แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32201 **ภาคเรียนที่ 1**

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

สาระการเรียนรู้ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม เวลา 4 ชั่วโมง

1. ผลการเรียนรู้

เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

2. สาระการเรียนรู้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

3. สาระสำคัญ/ความคิดรวบยอด

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq 1$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq -1$$

4. จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

4.1.1 หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

4.1.2 แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

4.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถ

4.2.1 ใช้การแก้ปัญหาโจทย์การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

4.2.2 ใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

4.3 ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ นักเรียนเป็นผู้ที่

4.3.1 ซื่อสัตย์สุจริต

4.3.2 มีวินัย

4.3.3 ใฝ่เรียนรู้

4.3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

4.4 ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน นักเรียนเป็นผู้ที่

4.4.1 ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

4.4.2 ใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

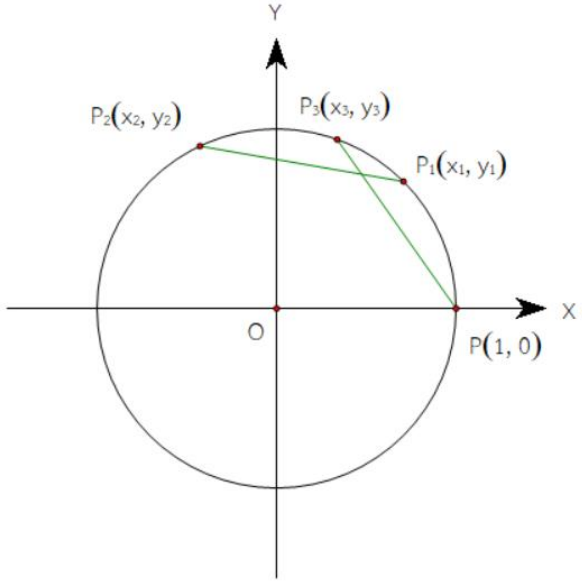
4.4.3 ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้

4.4.4 ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" ได้

5. เนื้อหา/สาระ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ในหัวข้อนี้จะศึกษาฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม โดยสิ่งแรกที่พิจารณา คือ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวน หรือมุมสองมุมนั่นคือ พิจารณาค่าของ $\cos(\alpha-\beta)$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ



กำหนดให้ P, P_1 และ P_2 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย

ให้ส่วนโค้ง PP_1 ยาว β หน่วย และส่วนโค้ง PP_2 ยาว α หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง P_1P_2 ยาว $\alpha-\beta$ หน่วย

ให้ P_3 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทำให้ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับ P_1P_2

ดังนั้น ส่วนโค้ง PP_3 ยาว $\alpha-\beta$ หน่วย

ให้พิกัดของจุด P_1, P_2 และ P_3 เป็น (x_1,y_1), (x_2,y_2) และ (x_3,y_3) ตามลำดับ

เนื่องจากส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น คอร์ด PP_3 ยาวเท่ากับคอร์ด P_1P_2

นั่นคือ
$$(PP_3)^2=(P_1P_2)^2$$
$$(x_3-1)^2+(y_3-0)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$
$$x_3^2-2x_3+1+y_3^2=x_2^2-2x_2x_1+x_1^2+y_2^2-2y_2y_1+y_1^2$$
$$-2x_3+2=-2x_2x_1-2y_2y_1+2$$

เพราะ จุด (x_1,y_1),(x_2,y_2) และ (x_3,y_3) อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย จะได้

$$x_3=x_2x_1+y_2y_1 \qquad \text{.....} (1)$$

เนื่องจาก จุด (x_1,y_1), (x_2,y_2) และ (x_3,y_3) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว β, α และ $\alpha-\beta$ หน่วย ตามลำดับ

จะได้ $x_1=\cos\beta$, $y_1=\sin\beta$

$x_2=\cos\alpha$, $y_2=\sin\alpha$

$x_3=\cos(\alpha-\beta)$

จากสมการ (1) จะได้

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหา $\cos(\alpha-\beta)$ หรือ โคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุม ที่กล่าวถึงก่อนเพราะหาได้ง่ายและสามารถนำไปหา $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ และ $\sin(\alpha-\beta)$ ซึ่งหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha-(-\beta))\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha(-\sin\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

ในการหา $\sin(\alpha+\beta)$ อาจทำได้โดยพิสูจน์ว่า $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha\\&=(0)\cos\alpha+(1)\sin\alpha\\&=\sin\alpha\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha}$$

ให้ $\theta=\frac{\pi}{2}-\beta$

จะได้ $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)=\cos\beta$$

เนื่องจาก $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

ดังนั้น $$\sin\theta=\cos\beta$$

นั่นคือ

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta}$$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta))\\ &= \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

เมื่อทราบค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$ และ $\cos(\alpha+\beta)$ แล้วสามารถหาค่าของ $\tan(\alpha+\beta)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \quad \text{เมื่อ } \cos(\alpha+\beta)\neq 0\\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\ &= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\end{aligned}$$

เมื่อ $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq 1$$

ดังนั้น
$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq 1}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อทราบค่าของ $\sin(\alpha-\beta)$ และ $\cos(\alpha-\beta)$ แล้วสามารถหาค่าของ $\tan(\alpha-\beta)$ ได้ดังนี้

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \quad \text{เมื่อ } \cos(\alpha-\beta)\neq 0$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

เมื่อ $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq -1$$

ดังนั้น $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta\neq -1$

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมทำได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ จาก $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

□

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)$

วิธีทำ จาก $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{6}$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$$
$$=-\frac{1}{2}$$ □

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\tan\frac{7\pi}{12}$

วิธีทำ จาก $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta\neq 1$

จะได้ $\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\left(\sqrt{3}\right)(1)}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$$
$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{1-3}$$
$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$
$$=-2-\sqrt{3}$$ □

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18}$

วิธีทำ จาก $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18}=\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{18}\right)$

$$=\cos\frac{3\pi}{18}$$
$$=\cos\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ □

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\sin 15^\circ$ และ $\cos 75^\circ$

วิธีทำ จาก $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin 15^\circ=\sin\left(45^\circ-30^\circ\right)$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

จาก $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos 75^\circ=\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)$

$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

หรือ หา $\cos 75^\circ$ จาก $\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$

จะได้ $\cos 75^\circ=\cos\left(90^\circ-15^\circ\right)$

$$=\sin 15^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

□

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่า $\tan 15^\circ$

วิธีทำ จาก $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta\neq-1$

จะได้ $\tan 15^\circ=\tan\left(45^\circ-30^\circ\right)$

$$=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+(1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2-\sqrt{3}$$ □

ตัวอย่างที่ 7 จงแสดงว่า $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

วิธีทำ จาก $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

จะได้ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{2}\sin\theta}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta}$$

$$= \frac{(1)\cos\theta-(0)\sin\theta}{(0)\cos\theta+(1)\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

หรือ จาก $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ และ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

จะได้ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$ □

ตัวอย่างที่ 8 ให้ $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ เมื่อ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ และ $\cos\beta = -\frac{4}{5}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

จงหา 1) $\cos\alpha$ 2) $\sin\beta$ 3) $\cos(\alpha+\beta)$ 4) $\sin(\alpha-\beta)$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ และ $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$

จะได้ $\left(-\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$$\frac{25}{169} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{144}{169}$$

ดังนั้น $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ หรือ $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

เนื่องจาก $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ดังนั้น $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$

2) เนื่องจาก $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ และ $\cos\beta = -\frac{4}{5}$

จะได้ $\sin^2\beta + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$$\sin^2\beta + \frac{16}{25} = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sin^2\beta = \frac{9}{25}$$

ดังนั้น $\sin\beta = \frac{3}{5}$ หรือ $\sin\beta = -\frac{3}{5}$

เนื่องจาก $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ดังนั้น $\sin\beta = \frac{3}{5}$

3) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \left(-\frac{12}{13}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{5}{13}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{48}{65} + \frac{15}{65}$$

$$= \frac{63}{65}$$

4) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$= \left(-\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{20}{65} + \frac{36}{65}$$

$$= \frac{56}{65}$$ □

จากค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ และ $\cos(\alpha-\beta)$ เมื่อนำมาบวกหรือลบกันจะได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญต่อไปนี้

จาก

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \text{.....} (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \text{.....} (2)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \text{.....} (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \text{.....} (4)$$

(1) + (2) จะได้

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

นั่นคือ $$\boxed{2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$$

(1) - (2) จะได้

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

นั่นคือ $$\boxed{2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$$

(3) + (4) จะได้

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

นั่นคือ $$\boxed{2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$$

(3) - (4) จะได้

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

นั่นคือ $$\boxed{2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $\cos 15^\circ \cos 585^\circ$

วิธีทำ จาก $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

จะได้

$$2\cos 15^\circ \cos 585^\circ = \cos\left(15^\circ+585^\circ\right)+\cos\left(15^\circ-585^\circ\right)$$

$$= \frac{\cos\left(15^\circ + 585^\circ\right) + \cos\left(15^\circ - 585^\circ\right)}{2}$$

$$= \frac{\cos 600^\circ + \cos\left(-570^\circ\right)}{2}$$

$$= \frac{\cos 600^\circ + \cos 570^\circ}{2}$$

$$= \frac{\cos\left(360^\circ + 240^\circ\right) + \cos\left(360^\circ + 210^\circ\right)}{2}$$

$$= \frac{\cos 240^\circ + \cos 210^\circ}{2}$$

$$= \frac{\cos\left(180^\circ + 60^\circ\right) + \cos\left(180^\circ + 30^\circ\right)}{2}$$

$$= \frac{-\cos 60^\circ - \cos 30^\circ}{2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \qquad \square$$

นอกจากนี้ยังสามารถหาความสัมพันธ์อื่น ๆ ได้ ดังนี้

เนื่องจาก $2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ .....(1)

$2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$ .....(2)

$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ .....(3)

$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ .....(4)

กำหนดให้ $x + y = \alpha$ และ $x - y = \beta$

จะได้ $2x = \alpha + \beta$ นั่นคือ $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$

และ $2y = \alpha - \beta$ นั่นคือ $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

จาก (1), (2), (3) และ (4) จะได้

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

จะได้ $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ = 2\cos\left(\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\right)$

$$= 2\cos 45^\circ \cos 30^\circ$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$

