แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201 **ภาคเรียนที่ 1**

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

สาระการเรียนรู้ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม **เวลา 3 ชั่วโมง**

1. ผลการเรียนรู้

เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

ฟังก์ชันตรีโกณมิติในแง่ของมุมหรือในแง่ของความยาวส่วนโค้งของ วงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม ค่าของฟังก์ชันตรีโกณของจำนวนเหล่านั้นจะเท่ากัน

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 เปลี่ยนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศาหรือมุมที่มีหน่วยเป็นองศาเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนได้

4.1.2 หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การแก้ปัญหาในการนำฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมไปหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้

4.2.2 เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.2 มีวินัย

4.3.3 ใฝ่เรียนรู้

4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

4.4.1 ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแก้ปัญหาโจทย์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้

4.4.2 ใช้การแก้ปัญหาโจทย์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้

4.4.3 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้

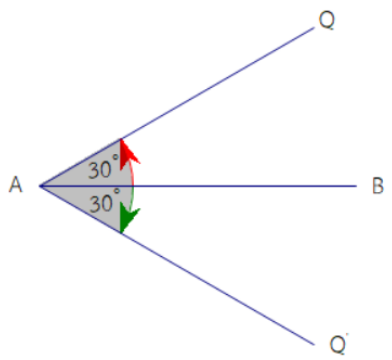
4.4.4 ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" ได้

5. เนื้อหา/สาระ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

มุมและการวัดมุม

กำหนดส่วนของเส้นตรง AP ต้องการสร้าง $P\hat{A}Q$ ให้มีขนาด 30 องศา โดยใช้โพรแทรกเตอร์วัดขนาดของมุม ทำได้โดยวางโพรแทรกเตอร์ทับส่วนของเส้นตรง AP ซึ่งสามารถวัดขนาดของมุมที่ต้องการสร้างได้ 2 แบบ คือ วัดในทิศทวนเข็มนาฬิกาและวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป



เรียกจุด A ว่า จุดยอด (vertex) ของมุม

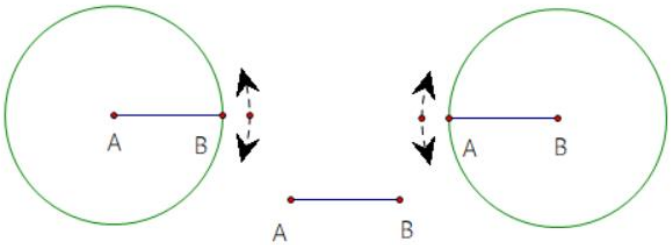
เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า ด้านเริ่มต้น (initial side) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ และ AQ' ว่า ด้านสิ้นสุด (terminal side)

ดังนั้นการวัดขนาดของมุมทำได้โดยการวัดจากด้านเริ่มต้นไปยังด้านสิ้นสุด สำหรับการบอกขนาดของมุมมีข้อตกลงว่า ถ้าวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงบวก แต่ถ้าวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงลบ

หน่วยของมุมมี 2 หน่วย เป็นองศาและเรเดียน

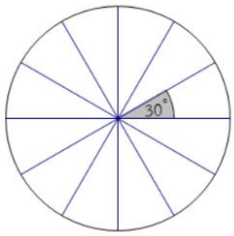
1. องศา มุมที่เกิดจากการหมุนส่วนเส้นตรงรอบจุดปลายไปครบ 1 รอบ กำหนดให้มี 360°



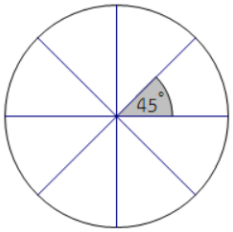
ถ้าแบ่งมุม 1 รอบ เป็น 360 ส่วนเท่า ๆ กัน จะได้มุมย่อยมีขนาด 1°

ดังนั้น มุม 1° มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{360}$ เท่าของมุม 1 รอบ

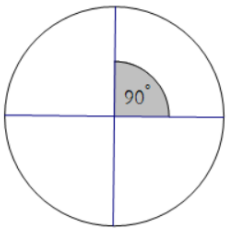
ตัวอย่างที่ 1 ถ้ามุมมีขนาด $30^{\circ}, 45^{\circ}$ และ 90°



มุม 30° มีค่าเท่ากับ $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$ เท่าของมุม 1 รอบ



มุม 45° มีค่าเท่ากับ $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ เท่าของมุม 1 รอบ

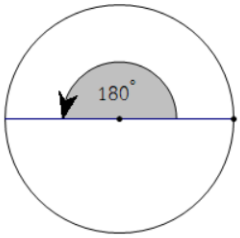


มุม 90° มีค่าเท่ากับ $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ เท่าของมุม 1 รอบ

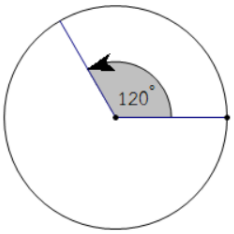
ในทางกลับกัน จากการหมุน 1 รอบ ได้มุมเท่ากับ 360°

ดังนั้น ถ้ามีการหมุน $\frac{1}{k}$ รอบ ได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{k}$

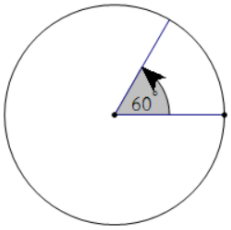
ตัวอย่างที่ 2 กำหนดมุมจากการหมุนรอบจุดศูนย์กลาง $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ และ $\frac{1}{6}$ รอบ



หมุน $\frac{1}{2}$ รอบ ได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$



หมุน $\frac{1}{3}$ รอบ ได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$



หมุน $\frac{1}{6}$ รอบ ได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

สรุป

มุม θ° มีค่าเท่ากับ $\frac{\theta}{360}$ เท่าของมุม 1 รอบ

ในทางกลับกัน การหมุน 1 รอบ ได้มุมเท่ากับ 360°

ถ้ามีการหมุน $\frac{1}{k}$ รอบ ได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{k}$

ถ้าแบ่งมุม 1 องศาย่อยต่อไปอีกจะได้ลิปดาและพิลิปดา ดังต่อไปนี้

แบ่งมุม 1 องศา เป็นส่วนย่อยเท่า ๆ กัน 60 ส่วน เรียก 1 ส่วนว่า 1 ลิปดา (1′)

แบ่งมุม 1 ลิปดา เป็นส่วนย่อยเท่า ๆ กัน 60 ส่วน เรียก 1 ส่วนว่า 1 พิลิปดา(1″)

$$1^\circ = 60'$$
$$1' = 60''$$

ตัวอย่างที่ 3 มุม $15^{\circ}32'$ มีกี่พิลิปดา

วิธีทำ มุม 15° มีค่า $15 \times 60 = 900'$

มุม $900' + 32' = 932'$

มีค่า $932 \times 60 = 55{,}920''$

ดังนั้น มุม $15^{\circ}32'$ มีค่า 55,920 พิลิปดา □

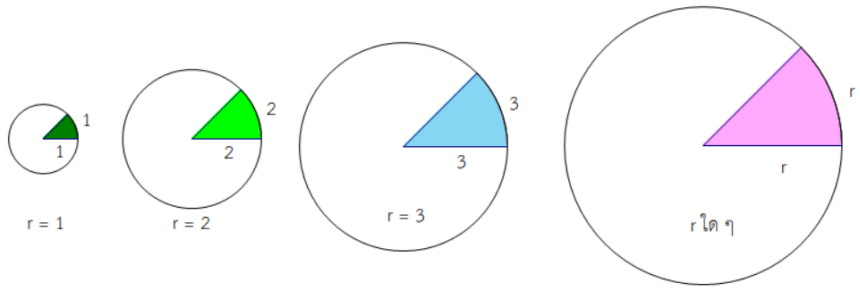
ตัวอย่างที่ 4 มุม $654{,}840''$ เป็นกี่องศา

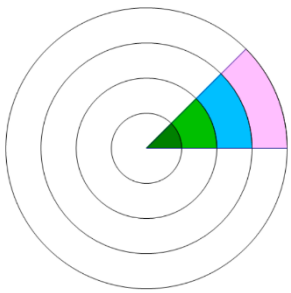
วิธีทำ มุม $654{,}840''$ มีค่า $\frac{654{,}840}{60} = 10{,}914'$

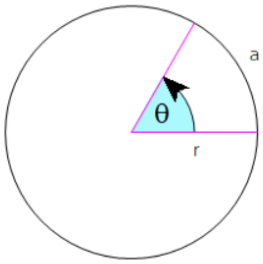
มุม $10{,}914'$ มีค่า $\frac{10{,}914}{60} = 181.9^{\circ}$

ดังนั้น มุม $654{,}840''$ มีค่า 181.9° □

2. เรเดียน มุมขนาด 1 เรเดียน มีค่าเท่ากับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม(รัศมี r) ซึ่งรองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมี (r) ไม่ว่าวงกลมจะมีรัศมีเท่าใด มุมที่ได้ก็มีขนาดเท่ากัน มุมขนาด θ เรเดียน มีค่าเท่ากับมุมที่ศูนย์กลางของวงกลม(รัศมี r) ซึ่งรองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับ a







ให้ θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง มีหน่วยเป็นเรเดียน

r เป็นรัศมีของวงกลม

a เป็นความยาวส่วนโค้งที่รองรับมุม θ จะได้

สำหรับ r ใด ๆ มุมที่รองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว r หน่วย จะมีขนาด θ เรเดียน

มุมที่รองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว $2\pi r$ หน่วย จะมีขนาด $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ เรเดียน

จึงสรุปได้ว่า มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมใด ๆ หนึ่งรอบจะมีขนาด 2π เรเดียน

การเปรียบเทียบหน่วยของมุม

เราสามารถเปลี่ยนหน่วยของมุมได้ โดยถือว่ามุมหนึ่งรอบมีค่าเท่ากับ 360 องศา และมีค่าเท่ากับ 2π เรเดียน

มุม 360 องศา เท่ากับ 2π เรเดียน

ดังนั้น 1 องศา เท่ากับ $\frac{\pi}{180}$ (ประมาณ 0.01745 เรเดียน)

มุม 2π เรเดียน เท่ากับ 360 องศา

ดังนั้น 1 เรเดียน เท่ากับ $\frac{180}{\pi}$ องศา (ประมาณ $57^{\circ}18'$)

ตัวอย่างที่ 5 จงเปลี่ยนมุมขนาด 75 องศาเป็นเรเดียน

วิธีทำ มุมขนาด 75 องศา เท่ากับ $75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ เรเดียน □

ตัวอย่างที่ 6 จงเปลี่ยนมุมขนาด 145 องศาเป็นเรเดียน

วิธีทำ มุมขนาด 145 องศา เท่ากับ $145 \times \frac{\pi}{180} = \frac{29\pi}{36}$ เรเดียน □

ตัวอย่างที่ 7 จงเปลี่ยนมุมขนาด $\frac{5\pi}{24}$ เรเดียนเป็นองศา

วิธีทำ มุมขนาด $\frac{5\pi}{24}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{5\pi}{24} \times \frac{180}{\pi} = \frac{75}{2} = 37^{\circ}30'$ □

ตัวอย่างที่ 8 จงเปลี่ยนมุมขนาด $\frac{7\pi}{5}$ เรเดียนเป็นองศา

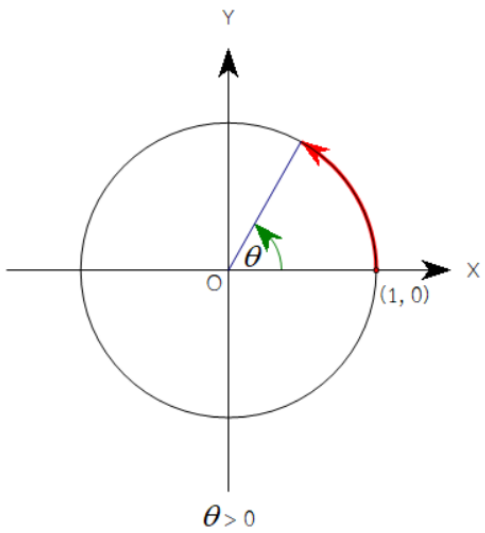
วิธีทำ มุมขนาด $\frac{7\pi}{5}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{7\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = 252^{\circ}$ □

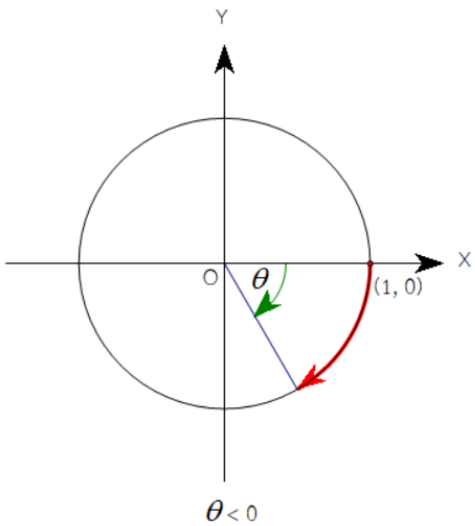
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กล่าวมาแล้วนั้น เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ต่อไปนี้จะพิจารณาถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เมื่อจุดยอดของมุมอยู่ที่จุด (0, 0) และด้านเริ่มต้นของมุมนั้นทาบไปตามแกน X ทางบวก จะกล่าวว่ามุมนั้นอยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน (standard position)

