

แสดง

- 1) จุด P(x,y)
- 2) ส่วนโค้ง AB
- 3) ส่วนโค้ง AP
- 4) จุด M(x,-y)
- 5) ส่วนโค้ง AM
- 6) คอร์ด PM กับ คอร์ด PB



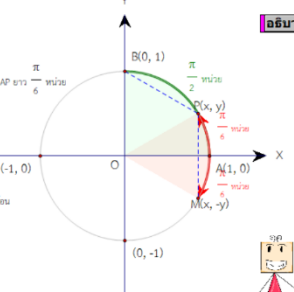
ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P โดยที่ M อยู่บนแกน X

จะได้ ส่วนโค้ง AM ยาวเท่ากับส่วนโค้ง AP และ

ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย และจุด M มีพิกัดเป็น (x, -y)

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PB



อธิบาย

นั่นคือ $PM = PB$

$$\sqrt{(x-y)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$4x^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$

$$4x^2 + 2y - 2 = 0$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(2y - 1)(y + 1) = 0$$

จะได้ $y = \frac{1}{2}$ หรือ $y = -1$


เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในซอกภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

$$y = \frac{1}{2}$$
 และ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

คือจุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ก่อนหน้า ลิขสิทธิ์ © นายนฤภัทร อึ้งไพศาล สำนักพิมพ์ ครูจำวันการศึกษาคณิตศาสตร์ กรุงเทพมหานคร ๒๕๖๒ หน้า ๕ **หน้าต่อไป**



หน้าที่ 6

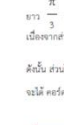
"ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน"

เริ่มต้นใหม่

ค่าของ $\sin \frac{\pi}{3}$ และ $\cos \frac{\pi}{3}$

แสดง

- 1) จุด P(x,y)
- 2) ส่วนโค้ง AB
- 3) ส่วนโค้ง CM
- 4) ส่วนโค้ง PM
- 5) คอร์ด PM กับ คอร์ด PA



ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P โดยที่ M อยู่บนแกน Y

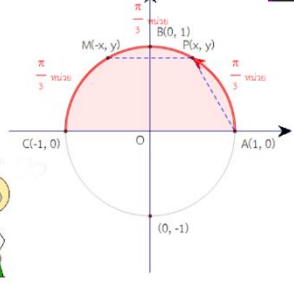
จะได้ ส่วนโค้ง CM ยาวเท่ากับส่วนโค้ง AP และ

ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย และจุด M มีพิกัดเป็น (x, y)

เนื่องจากส่วนโค้ง AC ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PA



อธิบาย

นั่นคือ $PM = PA$

$$\sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$4x^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$(2x - 1)(x + 1) = 0$$

จะได้ $x = \frac{1}{2}$ หรือ $x = -1$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในซอกภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

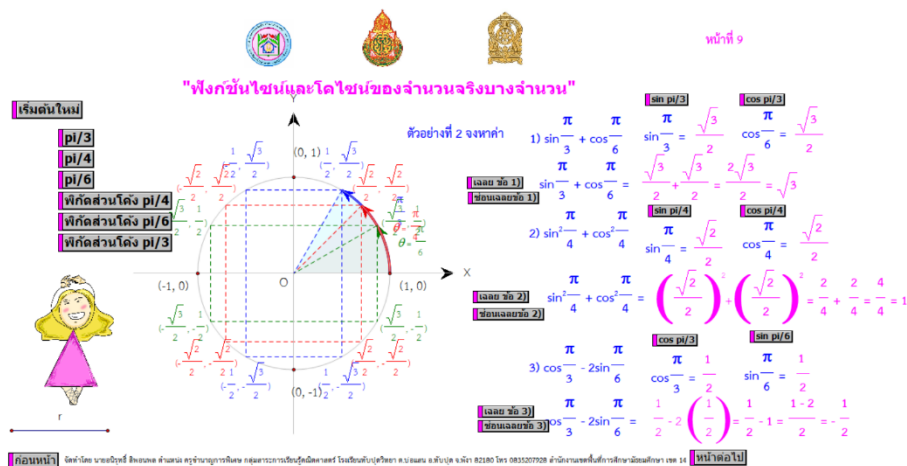
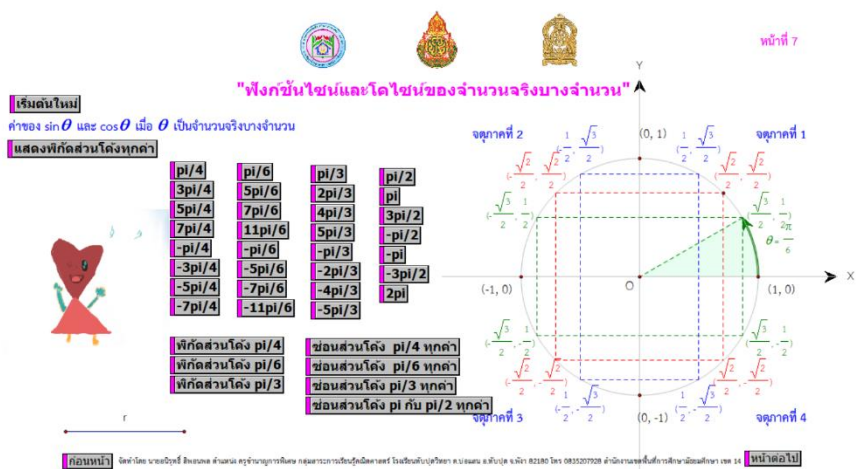
$$x = \frac{1}{2}$$
 และ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