□

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของ $\sin\frac{17\pi}{12} - \sin\frac{11\pi}{12}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

จะได้

$$\sin\frac{17\pi}{12} - \sin\frac{11\pi}{12} = 2\cos\left(\frac{\frac{17\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{17\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{7\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= 2\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \square$$

เมื่อทราบค่าของ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ หรือ $\tan\alpha$ จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนซึ่งเป็นสองเท่าของ α ได้ โดยอาศัยค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ และ $\tan(\alpha+\beta)$ ตามลำดับเช่น

เนื่องจาก $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha)$

$$= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha$$

ดังนั้น $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

สามารถหาค่าของ $\cos 2\alpha$ จาก $\cos(\alpha+\beta)$ ได้ดังนี้

เนื่องจาก $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha)$

$$= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

ดังนั้น $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ .....(1)

แทน $\cos^2\alpha$ ด้วย $1-\sin^2\alpha$ ใน (1)

จะได้ $\cos 2\alpha = \left(1-\sin^2\alpha\right) - \sin^2\alpha$

ดังนั้น $\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$

และแทน $\cos^2\alpha$ ด้วย $1-\cos^2\alpha$ ใน (1)

จะได้ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1-\cos^2\alpha\right)$

ดังนั้น $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

และสามารถหาค่าของ $\tan 2\alpha$ โดยใช้สูตร $\tan(\alpha+\beta)$ ดังนี้

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha)$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

ดังนั้น $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ เมื่อ $\tan^2\alpha \neq 1$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ และ $\cos\theta < 0$ จงหาค่าของ

1) $\sin 2\theta$ 2) $\cos 2\theta$ 3) $\tan 2\theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

จะได้ $\cos^2\theta + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{16}{25}$$
$$= \frac{9}{25}$$

ดังนั้น $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ เพราะ $\cos\theta < 0$

1) จาก $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

จะได้ $\sin 2\theta = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$

$$= -\frac{24}{25}$$

2) จาก $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

จะได้ $\cos 2\theta = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$$= \frac{9}{25} - \frac{16}{25}$$
$$= -\frac{7}{25}$$

3) จาก $\tan 2\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

จะได้ $\tan 2\theta = \dfrac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}$

$$= \frac{24}{7}$$

หรือจาก $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ และ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{4}{3}$

จะได้ $$\tan 2\theta = \frac{2\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}$$

$$= \left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{9}{7}\right) = \frac{24}{7}$$ □

ตัวอย่างที่ 13 จงแสดงว่า $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$ และ $\cos\theta \neq 0$

วิธีทำ $$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1-\left(1-2\sin^2\theta\right)}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$ และ $\cos\theta \neq 0$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta$$ □

ตัวอย่างที่ 14 จงแสดงว่า $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$ เมื่อ $\cot\theta \neq \tan\theta$

วิธีทำ $$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2}{\frac{1-\tan^2\theta}{\tan\theta}}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{\tan\theta} - \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}}$$

$$= \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$$ □

ตัวอย่างที่ 15 จงเขียน $\sin 3\theta$ ในรูปของ $\sin\theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + \left(1-2\sin^2\theta\right)\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta\\ &= 2\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right) + \sin\theta - 2\sin^3\theta\\ &= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta\\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad \square\end{aligned}$$

6. การวัดและการประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านความรู้ 1) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 1 และข้อ 2	- แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8	- แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 - แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้	ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 ได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 3 - ข้อ 7	- แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 3 - ข้อ 7 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้การแก้ปัญหาโจทย์การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	ตรวจแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8	- แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 - แบบบันทึกประเมินทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์	นักเรียนใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต	ตรวจการทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”	- แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) มีวินัย	บันทึกการแต่งกาย	- แบบบันทึกการแต่งกาย - แบบบันทึกประเมินผลด้าน	นักเรียนมีวินัย อยู่ในระดับดีขึ้นไป

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
		คุณลักษณะที่พึงประสงค์	
3) ใฝ่เรียนรู้	บันทึกการเข้าเรียน	- แบบบันทึกการเข้าเรียน - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนใฝ่เรียนรู้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	- การส่งแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”	- แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” - แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์	นักเรียนมุ่งมั่นในการทำงานอยู่ในระดับดีขึ้นไป
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”	- ใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
2) ใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	ตรวจใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”	- ใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”	นักเรียนใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือ

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์การผ่าน
		- แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	มุมได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	ตรวจการทำงานกลุ่ม	- แบบบันทึกการทำงานกลุ่ม - แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้อยู่ในระดับดีขึ้นไป
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" ได้	ตรวจการใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม"	- สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" - แบบบันทึกประเมินด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	นักเรียนใช้เทคโนโลยีเพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" ได้ อยู่ในระดับดีขึ้นไป

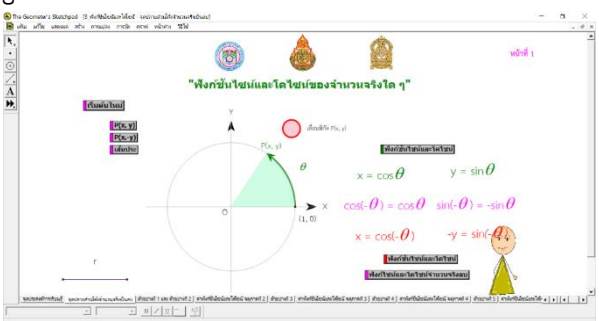
7. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ชั่วโมงที่ 1

ขั้นเตรียม

7.1 ครูจัดกลุ่มให้นักเรียนกลุ่มละ 4 คนโดยมีนักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 1 คน เพื่อให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกัน

7.2 ครูทบทวนเรื่อง "ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์" โดยการสนทนาถามตอบกับนักเรียนและใช้ สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ" หน้าที่ 1 ประกอบ ดังรูป



ขั้นสอนและอธิบายทฤษฎี

7.3 ครูอธิบายการหาค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุมโดยการพิจารณาค่าของ $\cos(\alpha-\beta)$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" (หน้า 1) โดยการสุ่มนักเรียนในชั้นเรียนตอบคำถามหรือสนทนาถามตอบกับนักเรียนระหว่างการอธิบาย นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติมนักเรียนศึกษาใบความรู้ "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" ประกอบ

7.4 ครูให้นักเรียนหาค่าของ $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ $\tan(\alpha+\beta)$ และ $\tan(\alpha-\beta)$ โดยใช้คำถามให้นักเรียนคิดประกอบการอธิบายด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" (หน้า 2 - 4)

7.5 ครูให้ศึกษายกตัวอย่างที่ 1 ถึง ตัวอย่างที่ 8 จากใบความรู้ "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" แล้วสุ่มให้นักเรียนอธิบายตัวอย่างที่ 1 ถึง ตัวอย่างที่ 8 ตามลำดับ ครูและเพื่อนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียนร่วมกับอธิบายเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 2

7.6 ครูอธิบายการหาความสัมพันธ์ของการนำ $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ และ $\cos(\alpha-\beta)$ มาบวกและลบกัน และด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" (หน้า 5 -6) โดยการสุ่มนักเรียนในชั้นเรียนตอบคำถามหรือสนทนาถามตอบกับนักเรียนระหว่างการอธิบาย นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติมนักเรียนศึกษาใบความรู้ "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" ประกอบ

7.7 ครูอธิบายเมื่อทราบค่าของ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ หรือ $\tan\alpha$ จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนซึ่งเป็นสองเท่าของ α ด้วยสื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" (หน้า 7) โดยการสุ่มนักเรียนในชั้นเรียนตอบคำถามหรือสนทนาถามตอบกับนักเรียนระหว่างการอธิบาย นักเรียนคนอื่นในชั้นร่วมตอบคำถามเพิ่มเติมนักเรียนศึกษาใบความรู้ "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" ประกอบ

ชั่วโมงที่ 3

ขั้นกิจกรรมกลุ่มและใช้ทฤษฎี หลักการ

7.8 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมความคิดทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” โดยนำความรู้ที่ได้ศึกษาจากใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ในชั่วโมงที่ 1 และ 2 ประกอบครูคอยสังเกตและแนะนำเพิ่มเติม

ชั่วโมงที่ 4

7.9 ครูสุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเฉลยคำตอบในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” โดยครูสนทนาถามตอบกับนักเรียน นักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมตอบคำถามเพิ่มเติม หน้าชั้นเรียน ครูอธิบายและนักเรียนคนอื่น ๆ ร่วมอธิบายเพิ่มเติม

ขั้นตรวจสอบและสรุป

7.10 จากการทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” และศึกษาใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ให้นักเรียนสรุปสูตรการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ลงในสมุดหรือกระดาษ A4 เพื่อใช้เป็นสูตรไปใช้ต่อไป

ขั้นฝึกปฏิบัติและประเมินผล

7.11 มอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” เป็นการบ้าน

7.12 ครูมอบหมายให้นักเรียนทบทวนบทเรียนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” เพื่อเป็นการทบทวนและศึกษาความรู้เพิ่มเติมด้วยตัวเอง

8. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

สื่อเอกสาร	สื่อวัสดุ/สื่อเทคโนโลยี	แหล่งการเรียนรู้	สื่ออื่น ๆ
- ใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” - ใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” - แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”	สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”	-	-

9. บันทึกหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

9.1 สรุปผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	นักเรียนที่ผ่าน		นักเรียนที่ไม่ผ่าน	
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ด้านความรู้ 1) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้				
2) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้				
ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ 1) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้				
2) ใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้				
ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ 1) ซื่อสัตย์สุจริต				
2) มีวินัย				
3) ใฝ่เรียนรู้				
4) มุ่งมั่นในการทำงาน				
ด้านสมรรถนะสำคัญของนักเรียน 1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้				
2) ใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้				
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้				
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ได้				

9.2 ปัญหา/อุปสรรค

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9.3 แนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นายอนิรุทธิ์ ลิพอนพล)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ

10 . ความคิดเห็นของฝ่ายบริหาร

10.1 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางสาวสุชาดา อินนุรักษ์)

ตำแหน่งครู

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

10.2 ความคิดเห็นของหัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นางศศิมา ทิพย์สวัสดิ์)

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ

ปฏิบัติหน้าที่ หัวหน้ากลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.3 ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายเจษฎา ศรีวิเศษ)

รองผู้อำนวยการกลุ่มบริหารงานวิชาการ

10.4 ความคิดเห็นของผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

.....