สมมติว่า มุมหนึ่งมีขนาด θ เรเดียน อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน





เนื่องจากส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 1 เรเดียนนั้น ยาว 1 หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด θ เรเดียน จึงยาว θ หน่วย

จะเห็นว่า จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมขนาด θ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นเพียงจุดเดียว และเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด (1, 0) ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ เช่น

จุดที่ด้านที่จุดสิ้นสุดของมุม $-\frac{\pi}{4}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วย คือจุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด (0, 1) ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

ดังนั้น เมื่อมุมขนาด θ เรเดียนให้หนึ่งมุม จะหาจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมนั้นตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยเพียงจุดเดียว และจุดนั้นจะเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ด้วย หรือส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยรองรับมุม θ เรเดียน จะยาว $|\theta|$ หน่วย จะเห็นว่า ไม่ว่าจะใช้วิธีวัดมุมหรือวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลม จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยจะเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้ง

จึงสรุปได้ว่า ไม่ว่านิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติในแง่ของมุมหรือในแง่ของความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม ค่าของฟังก์ชันตรีโกณของจำนวนเหล่านั้นจะเท่ากัน เช่น $\cos\theta$ อาจหมายถึง cos ของมุมที่มีขาด θ เรเดียน หรือ cos ของจำนวนจริง θ ก็ได้

ในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศานั้นอาจหาได้โดยเปลี่ยนหน่วยวัดขนาดของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียนก่อน แล้งจึงหาค่าของฟังก์ชันนั้นเช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงทั่ว ๆ ไป

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $\sin 30^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ เรเดียน

ดังนั้น $\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ □

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ $\tan\left(-330^\circ\right)$

วิธีทำ

$$\tan\left(-330^\circ\right) = \frac{\sin\left(-330^\circ\right)}{\cos\left(-330^\circ\right)}$$

$$= \frac{-\sin 330^\circ}{\cos 330^\circ}$$

$$= \frac{-\sin\left(360^\circ - 30^\circ\right)}{\cos\left(360^\circ - 30^\circ\right)}$$

$$= \frac{-\left(-\sin 30^\circ\right)}{\cos 30^\circ}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ □

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่า $\sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec\left(-765^\circ\right)\cos\left(-540^\circ\right)$

วิธีทำ หาค่า

$$\sin 300^\circ = \sin\left(360^\circ - 60^\circ\right) = -\sin 60^\circ = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \frac{\sin 240^\circ}{\cos 240^\circ} = \frac{\sin\left(180^\circ + 60^\circ\right)}{\cos\left(180^\circ + 60^\circ\right)}$$

$$= \frac{-\sin 60^\circ}{-\cos 60^\circ} = \frac{-\sin\frac{\pi}{3}}{-\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec\left(-765^\circ\right) = \frac{1}{\cos\left(-765^\circ\right)} = \frac{1}{\cos 765^\circ} = \frac{1}{\cos\left(720^\circ + 45^\circ\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\cos\left(-540^\circ\right) = \cos 540^\circ = \cos\left(3 \cdot 180^\circ\right) = \cos 3\pi = -1$$

แทนค่า จะได้ $\sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec\left(-765^\circ\right)\cos\left(-540^\circ\right)$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\right)(-1)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$ □

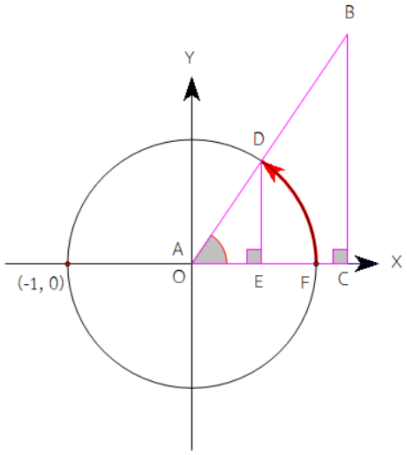
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ประโยชน์ที่สำคัญประการหนึ่งของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ การนำไปใช้หาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้ ต่อไปนี้จะพิจารณาฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ดังนั้น $B\hat{A}C < 90^{\circ}$

ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ

ให้ $B\hat{A}C$ อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน และส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม A คือส่วนโค้ง FD ดังรูป



ดังนั้น $\sin A = \sin\left(\text{ความยาวของส่วนโค้ง}FB\right) = DE$

$\cos A = \cos\left(\text{ความยาวของส่วนโค้ง}FD\right) = AE$

เนื่องจาก รูปสามเหลี่ยม ADE คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม ABC จะได้

$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$ และ $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$

แต่ $AD = 1$ ดังนั้น $DE = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ และ $AE = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

นั่นคือ $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$ และ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$

สรุปได้ว่า

$$\sin A \quad \text{คือ} \quad \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

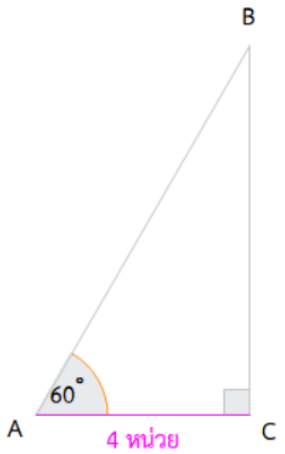
$$\cos A \quad \text{คือ} \quad \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A \quad \text{คือ} \quad \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}$$

ส่วนค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ของมุม A จะเป็นส่วนกลับของค่าฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ตามลำดับ สมการข้างต้นมีประโยชน์ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 12 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ด้าน AC ยาว 4 หน่วย และมุม A มีขนาด 60° จงหาความยาวด้าน AB และ BC

วิธีทำ ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ



เนื่องจาก $\cos 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{c}$

จะได้ $c = \frac{4}{\cos 60^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{1} = 8$

เนื่องจาก $\tan 60^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{4}$

จะได้ $a = 4\tan 60^\circ = 4\sqrt{3}$

ดังนั้น ด้าน AB และ BC ยาว 8 และ $4\sqrt{3}$ หน่วย ตามลำดับ □

ตัวอย่างที่ 13 ให้มุม A เป็นมุมแหลม และ $\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A

วิธีทำ จาก $\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก

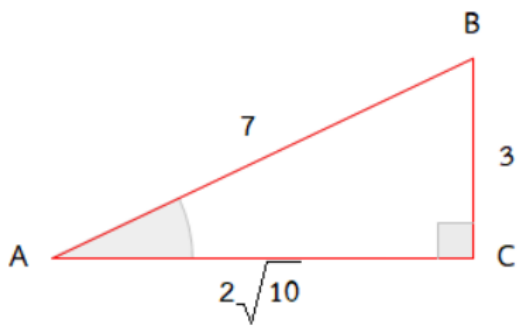
โดยที่ด้านประชิดมุม A ยาว $2\sqrt{10}$ หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 7 หน่วย

นั่นคือ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ จะได้ว่า a = $2\sqrt{10}$ และ c = 7

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ว่า $b = \sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{49-40} = \sqrt{9} = 3$

จึงสามารถเขียนรูปสามเหลี่ยมมุฉากได้ ดังรูป



ดังนั้น $\sin A = \frac{3}{7}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{7}{3}$

$\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$, $\sec A = \frac{7}{2\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$

$\tan A = \frac{3}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$, $\cot A = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ □

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{1}{4}$ และ $\tan\theta < 0$ จงหา $\sec\theta$

วิธีทำ วิธีที่ 1 เนื่องจาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

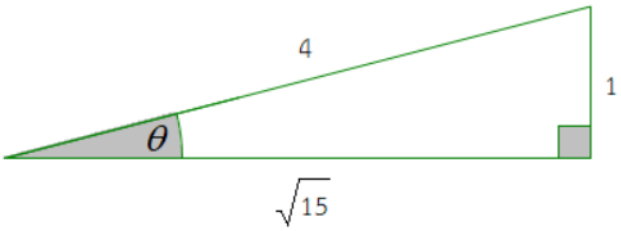
จะได้ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

นั่นคือ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ เนื่องจาก $\tan\theta < 0$

ดังนั้น $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$ □

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $\sin\theta = \frac{1}{4}$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมหนึ่งมีขนาดเป็น θ โดยที่ตรงข้ามมุมที่มีขนาด θ ยาว 1 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 4 หน่วย จะได้ประชิดมุมที่มีขนาด θ ยาว

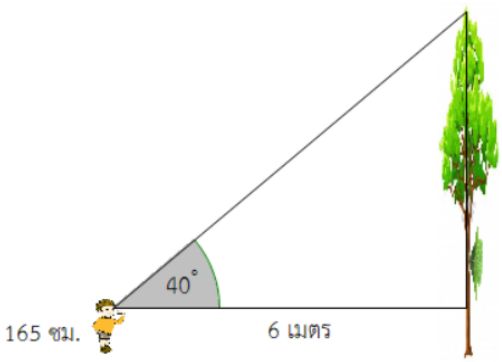
$\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$ หน่วย ดังรูป



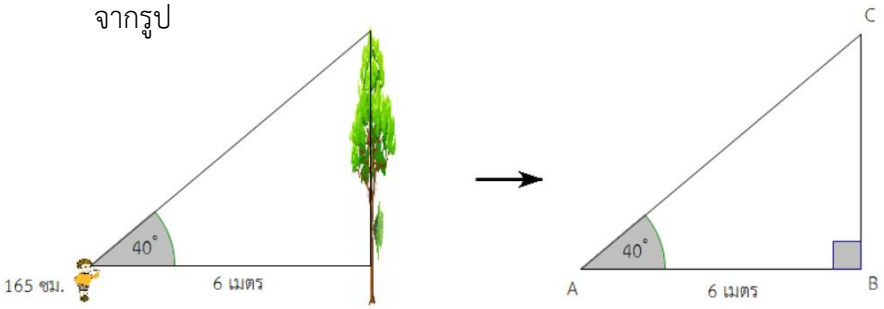
เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $\tan\theta < 0$ จะได้ว่าอยู่ในจตุภาคที่ 2

นั่นคือ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$ □

ตัวอย่างที่ 15 เด็กคนหนึ่งสูง 165 เซนติเมตร อยู่ห่างจากต้นไม้ต้นหนึ่งระยะ 6 เมตร มุมที่วัดจากสายตาของเด็กคนนี้ไปยังยอดต้นไม้มีขนาด 40 องศา ดังรูป ต้นไม้มีความสูงเท่าไร



วิธีทำ จากรูป



จะได้ $\tan 40^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{6}$

นั่นคือ $BC = 6\tan 40^\circ \approx 6(0.8391) \approx 5.0346$

ดังนั้น ต้นไม้มีความสูงประมาณ 5.0346 + 1.65 = 6.6846 เมตร □

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) เปลี่ยนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศา หรือมุมที่มีหน่วยเป็นองศาเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 1 และข้อ 2	- แบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 3 และข้อ 4	- แบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 3 และข้อ 4 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 3 และข้อ 4 ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาในการนำฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมไปหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 5 - 10	- แบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 5 - 10 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาในการนำฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมไปหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 5 - 10	- แบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 5 - 10 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต	ตรวจการทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”	- แบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริตอยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีวินัยอยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
3) ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึกการเข้าเรียน - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนใฝ่เรียนรู้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	- การส่งแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”	- แบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมุ่งมั่นในการทำงานอยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแก้ปัญหาโจทย์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”	- ใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การสื่อสารในการนำเสนอการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”	- ใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาเพื่อค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึกการทำงานกลุ่ม - แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" ได้	ตรวจการใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม"	- สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้เทคโนโลยีเพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

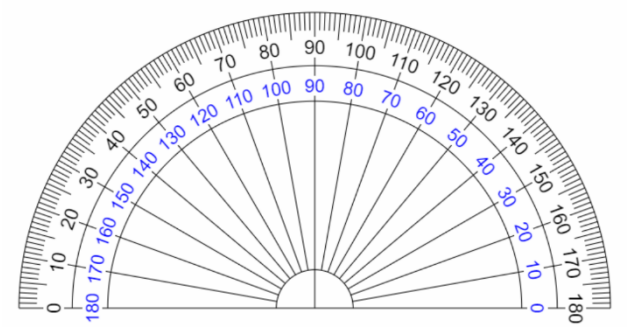
ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน

7.2 ครูทบทวนเรื่อง "มุมและการวัดมุม" โดยการสนทนาถามตอบกับนักเรียนและใช้ สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" ประกอบ

7.3 ครูยกตัวอย่างรูปไม้โปรแทรกเตอร์ ดังรูป



แล้วถามคำถาม จากรูป "นักเรียนสามารถวัดขนาดของมุมโดยใช้ไม้โปรแทรกเตอร์ได้กี่แบบ"

แนวคำตอบ

- วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
- วัดในทิสทางตามเข็มนาฬิกา

"หน่วยการวัดมุมที่นักเรียนเคยรู้จักกันมีหน่วยเป็นอย่างไร"