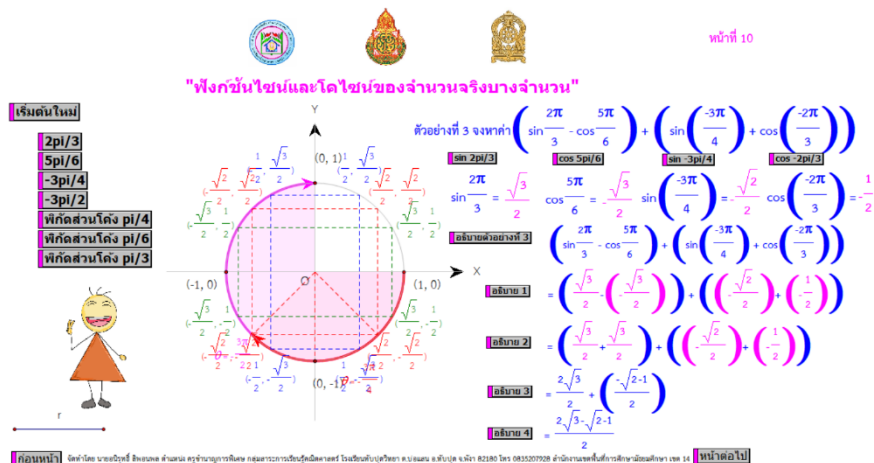
คือจุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ นั่นคือ $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ก่อนหน้า ลิขสิทธิ์ © นายนฤภัทร อึ้งไพศาล สำนักพิมพ์ ครูจำวันการศึกษาคณิตศาสตร์ กรุงเทพมหานคร ๒๕๖๒ หน้า ๖ **หน้าต่อไป**

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง
 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” หน้า 4 - 6



สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” หน้า 7 - 8



เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
ด้านความรู้ 1) บอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 9 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 1 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) หาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวนได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 2 และข้อ 3 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 12 - 15 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 2 และข้อ 3 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 8 - 11 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 2 และข้อ 3 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 7 ข้อ	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 2 และข้อ 3 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ต่ำกว่า 3 ข้อ หรือมีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 2 และข้อ 3 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ นำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้	สามารถแสดงวิธีทำ โจทย์แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 2 และข้อ 3 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 12 - 15 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำ โจทย์แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 2 และข้อ 3 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 8 - 11 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำ โจทย์แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 2 และข้อ 3 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ 4 - 7 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำ โจทย์แบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 2 และข้อ 3 ได้อย่างถูกต้อง สมบูรณ์ต่ำกว่า 3 ข้อ หรือมีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 2 และข้อ 3 แต่ไม่ถูกต้อง สมบูรณ์
2) ใช้การให้เหตุผลในการบอกตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 9 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อที่ 1 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1. ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” โดยคัดลอกจากผู้อื่น เป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” คัดลอกจากผู้อื่น
2. มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อย โดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อย บางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน	แต่งกายไม่เรียบร้อยหรือไม่แก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน
3. ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรงเวลา	การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที
4. มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ไม่ครบทุกข้อหรือไม่ถูกต้องหรือไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 2 “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่า “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ได้	สามารถเขียนแสดงวิธีทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 - 8 ข้อ	สามารถเขียนแสดงวิธีทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 5 ข้อ	สามารถเขียนแสดงวิธีทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการเขียนแสดงวิธีทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การคิดในการวาดรูปแสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยได้	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 - 8 ข้อ	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 5 ข้อ	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 1 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงาน “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ข้อ 1 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	ไม่มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน ไม่แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มหรือช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน”	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ทบทวนและสรุปเนื้อหาทุกครั้ง	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นส่วนใหญ่	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นบางครั้ง	ไม่ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน” ทบทวนและสรุปเนื้อหา

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน
พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ :
บริษัท ธนัทธการพิมพ์ จำกัด.
- พิชิต ฤทธิจรูญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : แฮสออฟ
เคอร์มิสท์.
- มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็น
สำคัญ.** พระนครศรีอยุธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัย
เทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.
- ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฏานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-
NET คณิตศาสตร์ ม.6.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.**
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตาม
หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ:
โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.** พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์
มหาวิทยาลัย.
- สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 5. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.
- อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรง
พิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.