.....

ลงชื่อ.....

(นายดลยวัฒน์ สันติพิทักษ์)

ผู้อำนวยการโรงเรียนทับปุดวิทยา

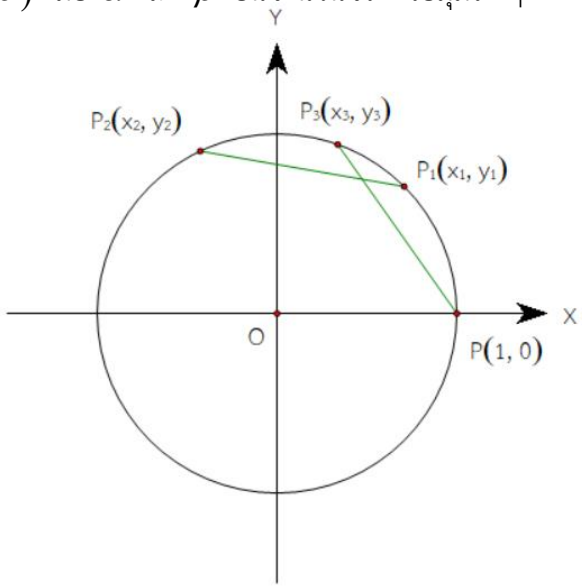
ใบความรู้ “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้
2. แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ในหัวข้อนี้จะศึกษาฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม โดยสิ่งแรกที่พิจารณา คือ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวน หรือมุมสองมุมนั่น คือ พิจารณาค่าของ $\cos(\alpha-\beta)$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ



กำหนดให้ P, P_1 และ P_2 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย

ให้ส่วนโค้ง PP_1 ยาว β หน่วย และส่วนโค้ง PP_2 ยาว α หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง P_1P_2 ยาว $\alpha-\beta$ หน่วย

ให้ P_3 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทำให้ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับ P_1P_2

ดังนั้น ส่วนโค้ง PP_3 ยาว $\alpha-\beta$ หน่วย

ให้พิกัดของจุด P_1, P_2 และ P_3 เป็น (x_1,y_1), (x_2,y_2) และ (x_3,y_3) ตามลำดับ

เนื่องจากส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น คอร์ด PP_3 ยาวเท่ากับคอร์ด P_1P_2

นั่นคือ $$(PP_3)^2 = (P_1P_2)^2$$

$$(x_3-1)^2+(y_3-0)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$x_3^2-2x_3+1+y_3^2=x_2^2-2x_2x_1+x_1^2+y_2^2-2y_2y_1+y_1^2$$

$$-2x_3+2=-2x_2x_1-2y_2y_1+2$$ (เพราะ จุด (x_1,y_1), (x_2,y_2) และ (x_3,y_3) อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย)

$$x_3=x_2x_1+y_2y_1 \quad \text{.....} (1)$$

เนื่องจาก จุด (x_1,y_1), (x_2,y_2) และ (x_3,y_3) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว β, α และ $\alpha-\beta$ หน่วย ตามลำดับ

จะได้ $x_1=\cos\beta$, $y_1=\sin\beta$

$x_2=\cos\alpha$, $y_2=\sin\alpha$

$x_3=\cos(\alpha-\beta)$

จากสมการ (1) จะได้

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหา $\cos(\alpha-\beta)$ หรือ โคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุม ที่กล่าวถึงก่อนเพราะหาได้ง่ายและสามารถนำไปหา $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$ และ $\sin(\alpha-\beta)$ ซึ่งหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos(\alpha-(-\beta))\\&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha(-\sin\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

ในการหา $\sin(\alpha+\beta)$ อาจทำได้โดยพิสูจน์ว่า $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha\\&=(0)\cos\alpha+(1)\sin\alpha\\&=\sin\alpha\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha}$$

ให้ $\theta=\frac{\pi}{2}-\beta$

จะได้
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)=\cos\beta$$

เนื่องจาก
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

ดังนั้น
$$\sin\theta=\cos\beta$$

นั่นคือ
$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta}$$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\\&=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin(\alpha+(-\beta))\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

เมื่อทราบค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$ และ $\cos(\alpha+\beta)$ แล้วสามารถหาค่าของ $\tan(\alpha+\beta)$ ได้ดังนี้

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \quad \text{เมื่อ } \cos(\alpha+\beta)\neq 0$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \quad \text{เมื่อ } \cos\alpha\cos\beta\neq 0$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq 1$$

ดังนั้น $\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq 1}$

ในทำนองเดียวกันเมื่อทราบค่าของ $\sin(\alpha-\beta)$ และ $\cos(\alpha-\beta)$ แล้วสามารถหาค่าของ $\tan(\alpha-\beta)$ ได้ดังนี้

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \quad \text{เมื่อ } \cos(\alpha-\beta)\neq 0$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \quad \text{เมื่อ } \cos\alpha\cos\beta\neq 0$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq -1$$

ดังนั้น $\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta\neq -1}$

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมทำได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ จาก $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ □

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)$

วิธีทำ จาก $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{6}$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}$$ □

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\tan\frac{7\pi}{12}$

วิธีทำ จาก $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta\neq 1$

จะได้ $\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\left(\sqrt{3}\right)(1)}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{1-3}$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$=-2-\sqrt{3}$$ □

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18}$

วิธีทำ จาก $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18}=\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{18}\right)$

$$=\cos\frac{3\pi}{18}$$

$$=\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ □

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\sin 15^\circ$ และ $\cos 75^\circ$

วิธีทำ จาก $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin 15^\circ=\sin\left(45^\circ-30^\circ\right)$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

จาก $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos 75^\circ=\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)$

$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

หรือ หา $\cos 75^\circ$ จาก $\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$

จะได้ $\cos 75^\circ=\cos\left(90^\circ-15^\circ\right)$

$$=\sin 15^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่า $\tan 15^\circ$

วิธีทำ จาก $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta \neq -1$

จะได้

$$\begin{aligned}
\tan 15^\circ &= \tan\left(45^\circ - 30^\circ\right) \\
&= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\
&= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+(1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\right) \\
&= \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1} \\
&= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} \\
&= 2-\sqrt{3} \qquad \square
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงแสดงว่า $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$

วิธีทำ จาก $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

จะได้

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \\
&= \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta}
\end{aligned}$$

$$=\frac{(1)\cos\theta-(0)\sin\theta}{(0)\cos\theta+(1)\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

หรือ จาก $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ และ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

จะได้ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$ □

ตัวอย่างที่ 8 ให้ $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ เมื่อ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ และ $\cos\beta=-\frac{4}{5}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

จงหา 1) $\cos\alpha$ 2) $\sin\beta$ 3) $\cos(\alpha+\beta)$ 4) $\sin(\alpha-\beta)$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ และ $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$

จะได้ $\left(-\frac{5}{13}\right)^2+\cos^2\alpha=1$

$$\frac{25}{169}+\cos^2\alpha=1$$

$$\cos^2\alpha=1-\frac{25}{169}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{144}{169}$$

ดังนั้น $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ หรือ $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$

เนื่องจาก $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ ดังนั้น $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$

2) เนื่องจาก $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ และ $\cos\beta=-\frac{4}{5}$

จะได้ $\sin^2\beta+\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1$

$$\sin^2\beta+\frac{16}{25}=1$$

$$\sin^2\beta=1-\frac{16}{25}$$

$$\sin^2\beta=\frac{9}{25}$$

ดังนั้น $\sin\beta=\frac{3}{5}$ หรือ $\sin\beta=-\frac{3}{5}$

เนื่องจาก $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ ดังนั้น $\sin\beta=\frac{3}{5}$

3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\left(-\tfrac{12}{13}\right)\left(-\tfrac{4}{5}\right)-\left(-\tfrac{5}{13}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right)$$
$$=\tfrac{48}{65}+\tfrac{15}{65}$$
$$=\tfrac{63}{65}$$

4) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\left(-\tfrac{5}{13}\right)\left(-\tfrac{4}{5}\right)-\left(-\tfrac{12}{13}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right)$$
$$=\tfrac{20}{65}+\tfrac{36}{65}$$
$$=\tfrac{56}{65}$$ □

จากค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ และ $\cos(\alpha-\beta)$ เมื่อนำมาบวกหรือลบกันจะได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญต่อไปนี้

จาก

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \text{.....} \quad (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \text{.....} \quad (2)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \text{.....} \quad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \text{.....} \quad (4)$$

(1) + (2) จะได้

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

นั่นคือ $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

(1) - (2) จะได้

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

นั่นคือ $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

(3) + (4) จะได้

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

นั่นคือ $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

(3) - (4) จะได้

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

นั่นคือ $\boxed{2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $\cos 15^\circ \cos 585^\circ$

วิธีทำ จาก $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

จะได้

$$\begin{aligned}
2\cos 15^\circ \cos 585^\circ &= \cos\left(15^\circ+585^\circ\right)+\cos\left(15^\circ-585^\circ\right)\\
&= \frac{\cos\left(15^\circ+585^\circ\right)+\cos\left(15^\circ-585^\circ\right)}{2}\\
&= \frac{\cos 600^\circ+\cos\left(-570^\circ\right)}{2}\\
&= \frac{\cos 600^\circ+\cos 570^\circ}{2}\\
&= \frac{\cos\left(360^\circ+240^\circ\right)+\cos\left(360^\circ+210^\circ\right)}{2}\\
&= \frac{\cos 240^\circ+\cos 210^\circ}{2}\\
&= \frac{\cos\left(180^\circ+60^\circ\right)+\cos\left(180^\circ+30^\circ\right)}{2}\\
&= \frac{-\cos 60^\circ-\cos 30^\circ}{2}\\
&= \frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\\
&= \frac{-1-\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

□

นอกจากนี้ยังสามารถหาความสัมพันธ์อื่น ๆ ได้ ดังนี้

เนื่องจาก $2\sin x\cos y = \sin(x+y)+\sin(x-y)$ .....(1)