แนวคำตอบ

- องศา
- แบ่งหน่วยย่อยขององศา เป็น ลิปดาและฟิลิปดา
- เรเดียน

ขั้นสอนและอธิบายทฤษฎี

7.4 ครูอธิบายการหาค่าและแก้ปัญหาโจทย์ "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" (หน้า 1 - 9) โดยการสุ่มนักเรียนในชั้นเรียนตอบคำถามหรือสนทนาถามตอบกับนักเรียนระหว่างการอธิบาย นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติมนักเรียนศึกษาใบความรู้ "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" ประกอบ

ชั่วโมงที่ 2

ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.5 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" ในชั่วโมงที่ 1 ประกอบครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 3

7.6 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" โดยครูสนทนาถามตอบกับนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม หน้าชั้นเรียนครูใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" (หน้า 10 -15) อธิบายเพิ่มเติม

ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.8 จากการทำใบงาน "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" และศึกษาใบความรู้ "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" นักเรียนสามารถหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมได้อย่างไร

แนวคำตอบ

- ใช้การเปลี่ยนมุมหน่วยองศาเป็นเรเดียน หรือเปลี่ยนมุมหน่วยเรเดียนเป็นองศาช่วยในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้
- ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากในการส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม

7.9 ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” โดยการสนทนาและใช้การถามตอบระหว่างครูกับนักเรียน พร้อมเขียนสูตรสรุปการหาฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.10 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” เป็นการบ้าน

7.11 ครูมอบหมายให้นักเรียนทบทวนบทเรียนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” เพื่อเป็นการทบทวนและศึกษาความรู้เพิ่มเติมด้วยตัวเอง

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- ใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” - ใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” - แบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”	สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้ 1) เปลี่ยนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศาหรือมุมที่มีหน่วยเป็นองศาเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนได้				
2) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาในการนำฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมไปหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้				
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้				

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต				
2) มีวินัย				
3) ใฝ่เรียนรู้				
4) มุ่งมั่นในการทำงาน				
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแก้ปัญหาโจทย์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้				
2) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้				
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม" ได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

ใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

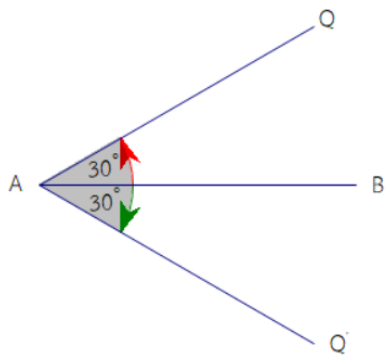
1) เปลี่ยนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศาหรือมุมที่มีหน่วยเป็นองศาเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนได้

2) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

มุมและการวัดมุม

กำหนดส่วนของเส้นตรง AP ต้องการสร้าง $P\hat{A}Q$ ให้มีขนาด 30 องศา โดยใช้โพรแทรกเตอร์วัดขนาดของมุม ทำได้โดยวางโพรแทรกเตอร์ทับส่วนของเส้นตรง AP ซึ่งสามารถวัดขนาดของมุมที่ต้องการสร้างได้ 2 แบบ คือ วัดในทิศทวนเข็มนาฬิกาและวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป



เรียกจุด A ว่า จุดยอด (vertex) ของมุม

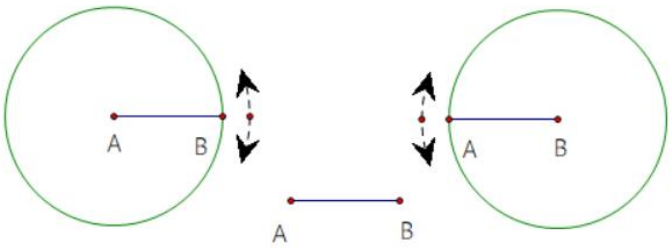
เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า ด้านเริ่มต้น (initial side) ของมุม

เรียกส่วนของเส้นตรง AQ และ AQ' ว่า ด้านสิ้นสุด (terminal side)

ดังนั้นการวัดขนาดของมุมทำได้โดยการวัดจากด้านเริ่มต้นไปยังด้านสิ้นสุด สำหรับการบอกขนาดของมุมมีข้อตกลงว่า ถ้าวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงบวก แต่ถ้าวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงลบ

หน่วยของมุมมี 2 หน่วย เป็นองศาและเรเดียน

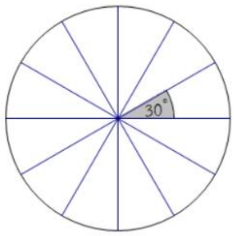
1. องศา มุมที่เกิดจากการหมุนส่วนเส้นตรงรอบจุดปลายไปครบ 1 รอบ กำหนดให้มี 360°



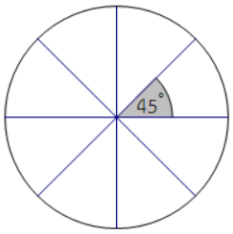
ถ้าแบ่งมุม 1 รอบ เป็น 360 ส่วนเท่า ๆ กัน จะได้มุมย่อยมีขนาด 1°

ดังนั้น มุม 1° มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{360}$ เท่าของมุม 1 รอบ

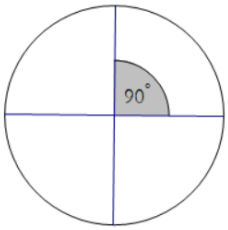
ตัวอย่างที่ 1 ถ้ามุมมีขนาด $30^{\circ}, 45^{\circ}$ และ 90°



มุม 30° มีค่าเท่ากับ $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$ เท่าของมุม 1 รอบ



มุม 45° มีค่าเท่ากับ $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ เท่าของมุม 1 รอบ

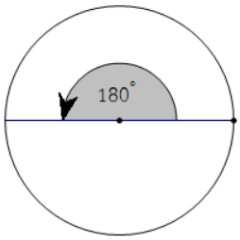


มุม 90° มีค่าเท่ากับ $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ เท่าของมุม 1 รอบ

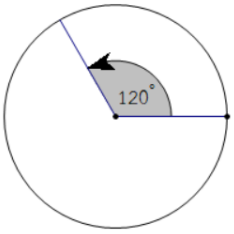
ในทางกลับกัน จากการหมุน 1 รอบ ได้มุมเท่ากับ 360°

ดังนั้น ถ้ามีการหมุน $\frac{1}{k}$ รอบ ได้มุมเท่ากับ $\frac{360^{\circ}}{k}$

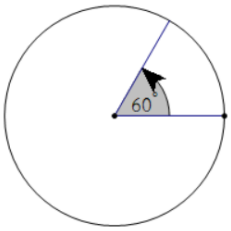
ตัวอย่างที่ 2 กำหนดมุมจากการหมุนรอบจุดศูนย์กลาง $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ และ $\frac{1}{6}$ รอบ



หมุน $\frac{1}{2}$ รอบ ได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$



หมุน $\frac{1}{3}$ รอบ ได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$



หมุน $\frac{1}{6}$ รอบ ได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

สรุป

มุม θ° มีค่าเท่ากับ $\frac{\theta}{360}$ เท่าของมุม 1 รอบ

ในทางกลับกัน การหมุน 1 รอบ ได้มุมเท่ากับ 360°

ถ้ามีการหมุน $\frac{1}{k}$ รอบ ได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{k}$

ถ้าแบ่งมุม 1 องศาย่อยต่อไปอีกจะได้ลิปดาและพิลิปดา ดังต่อไปนี้

แบ่งมุม 1 องศา เป็นส่วนย่อยเท่า ๆ กัน 60 ส่วน เรียก 1 ส่วนว่า 1 ลิปดา (1′)

แบ่งมุม 1 ลิปดา เป็นส่วนย่อยเท่า ๆ กัน 60 ส่วน เรียก 1 ส่วนว่า 1 พิลิปดา(1″)

$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''$$

ตัวอย่างที่ 3 มุม $15^{\circ}32'$ มีกี่พิลิปดา

วิธีทำ มุม 15° มีค่า $15 \times 60 = 900'$

มุม $900' + 32' = 932'$

มีค่า $932 \times 60 = 55{,}920''$

ดังนั้น มุม $15^{\circ}32'$ มีค่า 55,920 พิลิปดา □

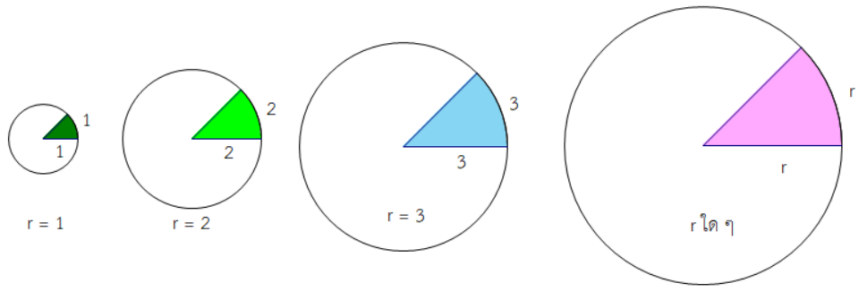
ตัวอย่างที่ 4 มุม $654{,}840''$ เป็นกี่องศา

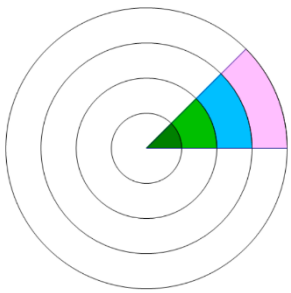
วิธีทำ มุม $654{,}840''$ มีค่า $\frac{654{,}840}{60} = 10{,}914'$

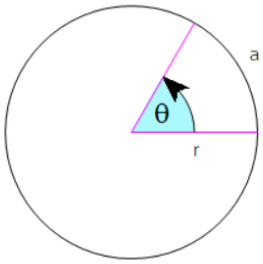
มุม $10{,}914'$ มีค่า $\frac{10{,}914}{60} = 181.9^{\circ}$

ดังนั้น มุม $654{,}840''$ มีค่า 181.9° □

2. เรเดียน มุมขนาด 1 เรเดียน มีค่าเท่ากับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม(รัศมี r) ซึ่งรองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมี (r) ไม่ว่าวงกลมจะมีรัศมีเท่าใด มุมที่ได้ก็มีขนาดเท่ากัน มุมขนาด θ เรเดียน มีค่าเท่ากับมุมที่ศูนย์กลางของวงกลม(รัศมี r) ซึ่งรองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับ a







ให้ θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง มีหน่วยเป็นเรเดียน

r เป็นรัศมีของวงกลม

a เป็นความยาวส่วนโค้งที่รองรับมุม θ จะได้

สำหรับ r ใด ๆ มุมที่รองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว r หน่วย จะมีขนาด θ เรเดียน

มุมที่รองรับส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว $2\pi r$ หน่วย จะมีขนาด $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ เรเดียน

จึงสรุปได้ว่า มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมใด ๆ หนึ่งรอบจะมีขนาด 2π เรเดียน

การเปรียบเทียบหน่วยของมุม

เราสามารถเปลี่ยนหน่วยของมุมได้ โดยถือว่ามุมหนึ่งรอบมีค่าเท่ากับ 360 องศา และมีค่าเท่ากับ 2π เรเดียน

มุม 360 องศา เท่ากับ 2π เรเดียน

ดังนั้น 1 องศา เท่ากับ $\frac{\pi}{180}$ (ประมาณ 0.01745 เรเดียน)

มุม 2π เรเดียน เท่ากับ 360 องศา

ดังนั้น 1 เรเดียน เท่ากับ $\frac{180}{\pi}$ องศา (ประมาณ $57^{\circ}18'$)

ตัวอย่างที่ 5 จงเปลี่ยนมุมขนาด 75 องศาเป็นเรเดียน

วิธีทำ มุมขนาด 75 องศา เท่ากับ $75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ เรเดียน □

ตัวอย่างที่ 6 จงเปลี่ยนมุมขนาด 145 องศาเป็นเรเดียน

วิธีทำ มุมขนาด 145 องศา เท่ากับ $145 \times \frac{\pi}{180} = \frac{29\pi}{36}$ เรเดียน □

ตัวอย่างที่ 7 จงเปลี่ยนมุมขนาด $\frac{5\pi}{24}$ เรเดียนเป็นองศา

วิธีทำ มุมขนาด $\frac{5\pi}{24}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{5\pi}{24} \times \frac{180}{\pi} = \frac{75}{2} = 37^\circ 30'$ □

ตัวอย่างที่ 8 จงเปลี่ยนมุมขนาด $\frac{7\pi}{5}$ เรเดียนเป็นองศา

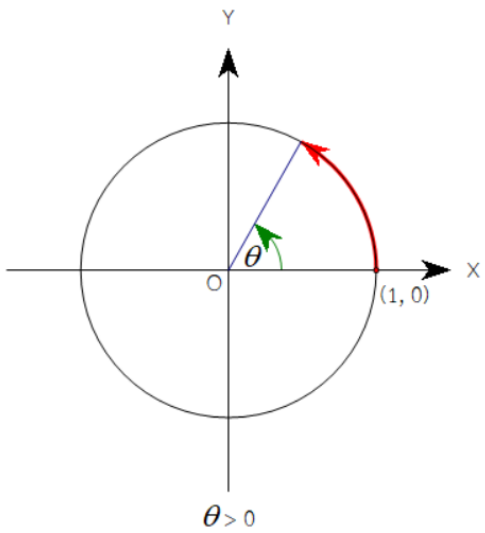
วิธีทำ มุมขนาด $\frac{7\pi}{5}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{7\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = 252^\circ$ □

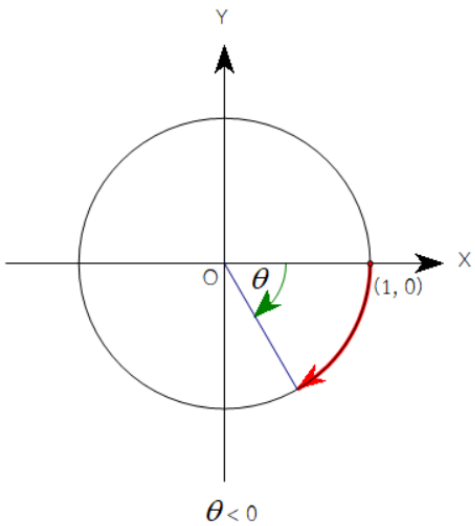
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กล่าวมาแล้วนั้น เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ต่อไปนี้จะพิจารณาถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เมื่อจุดยอดของมุมอยู่ที่จุด (0, 0) และด้านเริ่มต้นของมุมนั้นทาบไปตามแกน X ทางบวก จะกล่าวว่ามุมนั้นอยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน (standard position)

สมมติว่า มุมหนึ่งมีขนาด θ เรเดียน อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน





เนื่องจากส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 1 เรเดียนนั้น ยาว 1 หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด θ เรเดียน จึงยาว θ หน่วย

จะเห็นว่า จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมขนาด θ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นเพียงจุดเดียว และเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด (1, 0) ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ เช่น

จุดที่ด้านที่จุดสิ้นสุดของมุม $-\frac{\pi}{4}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วย คือจุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด (0, 1) ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

ดังนั้น เมื่อมุมขนาด θ เรเดียนให้หนึ่งมุม จะหาจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมนั้นตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยเพียงจุดเดียว และจุดนั้นจะเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ด้วย หรือส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยรองรับมุม θ เรเดียน จะยาว $|\theta|$ หน่วย จะเห็นว่า ไม่ว่าจะใช้วิธีวัดมุมหรือวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลม จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยจะเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้ง

จึงสรุปได้ว่า ไม่ว่านิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติในแง่ของมุมหรือในแง่ของความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม ค่าของฟังก์ชันตรีโกณของจำนวนเหล่านั้นจะเท่ากัน เช่น $\cos\theta$ อาจหมายถึง cos ของมุมที่มีขาด θ เรเดียน หรือ cos ของจำนวนจริง θ ก็ได้

ในการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศานั้นอาจหาได้โดยเปลี่ยนหน่วยวัดขนาดของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียนก่อน แล้งจึงหาค่าของฟังก์ชันนั้นเช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงทั่ว ๆ ไป

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $\sin 30^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ เรเดียน

ดังนั้น $\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ □

ตัวอย่างที 10 จงหาค่าของ $\tan\left(-330^\circ\right)$

วิธีทำ

$$\tan\left(-330^\circ\right) = \frac{\sin\left(-330^\circ\right)}{\cos\left(-330^\circ\right)}$$

$$= \frac{-\sin 330^\circ}{\cos 330^\circ}$$

$$= \frac{-\sin\left(360^\circ - 30^\circ\right)}{\cos\left(360^\circ - 30^\circ\right)}$$

$$= \frac{-\left(-\sin 30^\circ\right)}{\cos 30^\circ}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ □

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่า $\sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec\left(-765^\circ\right)\cos\left(-540^\circ\right)$

วิธีทำ หาค่า

$$\sin 300^\circ = \sin\left(360^\circ - 60^\circ\right) = -\sin 60^\circ = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \frac{\sin 240^\circ}{\cos 240^\circ} = \frac{\sin\left(180^\circ + 60^\circ\right)}{\cos\left(180^\circ + 60^\circ\right)}$$

$$= \frac{-\sin 60^\circ}{-\cos 60^\circ} = \frac{-\sin\frac{\pi}{3}}{-\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec\left(-765^\circ\right) = \frac{1}{\cos\left(-765^\circ\right)} = \frac{1}{\cos 765^\circ} = \frac{1}{\cos\left(720^\circ + 45^\circ\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\cos\left(-540^\circ\right) = \cos 540^\circ = \cos\left(3 \cdot 180^\circ\right) = \cos 3\pi = -1$$

แทนค่า จะได้ $\sin 300^\circ \tan 240^\circ \sec\left(-765^\circ\right)\cos\left(-540^\circ\right)$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\right)(-1)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$ □

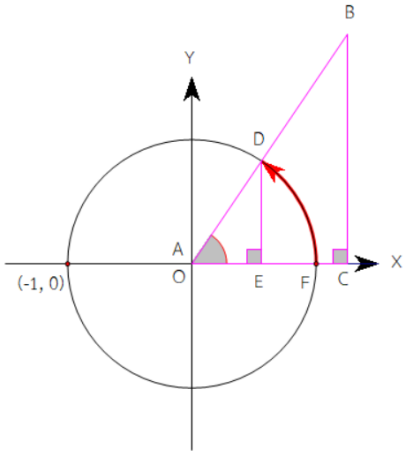
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ประโยชน์ที่สำคัญประการหนึ่งของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ การนำไปใช้หาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้ ต่อไปนี้จะพิจารณาฟังก์ชันตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ดังนั้น $B\hat{A}C < 90^{\circ}$

ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ

ให้ $B\hat{A}C$ อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน และส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม A คือส่วนโค้ง FD ดังรูป



ดังนั้น $\sin A = \sin\left(\text{ความยาวของส่วนโค้ง}FB\right) = DE$

$\cos A = \cos\left(\text{ความยาวของส่วนโค้ง}FD\right) = AE$

เนื่องจาก รูปสามเหลี่ยม ADE คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม ABC จะได้

$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$ และ $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$

แต่ $AD = 1$ ดังนั้น $DE = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ และ $AE = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

นั่นคือ $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$ และ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$

สรุปได้ว่า

$$\sin A \quad \text{คือ} \quad \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

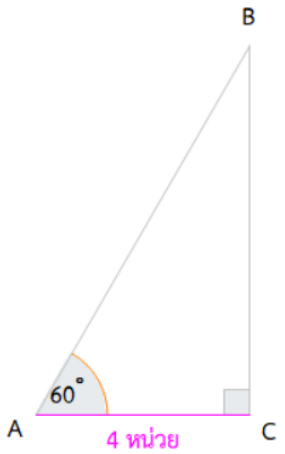
$$\cos A \quad \text{คือ} \quad \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\tan A \quad \text{คือ} \quad \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } A}$$

ส่วนค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ของมุม A จะเป็นส่วนกลับของค่าฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ตามลำดับ สมการข้างต้นมีประโยชน์ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 12 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ด้าน AC ยาว 4 หน่วย และมุม A มีขนาด 60° จงหาความยาวด้าน AB และ BC

วิธีทำ ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ



เนื่องจาก $\cos 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{c}$

จะได้ $c = \frac{4}{\cos 60^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{1} = 8$

เนื่องจาก $\tan 60^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{4}$

จะได้ $a = 4\tan 60^\circ = 4\sqrt{3}$

ดังนั้น ด้าน AB และ BC ยาว 8 และ $4\sqrt{3}$ หน่วย ตามลำดับ □

ตัวอย่างที่ 13 ให้มุม A เป็นมุมแหลม และ $\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A

วิธีทำ จาก $\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก

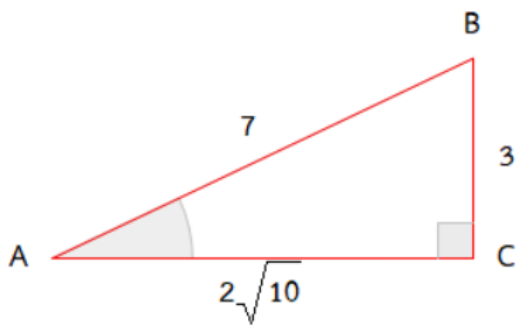
โดยที่ด้านประชิดมุม A ยาว $2\sqrt{10}$ หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 7 หน่วย

นั่นคือ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ จะได้ว่า a = $2\sqrt{10}$ และ c = 7

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้ว่า $b = \sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{49-40} = \sqrt{9} = 3$

จึงสามารถเขียนรูปสามเหลี่ยมมุฉากได้ ดังรูป



ดังนั้น $\sin A = \frac{3}{7}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{7}{3}$

$\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$, $\sec A = \frac{7}{2\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$

$\tan A = \frac{3}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}$, $\cot A = \frac{2\sqrt{10}}{3}$ □

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{1}{4}$ และ $\tan\theta < 0$ จงหา $\sec\theta$

วิธีทำ วิธีที่ 1 เนื่องจาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

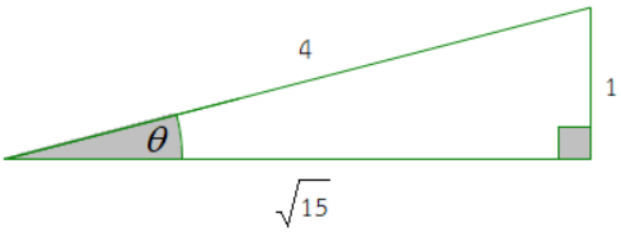
จะได้ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

นั่นคือ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ เนื่องจาก $\tan\theta < 0$

ดังนั้น $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$ □

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $\sin\theta = \frac{1}{4}$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมหนึ่งมีขนาดเป็น θ โดยที่ตรงข้ามมุมที่มีขนาด θ ยาว 1 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 4 หน่วย จะได้ประชิดมุมที่มีขนาด θ ยาว

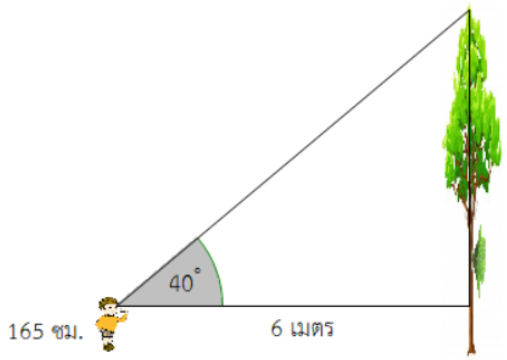
$\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$ หน่วย ดังรูป



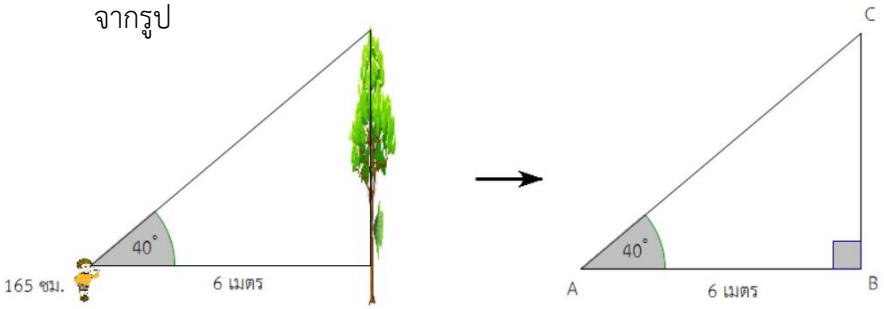
เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $\tan\theta < 0$ จะได้ว่าอยู่ในจตุภาคที่ 2

นั่นคือ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$ □

ตัวอย่างที่ 15 เด็กคนหนึ่งสูง 165 เซนติเมตร อยู่ห่างจากต้นไม้ต้นหนึ่งระยะ 6 เมตร มุมที่วัดจากสายตาของเด็กคนนี้ไปยังยอดต้นไม้มีขนาด 40 องศา ดังรูป ต้นไม้มีความสูงเท่าไร



วิธีทำ จากรูป



จะได้ $\tan 40^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{6}$

นั่นคือ $BC = 6\tan 40^\circ \approx 6(0.8391) \approx 5.0346$

ดังนั้น ต้นไม้มีความสูงประมาณ 5.0346 + 1.65 = 6.6846 เมตร □

ใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแก้ปัญหาโจทย์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้

2) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์ฟังก์ชันตรีโกณิมิติของมุมที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. รับใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”

2. ให้นักเรียนจับฉลากหมายเลข กลุ่มที่ได้หมายเลข 1 ทำโจทย์ข้อ 1 กลุ่มที่ได้หมายเลข 2 ทำโจทย์ข้อ 2 ตามลำดับ ใช้เวลา 10 นาที

3. ให้นักเรียนแลกเปลี่ยนความรู้จากกลุ่มอื่น ๆ โดยส่งตัวแทนจดบันทึกวิธีทำข้อที่เหลือของกลุ่มอื่น ลงในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”

4. นักเรียนแต่ละกลุ่มออกนำเสนอวิธีทำโจทย์ของกลุ่ม

5. นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ แสดงความคิดเห็นและตอบคำถามเพิ่มเติม

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

   บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

   บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

   บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

   บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที

ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....