$2\cos x\sin y = \sin(x+y)-\sin(x-y)$ .....(2)

$$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y) \qquad \text{.....(3)}$$

$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y) \qquad \text{.....(4)}$$

กำหนดให้ $x+y=\alpha$ และ $x-y=\beta$

จะได้ $2x=\alpha+\beta$ นั่นคือ $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

และ $2y=\alpha-\beta$ นั่นคือ $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$

จาก (1), (2), (3) และ (4) จะได้

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

จะได้

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ + \cos 15^\circ &= 2\cos\left(\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\right)\\ &= 2\cos 45^\circ \cos 30^\circ\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของ $\sin\frac{17\pi}{12} - \sin\frac{11\pi}{12}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

จะได้

$$\sin\frac{17\pi}{12}-\sin\frac{11\pi}{12}=2\cos\left(\frac{\frac{17\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{17\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{7\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=2\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$ □

เมื่อทราบค่าของ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ หรือ $\tan\alpha$ จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนซึ่งเป็นสองเท่าของ α ได้ โดยอาศัยค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ และ $\tan(\alpha+\beta)$ ตามลำดับเช่น

เนื่องจาก $\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)$

$$=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha$$

ดังนั้น $\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$

สามารถหาค่าของ $\cos 2\alpha$ จาก $\cos(\alpha+\beta)$ ได้ดังนี้

เนื่องจาก $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)$

$$=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

ดังนั้น $\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ .....(1)

แทน $\cos^2\alpha$ ด้วย $1-\sin^2\alpha$ ใน (1)

จะได้ $\cos 2\alpha=\left(1-\sin^2\alpha\right)-\sin^2\alpha$

ดังนั้น $\boxed{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha}$

และแทน $\cos^2\alpha$ ด้วย $1-\cos^2\alpha$ ใน (1)

จะได้ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right)$

ดังนั้น $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

และสามารถหาค่าของ $\tan 2\alpha$ โดยใช้สูตร $\tan(\alpha+\beta)$ ดังนี้

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha)$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha}$$

ดังนั้น $\boxed{\tan\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad \text{เมื่อ} \quad \tan^2\alpha \neq 1}$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ และ $\cos\theta < 0$ จงหาค่าของ

1) $\sin 2\theta$ 2) $\cos 2\theta$ 3) $\tan 2\theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

จะได้ $\cos^2\theta + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{16}{25}$$
$$= \frac{9}{25}$$

ดังนั้น $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ เพราะ $\cos\theta < 0$

1) จาก $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

จะได้ $\sin 2\theta = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$

$$= -\frac{24}{25}$$

2) จาก $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

จะได้ $\cos 2\theta = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$$= \frac{9}{25} - \frac{16}{25}$$
$$= -\frac{7}{25}$$

3) จาก $\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

จะได้ $$\tan 2\theta = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}$$
$$= \frac{24}{7}$$

หรือจาก $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ และ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{4}{3}$

จะได้ $$\tan 2\theta = \frac{2\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}$$
$$= \left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{9}{7}\right) = \frac{24}{7}$$ □

ตัวอย่างที่ 13 จงแสดงว่า $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$ และ $\cos\theta \neq 0$

วิธีทำ $$\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{1-\left(1-2\sin^2\theta\right)}{2\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$ เมื่อ $\sin\theta \neq 0$ และ $\cos\theta \neq 0$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \tan\theta$$ □

ตัวอย่างที่ 14 จงแสดงว่า $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$ เมื่อ $\cot\theta \neq \tan\theta$

วิธีทำ $$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$= \frac{2}{\frac{1-\tan^2\theta}{\tan\theta}}$$
$$= \frac{2}{\frac{1}{\tan\theta} - \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}}$$
$$= \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$$ □

ตัวอย่างที่ 15 จงเขียน $\sin 3\theta$ ในรูปของ $\sin\theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin\left(2\theta + \theta\right) \\
&= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + \left(1 - 2\sin^2\theta\right)\sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta \\
&= 2\sin\theta\left(1 - \sin^2\theta\right) + \sin\theta - 2\sin^3\theta \\
&= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta \\
&= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad \square
\end{aligned}$$

ใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

2) ใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. รับใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”
2. ให้นักเรียจับฉลากหมายเลขข้อที่ได้รับมอบหมายกลุ่มละ 1 ข้อ
3. ให้นักเรียนระดมความคิดในการแก้ปัญหาโจทย์โดยใช้ความรู้เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”
4. ให้นักเรียนระบุนิยามหรือสมบัติจากความรู้เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”
5. นักเรียนแต่ละกลุ่มออกนำเสนอวิธีทำโจทย์ของกลุ่มและบันทึกแลกเปลี่ยนเรียนรู้ลงในใบงาน
6. นักเรียนกลุ่มอื่น ๆ แสดงความคิดเห็นและตอบคำถามเพิ่มเติม

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกในกลุ่ม

1. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

2. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

3. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

4. ชื่อ.....นามสกุล.....เลขที่.....

บทบาท O หัวหน้ากลุ่ม O รองหัวหน้ากลุ่ม O สมาชิก O เลขานุการ

ได้คะแนน.....คะแนน เวลาในการทำใบงาน.....นาที

ลำดับคะแนนของกลุ่ม.....

กลุ่มที่ 1	**โจทย์** จงเขียน $\tan 3\theta$ ในรูปของ $\tan\theta$
วิธีทำ	นิยามหรือสมบัติที่ใช้

ข้อที่ 2	**โจทย์** ให้ $\frac{3\pi}{2} \leq A \leq 2\pi$ และ $\frac{\pi}{2} \leq B \leq \pi$ ถ้า $\cos A = \frac{4}{5}$ และ $\sin B = \frac{12}{13}$ จงหา $\cos(2A + B)$

วิธีทำ	นิยามหรือสมบัติที่ใช้

ข้อที่ 3	**โจทย์** ให้ A, B และ C เป็นมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC จงแสดงว่า $\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\cot\frac{C}{2}$
วิธีทำ	

ข้อที่ 4	**โจทย์** ถ้า $A+B=\frac{\pi}{4}$ และ $\tan A=\frac{n}{n+1}$ จงหา tanB
วิธีทำ	

ข้อที่ 5	โจทย์ ถ้า $\tan x = \frac{1}{2}$ จงหา $\cot 2x$
วิธีทำ	

ข้อที่ 6	โจทย์ จงหาค่าของ $\sin 80^\circ \cos 25^\circ + \frac{1}{2}\left(\sin 105^\circ - \sin 55^\circ\right)$
วิธีทำ	

ข้อที่ 7	โจทย์ จงแสดงว่า $\cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1$
วิธีทำ	

ข้อที่ 8	โจทย์ จงแสดงว่า $\left(\operatorname{cosec}^2 A - 2\right)\tan 2A = 2\cot A$
วิธีทำ	

เฉลยใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”

กลุ่มที่ 1	โจทย์ จงเขียน $\tan 3\theta$ ในรูปของ $\tan\theta$
$\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta)$ $= \dfrac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1-\tan 2\theta \tan\theta}$ ..... (1) เนื่องจาก $\tan 2\theta + \tan\theta$ $= \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + \tan\theta$ $= \dfrac{2\tan\theta + \tan\theta - \tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}$ $= \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}$ ..... (2) และ $1-\tan 2\theta \tan\theta$ $= 1-\left(\dfrac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2\theta}\times\tan\theta\right)$ $= 1-\dfrac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$ $= \dfrac{1-\tan^2\theta - 2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$ $= \dfrac{1-3\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$ ..... (3) นำ (2) และ (3) ไปแทนใน (1) จะได้ $\tan 3\theta = \dfrac{\dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}}{\dfrac{1-3\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}}$ $= \dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}\times\dfrac{1-\tan^2\theta}{1-3\tan^2\theta}$ $= \dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$	นิยามหรือสมบัติที่ใช้ $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta \neq -1$ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ เมื่อ $\tan^2\alpha \neq 1$

ข้อที่ 2	โจทย์ ให้ $\frac{3\pi}{2} \le A \le 2\pi$ และ $\frac{\pi}{2} \le B \le \pi$ ถ้า $\cos A = \frac{4}{5}$ และ $\sin B = \frac{12}{13}$ จงหา $\cos(2A + B)$

	นิยามหรือสมบัติที่ใช้
เนื่องจาก $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ และ $\cos A = \frac{4}{5}$ จะได้ $\sin^2 A + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ $\sin^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$ $\sin^2 A = 1 - \frac{16}{25}$ $\sin^2 A = \frac{9}{25}$ ดังนั้น $\sin A = \frac{3}{5}$ หรือ $\sin A = -\frac{3}{5}$ จาก $\frac{3\pi}{2} \le A \le 2\pi$ จะได้ $\sin A = -\frac{3}{5}$ เนื่องจาก $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ และ $\sin B = \frac{12}{13}$ จะได้ $\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 B = 1$ $\frac{144}{169} + \cos^2 B = 1$ $\cos^2 B = 1 - \frac{144}{169}$ $\cos^2 B = \frac{25}{169}$ ดังนั้น $\cos B = \frac{5}{13}$ หรือ $\cos B = -\frac{5}{13}$ จาก $\frac{\pi}{2} \le B \le \pi$ จะได้ $\cos B = -\frac{5}{13}$ จาก $\cos(2A + B) = \cos 2A \cos B - \sin 2A \sin B$ $= \left(2\cos^2 A - 1\right)\cos B - 2\sin A \cos A \sin B$ จะได้ $\cos(2A + B) = \left(2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1\right)\left(-\frac{5}{13}\right) - 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$ $= \left(\frac{32}{25} - 1\right)\left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{288}{325}$ $= \left(\frac{7}{25}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{288}{325}$ $= -\frac{35}{325} + \frac{288}{325} = \frac{253}{325}$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

ข้อที่ 3	โจทย์ ให้ A, B และ C เป็นมุมของรูปสามเหลี่ยม ABC จงแสดงว่า $\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\cot\frac{C}{2}$