ข้อที่ 1	**โจทย์** 1) มุมขนาด $\frac{19\pi}{12}$ เรเดียน มีขนาดกี่องศาและอยู่ในจตุภาคใด 2) มุมขนาด $-1,020^{\circ}$ มีขนาดกี่เรเดียนและอยู่ในจตุภาคใด (วาดรูปประกอบตำแหน่งที่อยู่ในจตุภาค)
วิธีทำ	

ข้อที่ 2	**โจทย์** จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของมุม -675°
วิธีทำ	

ข้อที่ 3	**โจทย์** จงหาค่าของ $\dfrac{\cos\left(-120^\circ\right)+\sin 225^\circ \operatorname{cosec} 405^\circ}{\tan 330^\circ}$
วิธีทำ	

ข้อที่ 4	**โจทย์** รูปสามเหลี่ยมฉาก ABC มี C เป็นมุมฉาก ด้าน AC ยาว 3 หน่วย และมุม A มีขนาด 60° จงหาความยาวรอบรูปสามเหลี่ยม ABC
วิธีทำ	

ข้อที่ 5	**โจทย์** ให้มุม A เป็นมุมแหลม และ $\cos A = \frac{2}{5}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A
วิธีทำ	

ข้อที่ 6	**โจทย์** ให้ $\sin\theta = \frac{1}{4}$ และ $\tan\theta < 0$ จงหาค่า $\sec\theta$
วิธีทำ	

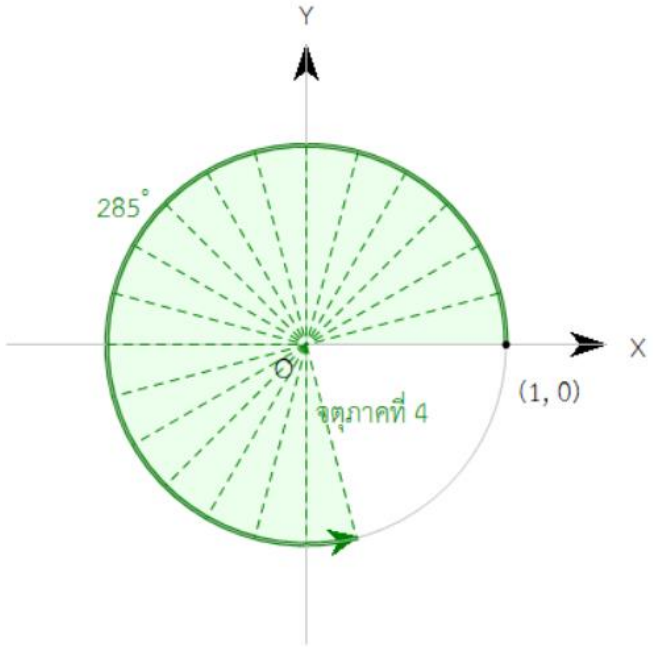
ข้อที่ 7	**โจทย์** รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีขนาดของมุมที่ฐาน 70 องศา และฐานยาว 50 นิ้ว จะมีพื้นที่ประมาณเท่าใด
วิธีทำ	

ข้อที่ 8	**โจทย์** น้องมิ้นยืนบนยอดตึก มุมจากสายตาน้องมิ้นไปยังรถยนต์ของพ่อที่จอดอยู่ห่างจากตึกเป็นระยะ 15 เมตร มีขนาด 37 องศา ถ้าไม่คิดส่วนสูงของน้องมิ้น ตึกสูงเท่าไร
วิธีทำ	

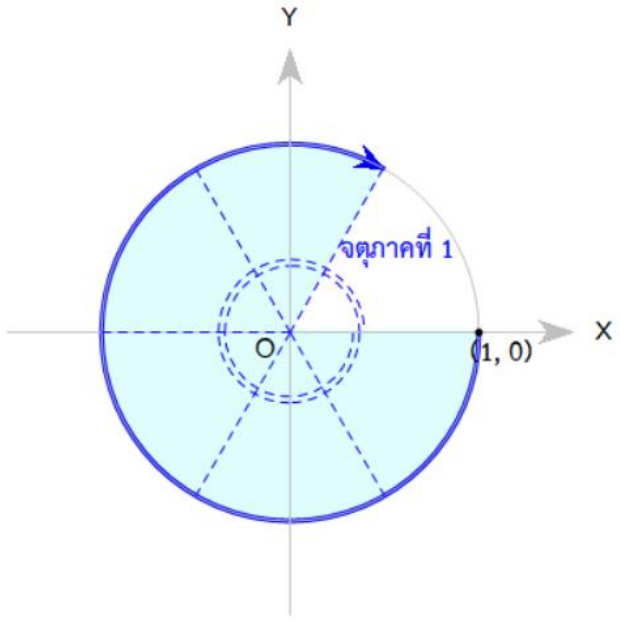
เฉลยใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”

ข้อที่ 1

มุมขนาด $\frac{19\pi}{12}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{19\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = 285$ องศา อยู่ในจตุภาคที่ 4



มุมขนาด $-1,020^{\circ}$ องศา เท่ากับ $-1,020 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{17\pi}{3}$ เรเดียน อยู่ในจตุภาคที่ 1



ข้อที่ 2 หาค่า $\sin\left(-675^\circ\right)=-\sin 675^\circ=-\sin\left(360^\circ+315^\circ\right)=-\sin 315^\circ$

$$=-\sin\left(360^\circ-45^\circ\right)=-\left(-\sin 45^\circ\right)=\sin 45^\circ=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(-675^\circ\right)=\cos 675^\circ=\cos\left(360^\circ+315^\circ\right)=\cos 315^\circ$$

$$=\cos\left(360^\circ-45^\circ\right)=\cos 45^\circ=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(-675^\circ\right)=\frac{\sin\left(-675^\circ\right)}{\cos\left(-675^\circ\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

$$\operatorname{cosec}\left(-675^\circ\right)=\frac{1}{\sin\left(-675^\circ\right)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\sec\left(-675^\circ\right)=\frac{1}{\cos\left(-675^\circ\right)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\tan\left(-675^\circ\right)=\frac{\cos\left(-675^\circ\right)}{\sin\left(-675^\circ\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

ข้อที่ 3 หาค่าของ

$$\cos\left(-120^\circ\right)=\cos 120^\circ=\cos\left(180^\circ-60^\circ\right)=-\cos 60^\circ=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\sin 225^\circ=\sin\left(180^\circ+45^\circ\right)=-\sin 45^\circ=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cosec}405^\circ=\frac{1}{\sin 405^\circ}=\frac{1}{\sin\left(360^\circ+45^\circ\right)}=\frac{1}{\sin 45^\circ}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$$

$$\tan 330^\circ=\frac{\sin 330^\circ}{\cos 330^\circ}=\frac{\sin\left(360^\circ-30^\circ\right)}{\cos\left(360^\circ-30^\circ\right)}=\frac{-\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{-\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ดังนั้น $\dfrac{\cos\left(-120^{\circ}\right)+\sin 225^{\circ}\operatorname{cosec}405^{\circ}}{\tan 330^{\circ}} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)\right)}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

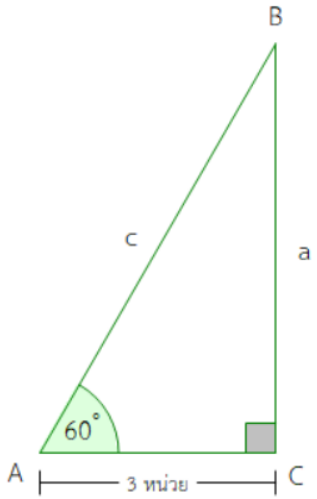
$$= \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ข้อที่ 4 จากรูปสามเหลี่ยมฉาก ABC มี C เป็นมุมฉาก ด้าน AC ยาว 3 หน่วย และมุม A มีขนาด 60° เขียนรูปได้ดังนี้



ให้ a และ c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A และ มุม C ตามลำดับ

เนื่องจาก $\tan 60^{\circ} = \frac{a}{3}$

จะได้ $a = 3\tan 60^{\circ} = 3\sqrt{3}$ หน่วย

เนื่องจาก $\cos 60^{\circ} = \frac{3}{c}$

จะได้ $c = \frac{3}{\cos 60^{\circ}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$ หน่วย

ดังนั้น ความยาวรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $AC + BC + AB = 3 + 3\sqrt{3} + 6$

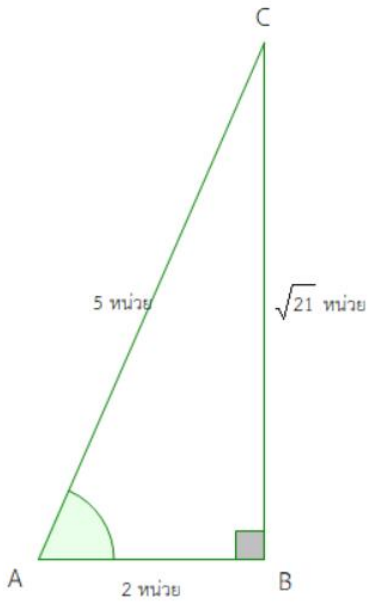
$= 9 + 3\sqrt{3}$ หน่วย

ข้อที่ 5 ให้มุม A เป็นมุมแหลม และ $\cos A = \frac{2}{5}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A

จาก $\cos A = \frac{2}{5}$ และ A เป็นมุมแหลม สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี B เป็นมุมฉาก

โดยด้านประชิดมุม A ยาว 2 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 5 หน่วย

จะได้ด้านตรงข้ามมุม A ยาว $\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$ หน่วย ดังรูป



ดังนั้น $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan A = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $\sec A = \frac{5}{2}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}$ และ

$\cot A = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

ข้อที่ 6 ให้ $\sin\theta = \frac{1}{4}$ และ $\tan\theta < 0$ จงหาค่า $\sec\theta$

วิธีที่ 1 เนื่องจาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

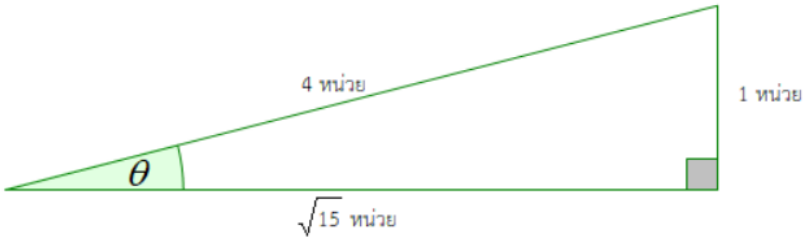
จะได้ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

นั่นคือ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ เนื่องจาก $\tan\theta < 0$

ดังนั้น $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $\sin\theta = \frac{1}{4}$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมหนึ่งมีขนาดเป็น θ โดยที่ด้านตรงข้ามมุมที่มีขนาด θ ยาว 1 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 4 หน่วย จะได้ด้านที่ประชิดมุมที่มีขนาด θ ยาว

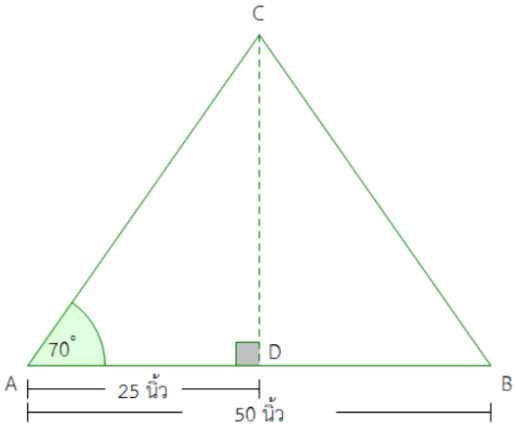
$\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$ หน่วย ดังรูป



เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $\tan\theta < 0$ จะได้ว่าอยู่ในจตุภาคที่ 2

นั่นคือ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$

ข้อที่ 7



เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะได้เส้นที่ลากจากมุมยอดจะตั้งฉากกับฐานและแบ่งครึ่งฐาน

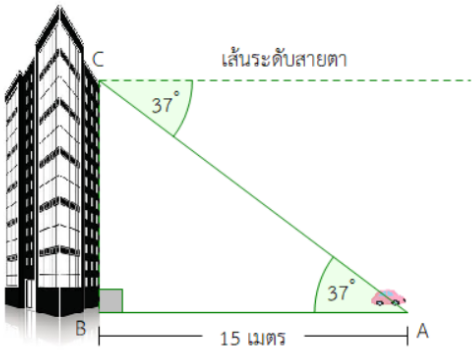
ให้ CD เป็นความสูงของรูปสามแหลี่ยมหน้าจั่ว

และเนื่องจาก $\tan 70^{\circ} = \frac{CD}{AD}$

จะได้ $CD = AD \tan 70^{\circ} \approx 25(2.7475) \approx 68.6875$ นิ้ว

ดังนั้น พื้นที่รูปสามแหลี่ยมหน้าจั่วประมาณ $\frac{1}{2} \times 50 \times 68.6875 \approx 1,717.19$ ตารางนิ้ว

ข้อที่ 8



เนื่องด้วยเส้นระดับสายกับพื้นขนานกันและสมบัติของเส้นมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

จะได้ $B\hat{A}C = 37^{\circ}$

จากรูปจะได้ $\tan 37^{\circ} = \frac{BC}{15}$

นั่นคือ $BC = 15 \tan 37^{\circ} \approx 15(0.7536) \approx 11.304$

ดังนั้น ถ้าไม่คิดส่วนสูงของน้องมิ้น ตึกสูงประมาณ 11.304 เมตร

แบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1) เปลี่ยนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศาหรือมุมที่มีหน่วยเป็นองศาเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนได้

2) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1) ใช้การแก้ปัญหาในการนำฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมไปหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้

2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้

.....

1. ขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อไปนี้ มีขนาดกี่องศา

1) 5π 2) $\frac{2\pi}{3}$ 3) $\frac{11\pi}{5}$

4) $-\frac{5\pi}{6}$ 5) $\frac{13\pi}{5}$ 6) $\frac{-17\pi}{4}$

2. ขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นองศาต่อไปนี้ มีขนาดกี่เรเดียน

1) -880° 2) 740° 3) 500°

4) -720° 5) -315° 6) 240°

3. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของมุมต่อไปนี้

1) 210° 2) 330° 3) -960°

4) -1080° 5) 315° 6) 135°

4. จงหาค่า

1) $\dfrac{3\tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2\sin 330^\circ}$

2) $\dfrac{\tan\left(-480^\circ\right) - \sin\left(-840^\circ\right)}{\cos 390^\circ}$

3) $\dfrac{\sec^2\left(-390^\circ\right)\cot 120^\circ \operatorname{cosec}\left(-840^\circ\right)}{\dfrac{1}{\sin 330^\circ + \tan 135^\circ}}$

5. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 20 องศา และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้าน AC และ BC

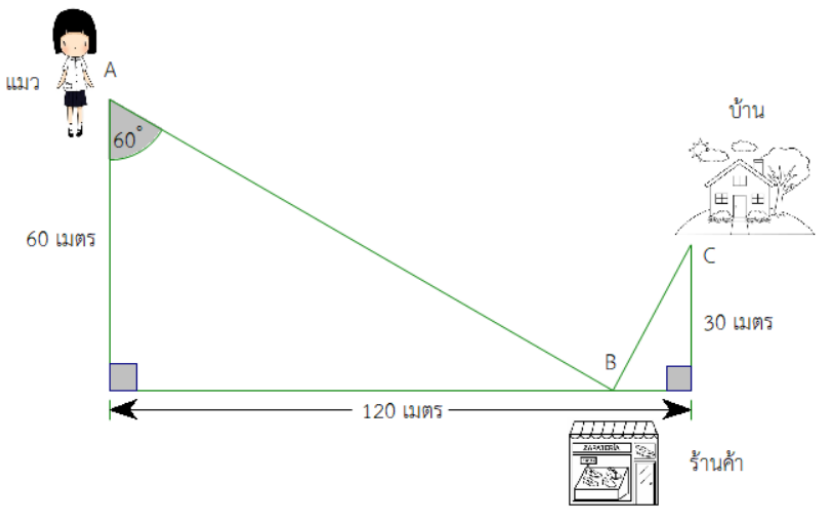
6. ให้ A เป็นมุมแหลม และ $\sin A = \frac{13}{15}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A

7. กำหนดให้ $\cos\theta = \frac{5}{13}$ และ $\operatorname{cosec}\theta < 0$ จงหา $\tan\theta$

8. กำหนดให้ $\tan\theta = 5$ และ $\sin\theta < 0$ จงหา $\cos\theta + \sec\theta$

9. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีขนาดของมุมที่ฐาน 70 องศา และฐานยาว 60 นิ้ว จะมีด้านประกอบมุมยอดยาวประมาณเท่าใด

10. กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.73$ จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่แมวจะเดินจากโรงเรียนที่จุด A ไปซื้อของที่ร้านค้าที่จุด B แล้วเดินกลับบ้านที่จุด C ดังรูป



เฉลยแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”

1. 1) มุมขนาด 5π เรเดียน เท่ากับ $5\pi \times \frac{180}{\pi} = 900$ องศา

2) มุมขนาด $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 120$ องศา

3) มุมขนาด $\frac{11\pi}{5}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{11\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = 396$ องศา

4) มุมขนาด $-\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน เท่ากับ $-\frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = -150$ องศา

5) มุมขนาด $\frac{13\pi}{5}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{13\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = 468$ องศา

6) มุมขนาด $\frac{-17\pi}{4}$ เรเดียน เท่ากับ $-\frac{17\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = -765$ องศา

2. 1) มุมขนาด -880° เท่ากับ $-880 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{44\pi}{9}$ เรเดียน

2) มุมขนาด 740° เท่ากับ $740 \times \frac{\pi}{180} = \frac{37\pi}{9}$ เรเดียน

3) มุมขนาด 500° เท่ากับ $500 \times \frac{\pi}{180} = \frac{25\pi}{9}$ เรเดียน

4) มุมขนาด -720° เท่ากับ $-720 \times \frac{\pi}{180} = -4\pi$ เรเดียน

5) มุมขนาด -315° เท่ากับ $-315 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7\pi}{4}$ เรเดียน

6) มุมขนาด 240° เท่ากับ $240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}$ เรเดียน

3.

ข้อ	θ		$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
	องศา	เรเดียน						
1)	210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
2)	330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
3)	-960°	$-\frac{16\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
4)	-1080°	-6π	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
5)	315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
6)	135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1

4. 1) หาค่า $\tan 135^\circ = \tan\left(180^\circ - 45^\circ\right) = -\tan 45^\circ = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

$$\sec 300^\circ = \sec\left(360^\circ - 60^\circ\right) = \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sin 330^\circ = \sin\left(360^\circ - 30^\circ\right) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

แทนค่า จะได้ $\dfrac{3\tan^2 135^\circ - \sec^2 300^\circ}{2\sin 330^\circ} = \dfrac{3(-1)^2 - (2)^2}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$= \frac{3-4}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad \square$$

2) หาค่า $\tan\left(-480^\circ\right) = \dfrac{\sin\left(-480^\circ\right)}{\cos\left(-480^\circ\right)} = \dfrac{\sin\left(360^\circ + 120^\circ\right)}{\cos\left(360^\circ + 120^\circ\right)} = \dfrac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ}$

$$= \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\sin\left(180^\circ - 60^\circ\right)}{\cos\left(180^\circ - 60^\circ\right)} = \frac{\sin 60^\circ}{-\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{-\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\sin\left(-840^\circ\right) = \sin\left(720^\circ + 120^\circ\right) = \sin 120^\circ = \sin\left(180^\circ - 60^\circ\right)$$

$$= \sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 390^\circ = \cos\left(360^\circ + 30^\circ\right) = \cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

แทนค่า จะได้ $\dfrac{\tan\left(-480^\circ\right) - \sin\left(-840^\circ\right)}{\cos 390^\circ} = \dfrac{-\sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$= \frac{-2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = -3 \qquad \square$$

3) หาค่า $\sec\left(-390^\circ\right) = \dfrac{1}{\cos\left(-390^\circ\right)} = \dfrac{1}{\cos 390^\circ} = \dfrac{1}{\cos\left(360^\circ + 30^\circ\right)}$

$$= \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 120^\circ = \frac{\cos 120^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\cos\left(180^\circ - 60^\circ\right)}{\sin\left(180^\circ - 60^\circ\right)} = \frac{-\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$= \frac{-\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{-\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec}\left(-840^\circ\right) = \frac{1}{\sin\left(-840^\circ\right)} = \frac{1}{-\sin 840^\circ} = \frac{1}{-\sin\left(720^\circ + 120^\circ\right)}$$

$$= \frac{1}{-\sin 120^\circ} = \frac{1}{-\sin\left(180^\circ + 60^\circ\right)} = \frac{1}{-\sin 60^\circ} = \frac{1}{-\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 330^\circ = \sin\left(360^\circ - 30^\circ\right) = -\sin 30^\circ = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\sin\left(180^\circ - 45^\circ\right)}{\cos\left(180^\circ - 45^\circ\right)} = \frac{\sin 45^\circ}{-\cos 45^\circ} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{-\cos\frac{\pi}{4}}$$

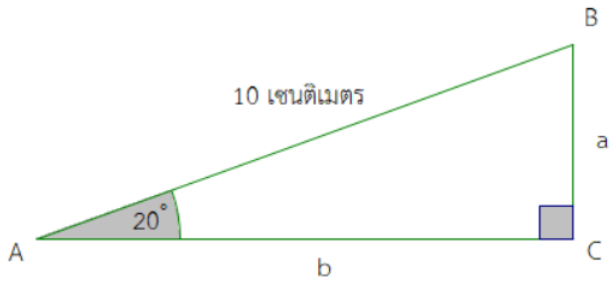
$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

แทนค่า จะได้

$$\frac{\sec^2\left(-390^\circ\right)\cot 120^\circ \operatorname{cosec}\left(-840^\circ\right)}{\dfrac{1}{\sin 330^\circ + \tan 135^\circ}} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)}{\dfrac{1}{-\frac{1}{2}+(-1)}}$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{\dfrac{1}{-\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{3} \quad \square$$

5.



ให้ a และ b เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A และ มุม B ตามลำดับ

เนื่องจาก $\sin 20^\circ = \frac{a}{10}$

จะได้ $a = 10\sin 20^\circ \approx 10(0.3420) \approx 3.420$

เนื่องจาก $\cos 20^\circ = \frac{b}{10}$

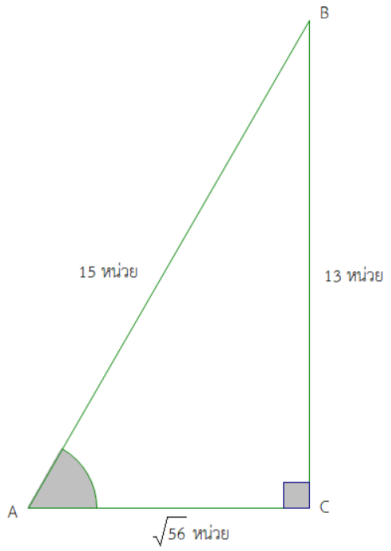
จะได้ $b = 10\cos 20^\circ \approx 10(0.9397) \approx 9.397$

ดังนั้น ความยาวของด้าน AC ยาวประมาณ 3.420 เซนติเมตร และ

ความยาวของด้าน BC ยาวประมาณ 9.397 เซนติเมตร $\square$

6. จาก $\sin A = \frac{13}{15}$ และ A เป็นมุมแหลม สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี C เป็นมุมฉากโดยด้านตรงข้ามมุม A ยาว 13 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 15 หน่วย

จะได้ด้านประชิดมุม A ยาว $\sqrt{15^2 - 13^2} = \sqrt{225 - 169} = \sqrt{56}$ หน่วย ดังรูป



ดังนั้น $\cos A = \frac{\sqrt{56}}{15}$, $\tan A = \frac{13}{\sqrt{56}} = \frac{13\sqrt{56}}{56}$, $\sec A = \frac{15}{\sqrt{56}}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{15}{13}$

และ $\cot A = \frac{\sqrt{56}}{13}$ □

7. **วิธีที่ 1** เนื่องจาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

จะได้ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

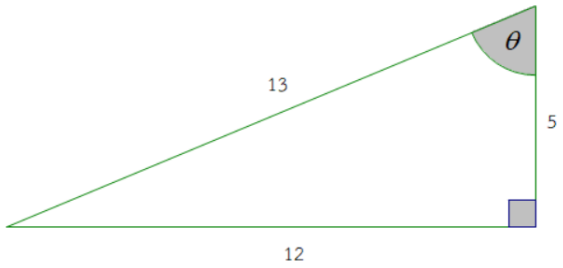
นั่นคือ $\sin\theta = -\frac{12}{13}$ เนื่องจาก $\operatorname{cosec}\theta < 0$

ดังนั้น $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$ □

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $\cos\theta = \frac{5}{13}$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมหนึ่งมีขนาด

เป็น θ โดยที่ด้านประชิดมุมที่มีขนาด θ ยาว 5 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 13 หน่วย จะได้ด้านที่ตรงข้ามมุมที่มีขนาด θ ยาว

$\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$ หน่วย ดังรูป



เนื่องจาก $\cos\theta>0$ และ $\operatorname{cosec}\theta<0$ จะได้ว่าอยู่ในจตุภาคที่ 4

นั่นคือ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=-\dfrac{12}{5}$ □

8. **วิธีที่ 1** เนื่องจาก $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

จะได้ $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=1+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=1+\dfrac{1}{25}=\dfrac{26}{25}$

นั่นคือ $\operatorname{cosec}\theta=-\dfrac{\sqrt{26}}{5}$ เนื่องจาก $\sin\theta<0$