	นิยามหรือสมบัติที่ใช้
$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$=\tan\frac{A+B}{2}$ .....(1)	
เนื่องจาก $A+B+C=180^\circ$	
$A+B=180^\circ-c$	
หารด้วย 2 ทั้งสองข้าง	
$\frac{A+B}{2}=\frac{180^\circ-c}{2}$	
$\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{c}{2}$	
ดังนั้น $\tan\frac{A+B}{2}=\tan\left(90^\circ-\frac{c}{2}\right)$	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ เมื่อ $\cos\alpha\neq 0$
$=\frac{\sin\left(90^\circ-\frac{c}{2}\right)}{\cos\left(90^\circ-\frac{c}{2}\right)}$	
$=\frac{\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
$=\cot\frac{c}{2}$ .....(2)	$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ เมื่อ $\sin\alpha\neq 0$
จาก (1) และ (2) จะได้	
$\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\cot\frac{c}{2}$	

ข้อที่ 4	โจทย์ ถ้า $A+B=\frac{\pi}{4}$ และ $\tan A=\frac{n}{n+1}$ จงหา tanB

เนื่องจาก $A+B=\frac{\pi}{4}$ ดังนั้น $B=\frac{\pi}{4}-A$ นั่นคือ $\tan B=\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)$ $=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan A}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan A}$ $=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$ จาก $\tan A=\frac{n}{n+1}$ จะได้ $\tan B=\frac{1-\frac{n}{n+1}}{1+\frac{n}{n+1}}$ $=\frac{\frac{n+1-n}{n+1}}{\frac{n+1+n}{n+1}}$ $=\frac{n+1-n}{n+1}\times\frac{n+1}{n+1+n}$ $=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+1}{2n+1}$ $=\frac{1}{2n+1}$	นิยามหรือสมบัติที่ใช้ $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta\neq-1$

<table>
<tr><td>ข้อที่ 5</td><td colspan="2">โจทย์
ถ้า $\tan x = \frac{1}{2}$ จงหา $\cot 2x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\cot 2x = \frac{1}{\tan 2x}$
$= \frac{1}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$
$= \frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$
เนื่องจาก $\tan x = \frac{1}{2}$
จะได้ $\cot 2x = \frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$
$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)}$
$= \frac{1-\frac{1}{4}}{1}$
$= \frac{3}{4}$</td><td>นิยามหรือสมบัติที่ใช้
$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ เมื่อ $\tan^2\alpha \neq 0$
$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ เมื่อ $\tan^2\alpha \neq 1$</td></tr>
</table>

ข้อที่ 6	**โจทย์** จงหาค่า $\sin 80^\circ \cos 25^\circ + \frac{1}{2}\left(\sin 105^\circ - \sin 55^\circ\right)$

	นิยามหรือสมบัติที่ใช้
จาก $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$ จะได้ $\sin 80^\circ \cos 25^\circ$ $= \frac{2}{2}\sin 80^\circ \cos 25^\circ$ $= \frac{1}{2}\left(2\sin 80^\circ \cos 25^\circ\right)$ $= \frac{1}{2}\left(\sin\left(80^\circ + 25^\circ\right) + \sin\left(80^\circ - 25^\circ\right)\right)$ $= \frac{1}{2}\left(\sin 105^\circ + \sin 55^\circ\right)$ ดังนั้น $\sin 80^\circ \cos 25^\circ + \frac{1}{2}\left(\sin 105^\circ - \sin 55^\circ\right)$ $= \frac{1}{2}\left(\sin 105^\circ + \sin 55^\circ\right) + \frac{1}{2}\left(\sin 105^\circ - \sin 55^\circ\right)$ $= \frac{1}{2}\sin 105^\circ + \frac{1}{2}\sin 55^\circ + \frac{1}{2}\sin 105^\circ - \frac{1}{2}\sin 55^\circ$ $= \sin 105^\circ$ $= \sin\left(60^\circ + 45^\circ\right)$ $= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$ $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ $= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

ข้อที่ 7	โจทย์ จงแสดงว่า $\cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1$
$\cos 4A = \cos 2(2A)$ $= 2\cos^2 2A - 1$ $= 2\left(2\cos^2 A - 1\right)^2 - 1$ $= 2\left[\left(2\cos^2 A - 1\right)\left(2\cos^2 A - 1\right)\right] - 1$ $= 2\left[4\cos^4 A - 2\cos^2 A - 2\cos^2 A + 1\right] - 1$ $= 2\left[4\cos^4 A - 4\cos^2 A + 1\right] - 1$ $= 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 2 - 1$ $= 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1$	นิยามหรือสมบัติที่ใช้ $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ข้อที่ 8	โจทย์ จงแสดงว่า $\left(\operatorname{cosec}^2 A - 2\right)\tan 2A = 2\cot A$
$\left(\operatorname{cosec}^2 A - 2\right)\tan 2A$ $= \left(\left(\operatorname{cosec}^2 A - 1\right) - 1\right)\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $= \left(\cot^2 A - 1\right)\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $= (\cot A - 1)(\cot A + 1)\frac{2\tan A}{(1-\tan A)(1+\tan A)}$ $= \left(\frac{1}{\tan A} - 1\right)\left(\frac{1}{\tan A} + 1\right)\frac{2\tan A}{(1-\tan A)(1+\tan A)}$ $= \left(\frac{1-\tan A}{\tan A}\right)\left(\frac{1+\tan A}{\tan A}\right)\frac{2\tan A}{(1-\tan A)(1+\tan A)}$ $= \frac{2}{\tan A}$ $= 2\cot A$	นิยามหรือสมบัติที่ใช้ $\operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A$ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ เมื่อ $\tan^2 \alpha \neq 1$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ เมื่อ $\tan\alpha \neq 0$

แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้
2) แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้
2) ใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้

.....

1. จงใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมค่าต่อไปนี้

1) $\sin\left(60^\circ + 45^\circ\right)$ 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ 3) $\sin 225^\circ$

4) $\tan\frac{7\pi}{12}$ 5) $\sec\frac{19\pi}{12}$ 6) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

7) $\cot 105^\circ$ 8) $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ 9) $\sin 135^\circ$

2. จงหาค่าของ

1) $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} + \cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}$

2) $\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

3) $\cos 20^\circ \cos 10^\circ - \sin 20^\circ \sin 10^\circ$

4) $\sin 20^\circ \cos 80^\circ - \cos 20^\circ \sin 80^\circ$

5) $\dfrac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$

6) $\dfrac{\tan 75^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 75^\circ \tan 45^\circ}$

7) $\cos 80^\circ + \sin 50^\circ - \cos 20^\circ$

3. จงหาค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ และ $\tan(\alpha+\beta)$ เมื่อกำหนดให้

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ และ $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{\pi}{2} < \beta < 0$

2) $\operatorname{cosec}\alpha = -2, -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ และ $\tan\beta = \frac{15}{8}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

3) $\tan\alpha = -\frac{2}{3}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ และ $\cot\beta = -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

4. ถ้า $\sec\theta = -\frac{13}{12}$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ แล้วจงหา $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ และ $\tan 2\theta$

5. ถ้า $\cos 64^\circ = 0.44$ แล้วจงหา $\cos 32^\circ$

6. ถ้ากำหนดให้ $\sin A = -\frac{4}{5}$ และ $\tan B = \frac{5}{12}$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ และ $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$ แล้วจงหา

1) $\cos A$ 2) $\operatorname{cosec} B$

3) $\sec(A+B)$ 4) $\cot(A+B)$

7. จงหาค่าของ

1) $\sin 15^\circ - \sin 75^\circ$ 2) $\cos\frac{17\pi}{12} - \cos\frac{11\pi}{12}$

3) $\cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{9}$ 4) $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$

8. จงแสดงว่า

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$ 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -\sin\theta$ 4) $\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$

5) $\operatorname{cosec}\left(90^\circ-\theta\right) = \sec\theta$ 6) $\cot\left(90^\circ-\theta\right) = \tan\theta$

7) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 - \tan\alpha\tan\beta$ เมื่อ $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$

8) $\cos\left(x-30^\circ\right) - \cos\left(x+30^\circ\right) = \sin x$

9) $\sin\left(x-30^\circ\right) + \sin\left(x+30^\circ\right) = \sqrt{3}\sin x$

10) $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = \sin\theta + \cos\theta$ เมื่อ $\sin\theta \neq \cos\theta$

11) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ 12) $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

13) $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

14) $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ เมื่อ $\cos\alpha \neq -1$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”

1. 1) จาก $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin\left(60^\circ+45^\circ\right)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ □

2) จาก $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}$

$$=(0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(-1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=0+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$ □

3) จาก $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

และ $\sin 225^\circ=\sin\left(180^\circ+45^\circ\right)$

จะได้ $\sin\left(180^\circ+45^\circ\right)=\sin 180^\circ\cos 45^\circ+\cos 180^\circ\sin 45^\circ$

$$=(0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=0-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$ □

4) จาก $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta\neq 1$

และ $\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

จะได้ $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}}$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\sqrt{3}\right)}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}}{\frac{2-\sqrt{6}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}}\times\frac{2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{12}+4\sqrt{3}+2\sqrt{18}}{4-6}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{-2}$$

$$=\frac{8\sqrt{2}+6\sqrt{3}}{-2}$$

$$=-4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$$ □

5) จาก $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

และ $\sec\frac{19\pi}{12}=\frac{1}{\cos\frac{19\pi}{12}}=\frac{1}{\cos\left(\pi+\frac{7\pi}{12}\right)}=\frac{1}{\cos\frac{7\pi}{12}}=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}$

จะได้ $\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}}$

$$=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$
$$= \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{6}}{2-6}$$
$$= \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{6}}{-4}$$
$$= -\sqrt{2}-\sqrt{6} \qquad \square$$

6) จาก $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

และ $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{-\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$

จะได้ $\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{-\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$$= \frac{1}{-\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]}$$
$$= \frac{1}{-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}$$
$$= -\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$= -4\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$= -\sqrt{6}-\sqrt{2} \qquad \square$$

7) จาก $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta \neq 1$

และ $\cot 105^\circ = \frac{1}{\tan 105^\circ} = \frac{1}{\tan\left(60^\circ+45^\circ\right)}$