จะได้ $\sin\theta=-\dfrac{5}{\sqrt{26}}$

เนื่องจาก $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

จะได้ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\dfrac{5}{\sqrt{26}}\right)^2=1-\dfrac{25}{26}=\dfrac{1}{26}$

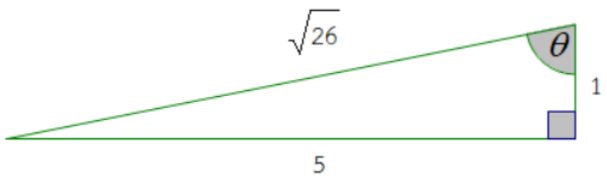
เนื่องจาก $\sin\theta<0$ และ $\tan\theta>0$

จะได้ $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{26}}$ และ $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{-\frac{1}{\sqrt{26}}}=-\sqrt{26}$

ดังนั้น

$$\cos\theta+\sec\theta=-\frac{1}{\sqrt{26}}-\sqrt{26}=\frac{-1-26}{\sqrt{26}}=-\frac{27}{\sqrt{26}}=-\frac{27\sqrt{26}}{26}$$ □

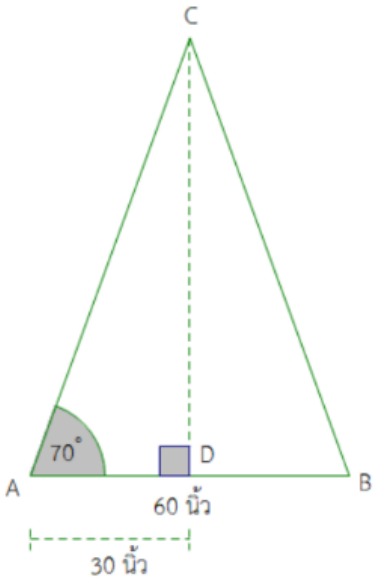
วิธีที่ 2 เนื่องจาก $\tan\theta = 5$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมหนึ่งมีขนาดเป็น θ โดยที่ด้านตรงข้ามมุมที่มีขนาด θ ยาว 5 หน่วย และด้านตรงประชิดมุม θ ยาว 1 หน่วย จะได้ด้านที่ตรงข้ามมุมฉากยาว $\sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$ หน่วย ดังรูป



เนื่องจาก $\tan\theta > 0$ และ $\sin\theta < 0$ จะได้ว่าอยู่ในจตุภาคที่ 3 นั่นคือ

$$\cos\theta + \sec\theta = -\frac{1}{\sqrt{26}} - \sqrt{26} = \frac{-1-26}{\sqrt{26}} = -\frac{27}{\sqrt{26}} = -\frac{27\sqrt{26}}{26} \qquad \square$$

9.



เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะได้เส้นที่ลากจากมุมยอดจะตั้งฉากกับฐานและแบ่งครึ่งฐาน

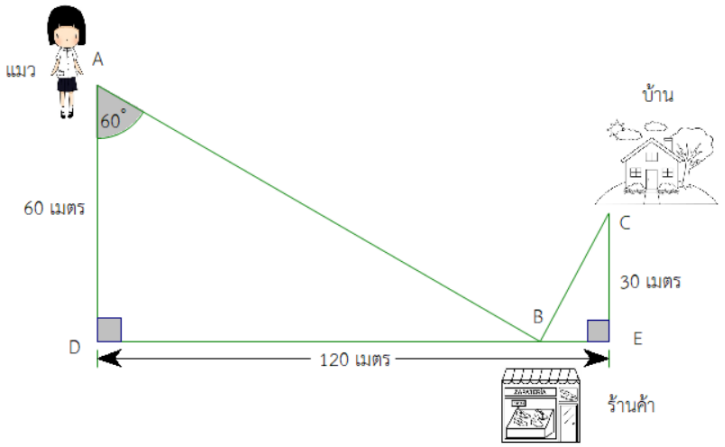
ให้ AC เป็นความยาวด้านประกอบมุมยอด

และเนื่องจาก $\cos 70^\circ = \frac{30}{AC}$

จะได้ $AC = \dfrac{30}{\cos 70^\circ} \approx \dfrac{30}{0.3420} \approx 87.72$

ดังนั้น ด้านประกอบมุมยอดมีความยาวประมาณ 87.72 นิ้ว □

10.



จากรูป จะได้ $\cos 60^\circ = \dfrac{60}{AB}$ นั่นคือ $AB = \dfrac{60}{\cos 60^\circ} = \dfrac{60}{\frac{1}{2}} = 120$

และจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ $AB^2 = AD^2 + DB^2$

นั่นคือ $DB^2 = AB^2 - AD^2 = 120^2 - 60^2 = 14400 - 3600 = 10800$

$DB = 60\sqrt{3}$

$BE = 120 - 60\sqrt{3}$

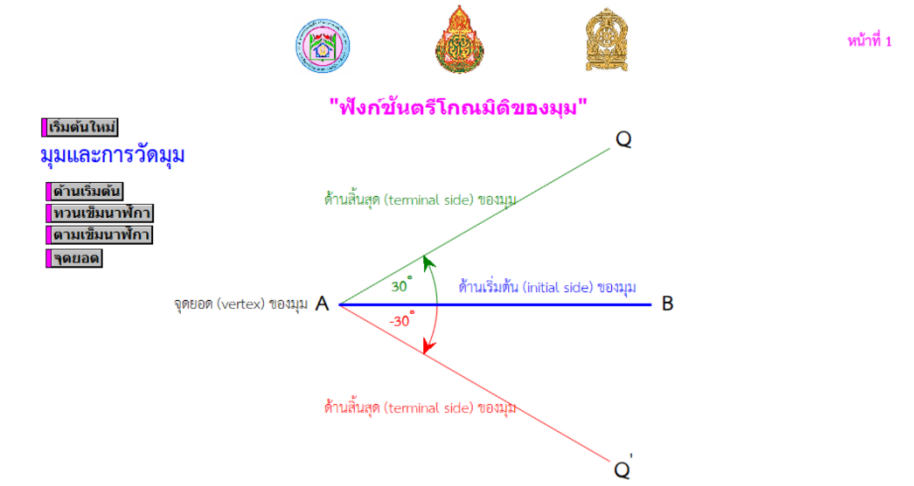
จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

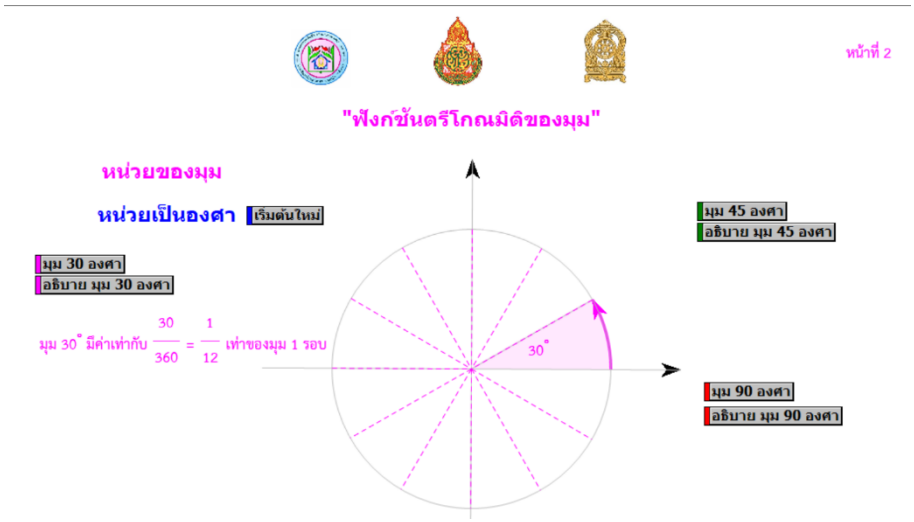
$BC^2 = BE^2 + CE^2 = \left(120 - 60\sqrt{3}\right)^2 + 30^2 \approx 1158.47$

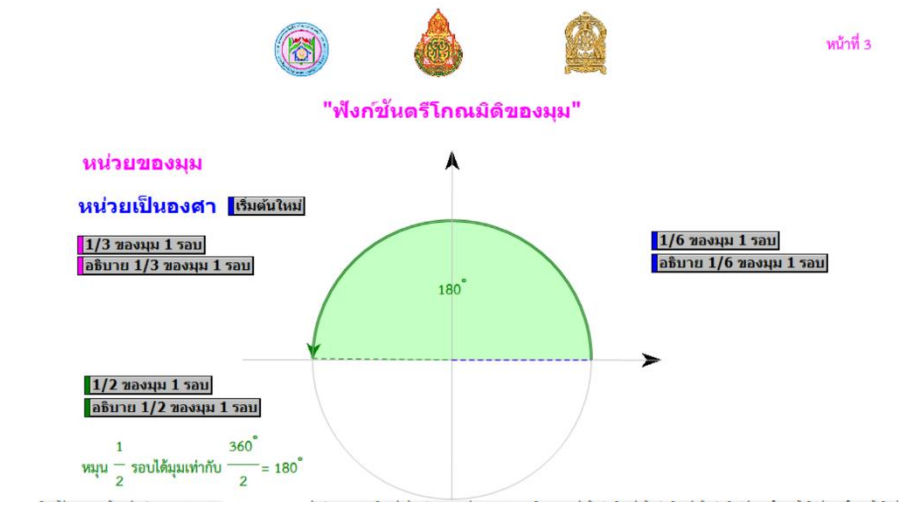
จะได้ $BC \approx 34.04$

ดังนั้น ระยะทางที่สั้นที่สุดที่แมวจะเดินจากโรงเรียนที่จุด A ไปซื้อของที่ร้านค้าที่จุด B แล้วเดินกลับบ้านที่จุด C เท่ากับ AB + BC หรือประมาณ 154.04 เมตร □

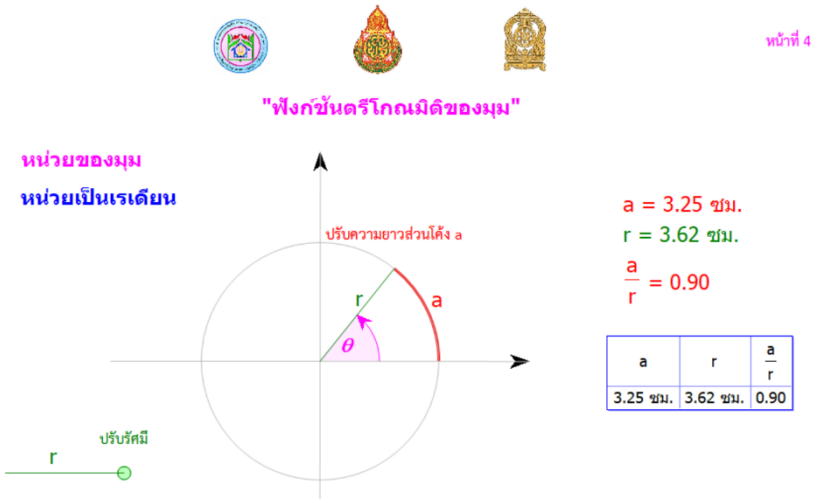
สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” หน้า 1 – 3

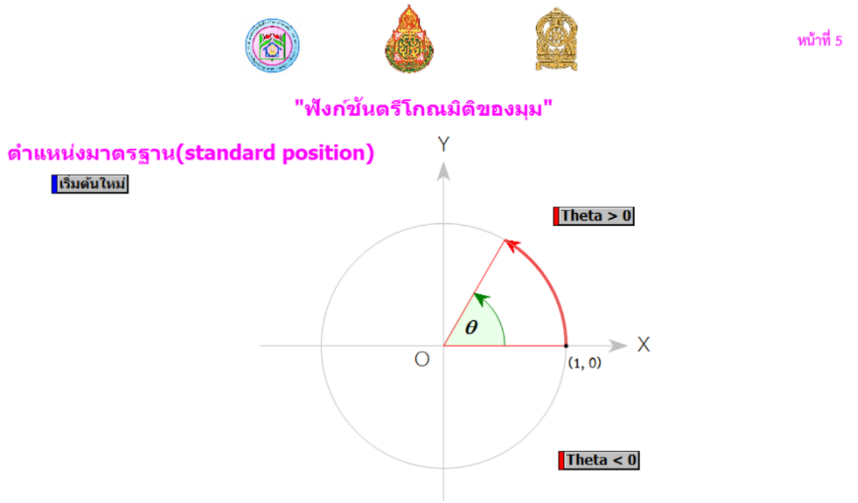


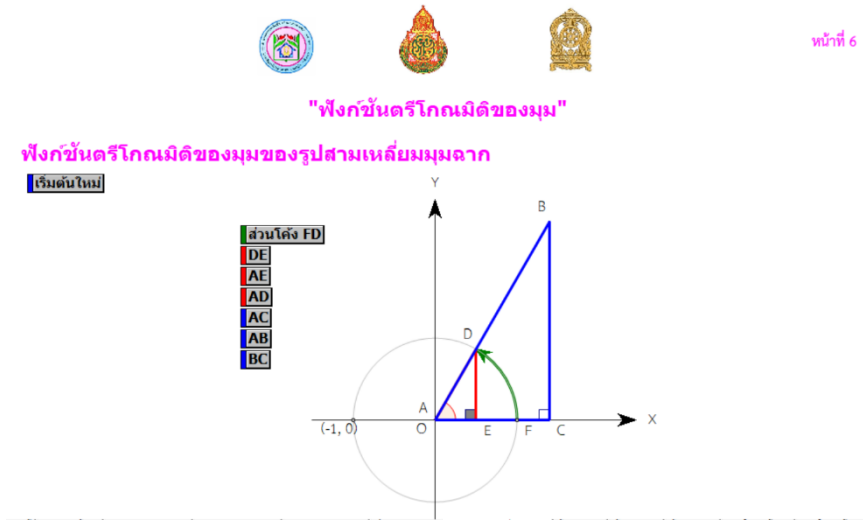




สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” หน้า 4 – 6







สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” หน้า 7 – 9

หน้าที่ 7

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม"

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก ด้าน AC ยาว 4 หน่วย และมุม A มีขนาด 60° จงหาความยาวด้าน AB และ BC

เริ่มต้นใหม่

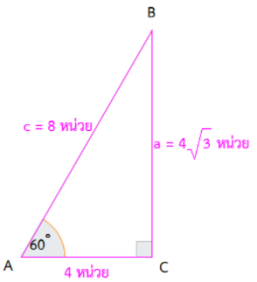
มุม A มีขนาด 60 องศา

AC

AB

BC

อธิบาย



ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ

เนื่องจาก $\cos 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{c}$

จะได้ $c = \frac{4}{\cos 60^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

เนื่องจาก $\tan 60^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{4}$

จะได้ $a = 4\tan 60^\circ = 4\sqrt{3}$

ดังนั้น ด้าน AB และ BC ยาว 8 และ $4\sqrt{3}$ หน่วย ตามลำดับ

หน้าที่ 8

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม"

ให้มุม A เป็นมุมแหลม และ $\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A

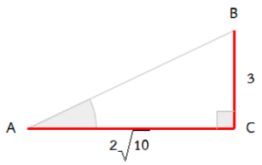
เริ่มต้นใหม่

มุม A

AC

AB

BC



sinA $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{7}$

cosecA $\operatorname{cosec} A = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{3}$

cosA $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$

secA $\sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{2\sqrt{10}}$

tanA $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$

cotA $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$

หน้าที่ 9

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม"

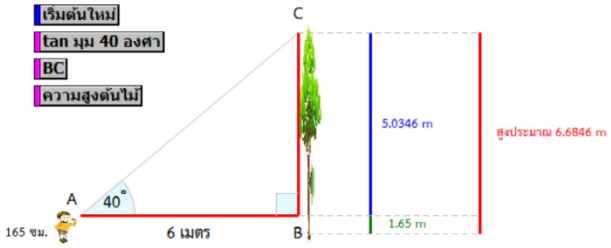
เด็กคนหนึ่งสูง 165 เซนติเมตร อยู่ห่างจากต้นไม้ต้นหนึ่งระยะ 6 เมตร มุมที่วัดจากสายตาของเด็กคนนี้ไปยังยอดต้นไม้มีขนาด 40 องศา ดังรูป ต้นไม้มีความสูงเท่าไร

เริ่มต้นใหม่

tan มุม 40 องศา

BC

ความสูงต้นไม้

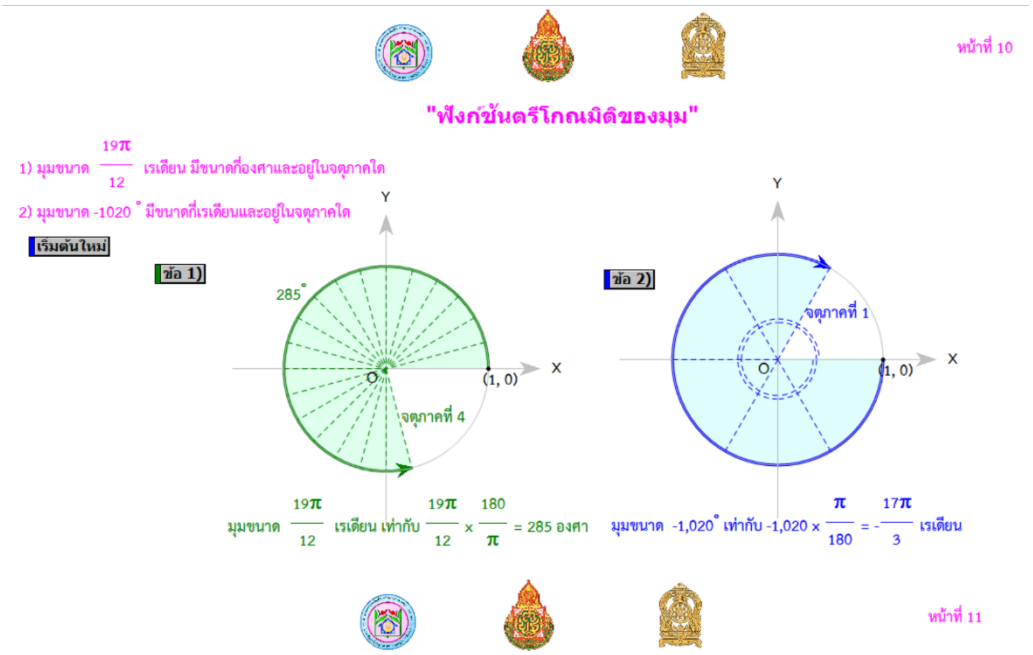


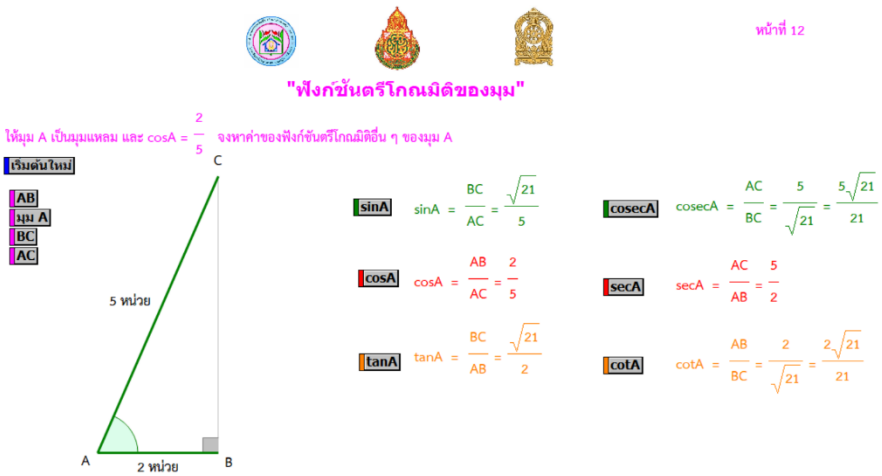
$\tan 40^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{6}$

$BC = 6\tan 40^\circ \approx 6(0.8391) \approx 5.0346$

ดังนั้น ต้นไม้สูงประมาณ 5.0346 + 1.65 = 6.6846 เมตร

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” หน้า 10 – 12





สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” หน้า 13 – 12

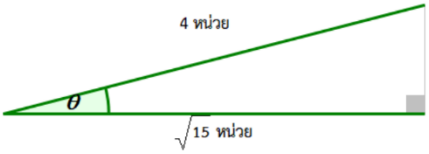
หน้าที่ 13

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม"

ให้ $\sin\theta = \frac{1}{4}$ และ $\tan\theta < 0$ จงหาค่า $\sec\theta$

เริ่มต้นใหม่

มุม Theta
ด้านประชิดมุม Theta
ด้านตรงข้ามมุม Theta
ด้านตรงข้ามมุมฉาก
อธิบาย



เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $\tan\theta < 0$ จะได้ว่า θ อยู่ในจตุภาคที่ 2

นั่นคือ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$

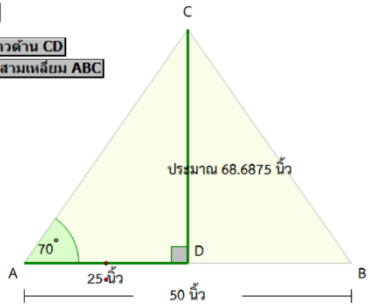
หน้าที่ 14

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม"

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีขนาดของมุมที่ฐาน 70 องศา และฐานยาว 50 นิ้ว จะมีพื้นที่ประมาณเท่าใด

เริ่มต้นใหม่

ความยาวด้าน CD
พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC



$\tan 70^\circ = \frac{CD}{AD}$

จะได้ $CD = AD\tan 70^\circ \approx 25(2.7475) \approx 68.6875$ ตารางนิ้ว

ดังนั้น พื้นที่รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วประมาณ $\frac{1}{2} \times 50 \times 68.6875 \approx 1{,}717.19$ ตารางนิ้ว

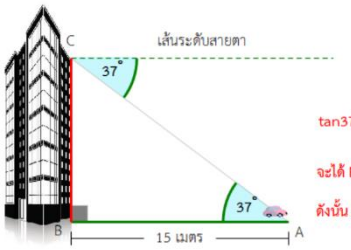
หน้าที่ 15

"ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม"

น้องมิ้นยืนบนยอดตึก มุมจากสายตาน้องมิ้นไปยังรถยนต์ของพ่อที่จอดอยู่ห่างจากตึกเป็นระยะ 15 เมตร มีขนาด 37 องศา ถ้าไม่คิดส่วนสูงของน้องมิ้น ตึกสูงเท่าไร

เริ่มต้นใหม่

มุมก้ม 37 องศา
มุมเงย 37 องศา
BC
AB
อธิบาย



$\tan 37^\circ = \frac{BC}{AB}$

จะได้ $BC = AB\tan 37^\circ \approx 15(0.7536) \approx 11.304$ เมตร

ดังนั้น ถ้าไม่คิดส่วนสูงของน้องมิ้น ตึกสูงประมาณ 11.304 เมตร

เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) เปลี่ยนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศาหรือมุมที่มีหน่วยเป็นองศาเป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 11 - 12 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 8 - 10 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 7 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อหรือมีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 3 และข้อ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 8 - 9 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 3 และข้อ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 - 7 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 3 และข้อ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 5 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 3 และข้อ 4 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อหรือมีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 3 และข้อ 4 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ								ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (เปลี่ยนมุม)				2) (การหาค่า)					
		แบบฝึกหัดที่ 5 ข้อ 1 - ข้อ 2				แบบฝึกหัดที่ ถ ข้อ 3 - ข้อ 4					
		4	3	2	1	4	3	2	1		

เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้การแก้ปัญหาในการนำฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมไปหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้	สามารถแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 5 - 10 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 - 6 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 5 - 10 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 5 - 10 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการแก้ปัญหาโดยทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้หลักการกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมได้	สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ทำโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 5 - 10 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 - 6 ข้อ	สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ทำโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 5 - 10 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ทำโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ข้อ 5 - 10 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ทำโจทย์ในแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ								ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (การแก้ปัญหา) แบบฝึกหัดที่ 5 ข้อ 5 - 10				2) (การเชื่อมโยง) แบบฝึกหัดที่ 5 ข้อ 5 - 10					
		4	3	2	1	4	3	2	1		

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1. ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่น	ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นส่วนใหญ่	ไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”
2. มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อยโดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อยบางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน	แต่งกายไม่เรียบร้อยหรือไม่แก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน
3. ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรงเวลา	การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที
4. มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ไม่ครบทุกข้อหรือครบทุกข้อแต่ไม่ถูกต้องหรือไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 5 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม”

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (ซื่อสัตย์สุจริต)				2) (มีวินัย)				3) (ใฝ่เรียนรู้)				4) (มุ่งมั่นในการทำงาน)					
		แบบฝึกหัดที่ 5				การแต่งกาย				การเข้าเรียน				แบบฝึกหัด 5					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแก้ปัญหาโจทย์ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์ฟังก์ชันตรีโกณิมิติของมุมที่กำหนดให้ได้	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	ไม่มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน ไม่แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มหรือช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม
4. ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ได้	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ทบทวนและสรุปเนื้อหาทุกครั้ง	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นส่วนใหญ่	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นบางครั้ง	ไม่ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม” ทบทวนและสรุปเนื้อหา

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (การแก้ปัญหา)				2) (การสื่อสาร)				3) (ทักษะชีวิต)				4) (เทคโนโลยี)					
		ใบงาน (ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม)				ใบงาน (ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม)				การทำงานกลุ่ม				สื่อ GSP (ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม)					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

แบบบันทึกสรุปคะแนนแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้				คะแนนรวม 20	คะแนนน้ำหนัก
		1 ด้านความรู้	2 ด้านทักษะฯ	3 ด้านคุณลักษณะฯ	4 ด้านสมรรถนะฯ		
		5	5	5	5	20	5

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ : บริษัท ธนธัชการพิมพ์ จำกัด.

พิชิต ฤทธิ์จรูญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงกทพฯ : เฮ้าส์ออฟเคอร์มิสท์.

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ.** พระนครศรีอยุทธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.

ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฎานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-NET คณิตศาสตร์ ม.6.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.**

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.** พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 5. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.

อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.