จะได้ $\frac{1}{\tan\left(60^\circ+45^\circ\right)} = \frac{1}{\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}}$

$$= \frac{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}$$
$$= \frac{1-\left(\sqrt{3}\right)(1)}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1-3+\sqrt{3}}{3-1}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}-4}{2} = \sqrt{3}-2$$
$$= \sqrt{3}-2 \qquad \square$$

8) จาก $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

และ $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

จะได้ $-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$= -\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \square$$

9) จาก $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin\left(60^\circ + 45^\circ\right) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \square$$

2. 1) จาก $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} + \cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\left(-\frac{5\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \sin\left(-\frac{4\pi}{2}\right)$$
$$= \sin(-2\pi)$$
$$= -\sin 2\pi$$
$$= 0 \qquad \square$$

2) จาก $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

จะได้

$$\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$ □

3) จาก $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos 20^\circ\cos 10^\circ-\sin 20^\circ\sin 10^\circ=\cos\left(20^\circ+10^\circ\right)$

$$=\cos 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ □

4) จาก $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\sin 20^\circ\cos 80^\circ-\cos 20^\circ\sin 80^\circ=\sin\left(20^\circ-80^\circ\right)$

$$=\sin\left(-60^\circ\right)$$

$$=-\sin 60^\circ$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$ □

5) จาก $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta\neq 1$

จะได้ $\frac{\tan 20^\circ+\tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ\tan 25^\circ}=\tan\left(20^\circ+25^\circ\right)$

$$=\tan 45^\circ$$

$$=1$$ □

6) จาก $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta\neq-1$

จะได้ $\frac{\tan 75^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 75^\circ\tan 45^\circ}=\tan\left(75^\circ-45^\circ\right)$

$=\tan 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$ □

7) จาก $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ และ

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

จะได้ $\cos 80^\circ+\sin 50^\circ-\cos 20^\circ$

$=\cos\left(60^\circ+20^\circ\right)+\sin\left(30^\circ+20^\circ\right)-\cos 20^\circ$

$=\cos 60^\circ\cos 20^\circ-\sin 60^\circ\sin 20^\circ+\sin 30^\circ\cos 20^\circ+\cos 30^\circ\sin 20^\circ-\cos 20^\circ$

$=\left(\frac{1}{2}\right)\cos 20^\circ-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin 20^\circ+\left(\frac{1}{2}\right)\cos 20^\circ+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sin 20^\circ-\cos 20^\circ$

$=\cos 20^\circ-\cos 20^\circ$

$=0$ □

3. 1) เนื่องจาก $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

จะได้ $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

ดังนั้น $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ เนื่องจาก $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

และเนื่องจาก $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$

จะได้ $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$

ดังนั้น $\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$

จะได้

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$= \frac{6}{5\sqrt{5}} + \frac{4}{5\sqrt{5}}$$
$$= \frac{10}{5\sqrt{5}}$$
$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$= \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$= -\frac{8}{5\sqrt{5}} - \frac{3}{5\sqrt{5}}$$
$$= -\frac{11}{5\sqrt{5}}$$
$$= -\frac{11\sqrt{5}}{25}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
$$= \frac{6}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{5\sqrt{5}}$$
$$= \frac{2}{5\sqrt{5}}$$
$$= \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{11\sqrt{5}}{25}}$$
$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{25}{11\sqrt{5}}\right)$$
$$= -\frac{10}{11}$$

□

2) เนื่องจาก $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

จะได้ $\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$

เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

จาก $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

จะได้ $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

นั่นคือ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

ดังนั้น $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$

และเนื่องจาก $\sec^2\beta = 1 + \tan^2\beta$

จะได้ $\sec^2\beta = 1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2 = 1 + \left(\frac{225}{64}\right) = \frac{289}{64}$

ดังนั้น $\sec\beta = -\frac{17}{8}$

เนื่องจาก $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

จาก $\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta}$ จะได้ $\cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{-\frac{17}{8}} = -\frac{8}{17}$

ดังนั้น $\cos\beta = -\frac{8}{17}$ และเนื่องจาก $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

จะได้ $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \left(-\frac{8}{17}\right)^2 = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$

นั่นคือ $\sin\beta = -\frac{15}{17}$

เนื่องจาก $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น $\cos\beta = -\frac{8}{17}$ และ $\sin\beta = -\frac{15}{17}$

จะได้ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{8}{17}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{15}{17}\right)$$

$$= \frac{8}{34} - \frac{15\sqrt{3}}{34}$$

$$= \frac{8-15\sqrt{3}}{34}$$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{8}{17}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{15}{17}\right)$$

$$= -\frac{8\sqrt{3}}{34} - \frac{15}{34}$$

$$= -\frac{15}{34} - \frac{8\sqrt{3}}{34}$$

$$= \frac{-15-8\sqrt{3}}{34}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{8}{17}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{15}{17}\right)$$

$$= \frac{8}{34} + \frac{15\sqrt{3}}{34}$$

$$= \frac{8+15\sqrt{3}}{34}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\frac{8-15\sqrt{3}}{34}}{\frac{-15-8\sqrt{3}}{34}}$$

$$= \frac{8-15\sqrt{3}}{34} \times \frac{34}{-15-8\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8-15\sqrt{3}}{-15-8\sqrt{3}} \times \frac{-15+8\sqrt{3}}{-15+8\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(8-15\sqrt{3}\right)\left(-15+8\sqrt{3}\right)}{(-15)^2-\left(8\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{-480+289\sqrt{3}}{225-192}$$

$$= \frac{-480+289\sqrt{3}}{33}$$ □

3) เนื่องจาก $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

จะได้ $\sec^2\alpha = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 + \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{13}{9}$

ดังนั้น $\sec\alpha = \frac{\sqrt{13}}{3}$

เนื่องจาก $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

จาก $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

จะได้ $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

ดังนั้น $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ และเนื่องจาก $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

จะได้ $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1 - \frac{9}{13} = \frac{4}{13}$

นั่นคือ $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

เนื่องจาก $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

ดังนั้น $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ และ $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

และเนื่องจาก $\operatorname{cosec}^2\beta = 1 + \cot^2\beta$

จะได้ $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

เนื่องจาก $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

จาก $\operatorname{cosec}\beta = \frac{1}{\sin\beta}$

จะได้ $\sin\beta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\beta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ และเนื่องจาก $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

จะได้ $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

นั่นคือ $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

เนื่องจาก $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

ดังนั้น $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ และ $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

จะได้ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{65}} + \frac{6}{\sqrt{65}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{65}}$$

$$= \frac{8\sqrt{65}}{65}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
&= \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\
&= -\frac{3}{\sqrt{65}} + \frac{4}{\sqrt{65}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{65}} \\
&= \frac{\sqrt{65}}{65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
&= \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{65}} - \frac{6}{\sqrt{65}} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{65}} \\
&= -\frac{4\sqrt{65}}{65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\frac{8\sqrt{65}}{65}}{\frac{\sqrt{65}}{65}} \\
&= \frac{8\sqrt{65}}{65} \times \frac{65}{\sqrt{65}} \\
&= 8 \qquad \square
\end{aligned}$$

4. เนื่องจาก $\sec\theta = -\frac{13}{12}$

เนื่องจาก $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

จาก $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ จะได้ $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\frac{13}{12}} = -\frac{12}{13}$

ดังนั้น $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ และเนื่องจาก $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

จะได้ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

นั่นคือ $\sin\theta = -\frac{5}{13}$

เนื่องจาก $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น $\cos\theta = -\frac{12}{13}$ และ $\sin\theta = -\frac{5}{13}$

จาก $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

จะได้ $\sin 2\theta = 2\left(-\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)$

$= \frac{120}{169}$

ดังนั้น $\sin\theta = \frac{120}{169}$

จาก $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

จะได้ $\cos 2\theta = \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2$

$= \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$

ดังนั้น $\cos 2\theta = \frac{119}{169}$

และจาก $\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

จะได้ $\tan 2\theta = \frac{\frac{120}{169}}{\frac{119}{169}} = \frac{120}{119}$

ดังนั้น $\tan\theta = \frac{120}{119}$ □

5. จาก $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

จะได้ $\cos 64^\circ = \cos\left(2\cdot 32^\circ\right)$

$= 2\cos^2 32^\circ - 1$

นั่นคือ $0.44 = 2\cos^2 32^\circ - 1$

$2\cos^2 32^\circ = 1.44$

$\cos^2 32^\circ = \frac{1.44}{2}$

$\cos^2 32^\circ = 0.72$

$\cos 32^\circ = \sqrt{0.72}$ เพราะ $0^\circ < 32^\circ < 90^\circ$

ดังนั้น $\cos 32^\circ = \sqrt{0.72} = \sqrt{\frac{72}{100}} = \sqrt{\frac{36\cdot 2}{100}} = \frac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ □

6. เนื่องจาก $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

จะได้ $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

นั่นคือ $\cos A = \frac{3}{5}$

เนื่องจาก $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$

ดังนั้น $\sin A = -\frac{4}{5}$ และ $\cos A = \frac{3}{5}$

และเนื่องจาก $\sec^2 B = 1 + \tan^2 B$

จะได้ $\sec^2 B = 1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 = 1 + \left(\frac{25}{144}\right) = \frac{169}{144}$

ดังนั้น $\sec B = -\frac{13}{12}$

เนื่องจาก $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$

จาก $\sec B = \frac{1}{\cos B}$

จะได้ $\cos B = \frac{1}{\sec B} = \frac{1}{-\frac{13}{12}} = -\frac{12}{13}$

ดังนั้น $\cos B = -\frac{12}{13}$ และเนื่องจาก $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

จะได้ $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

นั่นคือ $\sin B = -\frac{5}{13}$

เนื่องจาก $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น $\sin B = -\frac{5}{13}$ และ $\cos B = -\frac{12}{13}$

จะได้ 1) $\cos A = \frac{3}{5}$ □

2) $\operatorname{cosec} B = \frac{1}{\sin B}$

$= \frac{1}{-\frac{5}{13}}$

$= -\frac{13}{5}$ □

3) $\sec(A+B) = \frac{1}{\cos(A+B)}$

$= \frac{1}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$

$= \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)}$

$= \frac{1}{-\frac{36}{65}-\frac{20}{65}}$

$= -\frac{65}{56}$ □

4) $\cot(A+B) = \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$

$= \frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\sin A \cos B + \cos A \sin B}$

$= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)}{\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)}$

$= \frac{-\frac{56}{65}}{\frac{33}{65}}$

$= -\frac{56}{33}$ □

7. 1) เนื่องจาก $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

ดังนั้น $\sin 15^\circ - \sin 75^\circ = 2\cos\left(\frac{15^\circ+75^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{15^\circ-75^\circ}{2}\right)$

$= 2\cos 45^\circ \sin\left(-30^\circ\right)$

$$= 2\cos 45^\circ\left(-\sin 30^\circ\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$ □

2) เนื่องจาก $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

ดังนั้น $\cos\frac{17\pi}{12} - \cos\frac{11\pi}{12} = -2\sin\left(\frac{\frac{17\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{17\pi}{12}-\frac{11\pi}{12}}{2}\right)$

$$= -2\sin\left(\frac{17\pi+11\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{17\pi-11\pi}{24}\right)$$
$$= -2\sin\frac{7\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= -2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= -2\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= -2\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= -2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$ □

3) เนื่องจาก $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

ดังนั้น $\cos\frac{7\pi}{12} + \cos\frac{11\pi}{12} = 2\cos\left(\frac{\frac{7\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{7\pi}{12}-\frac{11\pi}{12}}{2}\right)$

$$= 2\cos\left(\frac{7\pi+11\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{7\pi-11\pi}{24}\right)$$
$$= 2\cos\frac{3\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \square$$

4) เนื่องจาก $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

จะได้

$$\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 2\cos\left(\frac{20^\circ + 100^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{20^\circ - 100^\circ}{2}\right) + \cos 140^\circ$$

$$= 2\cos 60^\circ \cos 40^\circ + \cos 140^\circ$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)\cos 40^\circ + \cos 140^\circ$$

$$= \cos 40^\circ + \cos 140^\circ$$

$$= 2\cos\left(\frac{40^\circ + 140^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{40^\circ - 140^\circ}{2}\right)$$

$$= 2\cos 90^\circ \cos\left(-50^\circ\right)$$

$$= 2(0)\cos\left(-50^\circ\right)$$

$$= 0 \qquad \square$$

8. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta$

$$= (1)\cos\theta + (0)\sin\theta$$

$$= \cos\theta \qquad \square$$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$

$$= (0)\cos\theta - (1)\sin\theta$$

$$= -\sin\theta \qquad \square$$

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta$

$$= (0)\cos\theta + (-1)\sin\theta$$

$$= -\sin\theta \qquad \square$$

4) $$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}$$
$$=\frac{\sin\pi\cos\theta-\cos\pi\sin\theta}{\cos\pi\cos\theta+\sin\pi\sin\theta}$$
$$=\frac{(0)\cos\theta-(-1)\sin\theta}{(-1)\cos\theta+(0)\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}$$
$$=-\tan\theta$$ □

5) $$\operatorname{cosec}\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{1}{\sin\left(90^\circ-\theta\right)}$$
$$=\frac{1}{\sin 90^\circ\cos\theta-\cos 90^\circ\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{(1)\cos\theta-(0)\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}$$
$$=\sec\theta$$ □

6) $$\cot\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{1}{\tan\left(90^\circ-\theta\right)}$$
$$=\frac{1}{\dfrac{\sin\left(90^\circ-\theta\right)}{\cos\left(90^\circ-\theta\right)}}$$
$$=\frac{\cos\left(90^\circ-\theta\right)}{\sin\left(90^\circ-\theta\right)}$$
$$=\frac{\cos 90^\circ\cos\theta+\sin 90^\circ\sin\theta}{\sin 90^\circ\cos\theta-\cos 90^\circ\sin\theta}$$
$$=\frac{(0)\cos\theta+(1)\sin\theta}{(1)\cos\theta-(0)\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\tan\theta$$ □

7) $$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$=1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$
$$=1-\tan\alpha\tan\beta \qquad \text{เมื่อ } \cos\alpha\cos\beta\neq 0 \qquad \square$$

8) $$\cos\left(x-30^\circ\right)-\cos\left(x+30^\circ\right)$$
$$=\left(\cos x\cos 30^\circ+\sin x\sin 30^\circ\right)-\left(\cos x\cos 30^\circ-\sin x\sin 30^\circ\right)$$
$$=\cos x\cos 30^\circ+\sin x\sin 30^\circ-\cos x\cos 30^\circ+\sin x\sin 30^\circ$$
$$=2\sin x\sin 30^\circ$$
$$=2\sin x\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\sin x \qquad \square$$

9) $$\sin\left(x-30^\circ\right)+\sin\left(x+30^\circ\right)$$
$$=\left(\sin x\cos 30^\circ-\cos x\sin 30^\circ\right)+\left(\sin x\cos 30^\circ+\cos x\sin 30^\circ\right)$$
$$=\sin x\cos 30^\circ-\cos x\sin 30^\circ+\sin x\cos 30^\circ+\cos x\sin 30^\circ$$
$$=2\sin x\cos 30^\circ$$
$$=2\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{3}\sin x \qquad \square$$

10) $$\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\cos(\theta+\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$=\frac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}$$
$$=\sin\theta+\cos\theta \qquad \text{เมื่อ } \sin\theta\neq\cos\theta \qquad \square$$

11) $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha)$

$= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$

$= \left(2\cos^2\alpha - 1\right)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha\left(1 - \cos^2\alpha\right)$

$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ □

12) จาก $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

จะได้ $\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

นั่นคือ $\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\alpha + 1$

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\alpha + 1}{2}$ □

13) จาก $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

จะได้ $\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

นั่นคือ $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$ □

14) จาก $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$= \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$= \frac{1-\cos\alpha}{2} \times \frac{2}{1+\cos\alpha}$

$= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ เมื่อ $\cos\alpha \neq -1$ □

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad

เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” หน้า 1 – 3

หน้าที่ 1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม"

เริ่มต้นใหม่

อธิบาย 1 กำหนดให้ P, P_1และ P_2 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย

อธิบาย 2 ให้ส่วนโค้ง PP_1 ยาว β หน่วย และส่วนโค้ง PP_2 ยาว α หน่วย

ส่วนโค้ง PP1 ส่วนโค้ง PP2

อธิบาย 3 ดังนั้น ส่วนโค้ง P_1P_2 ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย

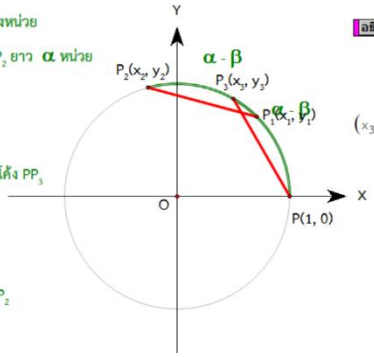
ส่วนโค้ง P1P2

อธิบาย 4 ให้ P_3 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทำให้ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

อธิบาย 5 ดังนั้น ส่วนโค้ง PP_3 ยาว $\alpha - \beta$ หน่วย

ส่วนโค้ง PP3

อธิบาย 6 เนื่องจากส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2 ดังนั้น คอร์ด PP_3 ยาวเท่ากับคอร์ด P_1P_2



อธิบาย 7

$$(PP_3)^2 = (P_1P_2)^2$$

$$(x_3-1)^2+(y_3-0)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$x_3^2-2x_3+1+y_3^2=x_2^2-2x_2x_1+x_1^2+y_2^2-2y$$

$$-2x_3+2=-2x_2x_1-2y_2y_1+2$$

$$x_3=x_2x_1+y_2y_1$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

หน้าที่ 2

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม"

เริ่มต้นใหม่

การหา $\cos(\alpha + \beta)$ อธิบาย ซ่อน อธิบาย

อธิบาย 1 อธิบาย 2 อธิบาย 3 อธิบาย 4 อธิบาย 5

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))$$
$$=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha(-\sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

ดังนั้น

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

การหา $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ อธิบาย ซ่อน อธิบาย

อธิบาย 1 อธิบาย 2 อธิบาย 3 อธิบาย 4

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha$$
$$=(0)\cos\alpha+(1)\sin\alpha$$
$$=\sin\alpha$$

ดังนั้น $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

การหา $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$ อธิบาย ซ่อน อธิบาย

อธิบาย 1 อธิบาย 2 อธิบาย 3 อธิบาย 4 อธิบาย 5

ให้ $\theta=\frac{\pi}{2}-\beta$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)=\cos\beta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$\sin\theta=\cos\beta$$

ดังนั้น $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$

หน้าที่ 3

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม"

เริ่มต้นใหม่ การหา $\sin(\alpha + \beta)$ อธิบาย ซ่อน อธิบาย

อธิบาย 1 อธิบาย 2 อธิบาย 3 อธิบาย 4 อธิบาย 5

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)$$
$$=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

ดังนั้น $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

การหา $\sin(\alpha - \beta)$ อธิบาย ซ่อน อธิบาย

อธิบาย 1 อธิบาย 2 อธิบาย 3 อธิบาย 4 อธิบาย 5

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))$$
$$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

ดังนั้น $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad

เรื่อง "ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม" หน้า 4 – 6

หน้าที่ 4

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม"

เริ่มต้นใหม่

การหา $\tan(\alpha+\beta)$ — อธิบาย — ซ่อน อธิบาย

อธิบาย 1 อธิบาย 2 อธิบาย 3 อธิบาย 4 อธิบาย 5

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos(\alpha+\beta)\neq 0$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\alpha\cos\beta\neq 0$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ} \quad \tan\alpha\tan\beta\neq 1$$

ดังนั้น $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta\neq 1$

การหา $\tan(\alpha-\beta)$ — อธิบาย — ซ่อน อธิบาย

อธิบาย 1 อธิบาย 2 อธิบาย 3 อธิบาย 4 อธิบาย 5

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos(\alpha-\beta)\neq 0$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\alpha\cos\beta\neq 0$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ} \quad \tan\alpha\tan\beta\neq -1$$

ดังนั้น $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta\neq -1$

หน้าที่ 5

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม"

เริ่มต้นใหม่

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \text{.....} \quad (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \text{.....} \quad (2)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \text{.....} \quad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \text{.....} \quad (4)$$

(1) + (2)

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

นั่นคือ $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

(3) + (4)

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

นั่นคือ $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

(1) - (2)

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

นั่นคือ $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

(3) - (4)

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

นั่นคือ $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

หน้าที่ 6

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม"

เริ่มต้นใหม่

$$2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y) \quad \text{.....} \quad (1)$$

$$2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y) \quad \text{.....} \quad (2)$$

$$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y) \quad \text{.....} \quad (3)$$

$$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y) \quad \text{.....} \quad (4)$$

กำหนดให้ กำหนดให้ $x+y=\alpha$ และ $x-y=\beta$

จะได้ $2x=\alpha+\beta$ นั่นคือ $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

และ $2y=\alpha-\beta$ นั่นคือ $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$

จาก (1), (2), (3) และ (4) จะได้

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

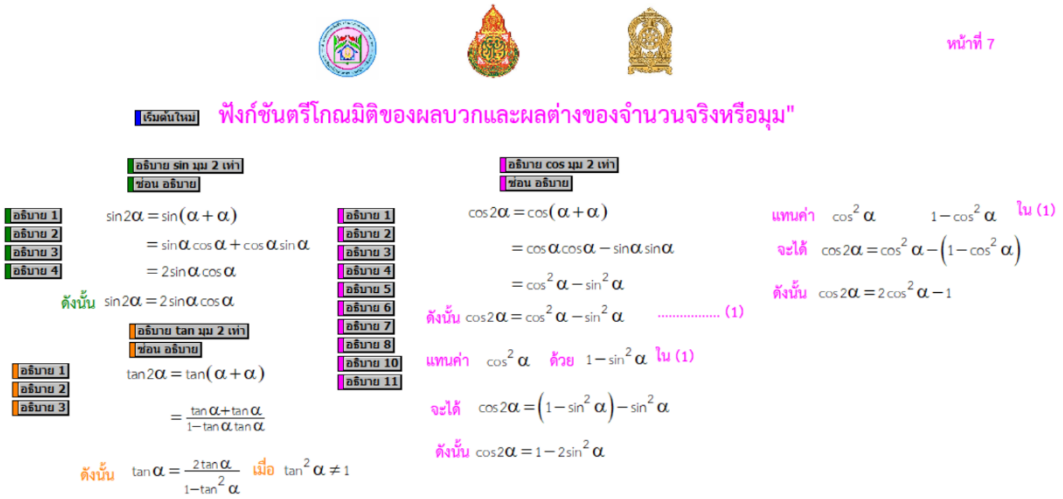
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad

เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” หน้า 7



เกณฑ์การประเมินผลด้านความรู้

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 13 - 16 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 9 - 12 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 6 - 9 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ ต่ำกว่า 6 หรือ มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 1 และข้อ 2 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2. แสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 12 – 14 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 8 – 11 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 – 7 ข้อ	สามารถทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ ต่ำกว่า 5 หรือ มีร่องรอยของความพยายามในการทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านความรู้

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ								ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (หาค่า)				2) (แสดงความสัมพันธ์)					
		แบบฝึกหัดที่ 7 ข้อ 1 - ข้อ 2				แบบฝึกหัดที่ 7 ข้อ 8					
		4	3	2	1	4	3	2	1		

เกณฑ์การประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	4	3	2	1
1) ใช้การแก้ปัญหาโจทย์การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 3 - ข้อ 7 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 3 - ข้อ 7 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 3 - 4 ข้อ	สามารถแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 3 - ข้อ 7 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 2 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามในการแก้ปัญหาโจทย์แบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 3 - ข้อ 7 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	สามารถใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 12 – 14 ข้อ	สามารถใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 8 – 11 ข้อ	สามารถใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 5 – 7 ข้อ	สามารถใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ ต่ำกว่า 5 หรือ มีร่องรอยของความพยายามในการใช้เหตุผลแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ข้อ 8 แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

*** ถ้าผลการประเมินในรายการใดไม่ถึงเกณฑ์ระดับ 1 ให้กำหนดเป็น 0

การแปลความหมาย

ระดับ 4 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีมาก

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$3.2 < x \leq 4$	5
$2.4 < x \leq 3.2$	4
$1.6 < x \leq 2.4$	3
$0.8 < x \leq 1.6$	2
$0 < x \leq 0.8$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ								ผลการประเมิน	คะแนน
		1 (การแก้ปัญหา) แบบฝึกหัดที่ 7 ข้อ 3 - ข้อ 7				2 (การให้เหตุผล) แบบฝึกหัดที่ 7 ข้อ 8					
		4	3	2	1	4	3	2	1		

เกณฑ์การประเมินผลด้านด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ซื่อสัตย์สุจริต	ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” โดยไม่คัดลอกจากผู้อื่นและปฏิบัติตนตามข้อตกลงที่กำหนดให้	ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นบางส่วนและปฏิบัติตนตามข้อตกลงที่กำหนดให้เป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” โดยคัดลอกจากผู้อื่นเป็นส่วนใหญ่และปฏิบัติตนตามข้อตกลงที่กำหนดให้ร่วมกันเป็นบางครั้งและต้องอาศัยการแนะนำหรือตักเตือน	ไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”
2) มีวินัย	แต่งกายเรียบร้อย	แต่งกายเรียบร้อยโดยส่วนใหญ่	แต่งกายเรียบร้อยบางส่วนแก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน	แต่งกายไม่เรียบร้อยหรือไม่แก้ไขเมื่อได้รับการตักเตือน
3) ใฝ่เรียนรู้	การเข้าเรียนตรงเวลา	การเข้าเรียนสายไม่เกิน 5 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 5 นาทีแต่ไม่เกิน 15 นาที	การเข้าเรียนสายเกิน 15 นาที
4) มุ่งมั่นในการทำงาน	ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ครบทุกข้อและถูกต้องสมบูรณ์	ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่	ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ครบทุกข้อและถูกต้องเป็นบางส่วน	ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ไม่ครบทุกข้อหรือครบทุกข้อแต่ไม่ถูกต้องหรือไม่ทำแบบฝึกหัดที่ 7 “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม”

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	**คะแนนเต็ม 5 คะแนน**
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (ซื่อสัตย์สุจริต)				2) (มีวินัย)				3) (ใฝ่เรียนรู้)				4) (มุ่งมั่นในการทำงาน)					
		แบบฝึกหัดที่ 7				การแต่งกาย				การเข้าเรียน				แบบฝึกหัด 7					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

เกณฑ์การประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

จุดประสงค์การเรียนรู้	ระดับคุณภาพ			
	3	2	1	0
1) ใช้การสื่อสารในการนำเสนอการแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามแสดงวิธีทำในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
2) ใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์หาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้	สามารถใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 7 - 8 ข้อ	สามารถใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 4 - 6 ข้อ	สามารถใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ 1 - 3 ข้อ	มีร่องรอยของความพยายามใช้การคิดในการแก้ปัญหาโจทย์ในใบงาน “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
3) ใช้ทักษะชีวิตในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกับสมาชิกได้	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มทุกครั้ง	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกเป็นส่วนใหญ่	มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่ม ช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่มบางครั้งแก้ไขเมื่อได้คำแนะนำ	ไม่มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมกลุ่มในชั้นเรียน ไม่แสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มหรือช่วยเหลือสมาชิกในกลุ่ม
4) ใช้เทคโนโลยี เพื่อทบทวนเนื้อหาจากสื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ได้	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ทบทวนและสรุปเนื้อหาทุกครั้ง	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นส่วนใหญ่	ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ทบทวนและสรุปเนื้อหาเป็นบางครั้ง	ไม่ใช้สื่อโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เรื่อง “ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม” ทบทวนและสรุปเนื้อหา

การแปลความหมาย

ระดับ 3 หมายถึง มีระดับคุณภาพดีเยี่ยม

ระดับ 2 หมายถึง มีระดับคุณภาพดี

ระดับ 1 หมายถึง มีระดับคุณภาพพอใช้

ระดับ 0 หมายถึง มีระดับคุณภาพปรับปรุง

การแปลผลการประเมินคุณภาพเป็นคะแนน

คุณภาพ(x)	คะแนนเต็ม 5 คะแนน
$2.5 < x \leq 3.0$	5
$2.0 < x \leq 2.5$	4
$1.5 < x \leq 2.0$	3
$1 < x \leq 1.5$	2
$0 < x \leq 1$	1
0	0

แบบบันทึกประเมินผลด้านสมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้/ระดับคุณภาพ																ผลการประเมิน	คะแนน
		1) (การสื่อสาร)				2) (การคิด)				3) (ทักษะชีวิต)				4) (เทคโนโลยี)					
		ใบงาน ผลต่าง				ใบงาน ผลต่าง				การทำงานกลุ่ม				สื่อ gsp (ผลต่าง)					
		3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0		

แบบบันทึกสรุปคะแนนแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

เลขที่	ชื่อ - นามสกุล	จุดประสงค์การเรียนรู้				คะแนนรวม	คะแนนน้ำหนัก
		1 ด้านความรู้	2 ด้านทักษะฯ	3 ด้านคุณลักษณะฯ	4 ด้านสมรรถนะฯ		
		5	5	5	5	20	5

บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. 2560. **ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป.). **เฉลยข้อสอบ ENTRANCE 15 พ.ศ. คณิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ : บริษัท ธนธัชการพิมพ์ จำกัด.

พิชิต ฤทธิ์จรูญ. 2557. **หลักการวัดและประเมินผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงกทพฯ : เฮ้าส์ออฟเคอร์มิสท์.

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ. 2553. **คู่มือการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ.** พระนครศรีอยุทธยา : สำนักส่งเสริมงานวิชาการและทะเบียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ.

ศศิเกษม สัทธรรมสกุลและเอกสิทธิ์ เกิดกฤษฎานนท์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบ ASORN พิชิต O-NET คณิตศาสตร์ ม.6.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2555. **การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์.**

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2559. **หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-5 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรตรแกนกลางการศึกษาขึ้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2562. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.** พิมพ์ครั้งที่ 1 .กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมนึก ภัททิยธานี. 2553. **การวัดผลการศึกษา.** พิมพ์ครั้งที่ 5. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์.

อนุวัติ คูณแก้ว. 2558. **การวัดผลและประเมินผลการศึกษาแนวใหม่.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.